北

古代历法计算法

GUDAI LIFA JISUANFA

西

东

刘洪涛 著

南开大学出版社

南

古代历法计算法

刘洪涛 著

南开大学出版社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

古代历法计算法 / 刘洪涛著. —天津：南开大学出版社，2003.2(2003.12重印)
ISBN 7-310-01679-3

Ⅰ.古... Ⅱ.刘... Ⅲ.古历法—计算方法—中国
Ⅳ.P194.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第081004号

出版发行 南开大学出版社
地址:天津市南开区卫津路94号 邮编:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542
邮购部电话:(022)23502200

出版人 肖占鹏
承　印 天津宝坻第二印刷厂印刷
经　销 全国各地新华书店
版　次 2003年2月第1版
印　次 2003年12月第2次印刷
开　本 880mm×1230mm 1/32
印　张 20.125
字　数 577千字
印　数 1501—3000
定　价 28.00元

序
——忆洪涛

刘泽华

洪涛老弟小我七岁，却先我而行，苍天实在不公啊！

我曾在不同场合多次说过，刘洪涛是一位奇异之才。从大的方面说，他兼通文、理、医（中医）；从小的方面，他兼通文、史、哲。他还倾心过文学创作，尤其对武侠小说相当热衷。据我所知，他写过武侠小说《葛洪外传》，出版社已拟采用，不巧，正赶上出版社搬家，把手稿遗失，而他自己又未留底。这真让他叫苦不迭。闲暇时刻他迷恋于戏曲和书法，虽说不上精，但颇通品赏之道。有时又从事篆刻，他曾为我刻了一颗藏书章，没想到竟成永久之纪念。在日常生活应对方面也是一把好手，木匠活可以与专业的木工媲美。20 世纪 70 年代家具极难买，也买不起，他家的衣柜等都是用当时凭条供应的劈柴杂木自己做的，与市场所卖无异，令人眼馋！

他来南开大学任教，完全是“毛遂自荐”。那是在“文革”后期，大约是 1975 年秋季的一天，一位陌生人突然来到我家，他就是刘洪涛。第一印象至今仍历历在目：敦实的身材，一身土气，浓重的河南腔，无客套话，开门见山，内藏灵气。话没说几句，便道明来意：我极喜欢历史，想来南开从事历史教学与研究。我当时一下子发懵了，不知如何应对！他毕业于北京工学院，在一家军工厂做技术员，与历史这一行山水相隔，我心想，提的要求有点不着边际！当时希望来南开的有多位专业人员，都因人手不缺而未办成，你这位非专业人员如何能来南开历史系任教？我稍稍沉默了一下，一转念，自疑自问，他既然敢来“跳龙门”，说不定有奇着！我问他读过哪些历史著作，有否文章或读书札记之类的东西？他说了几本流行的书目，至于文章则一无所有。我一下子把“门”就关住了，顾左右而言他。在即将结束谈话时，他无意中说到自己有一部《宋史》，

翻阅过。我也不经意地随便问一句，怎么读的？他说，边读边点。这一句话使我立即兴奋起来。我说，能让我看看吗？他说，可以。没过几天，他抱来两函。当时《宋史》标点本还没有出版。我看了一部分他的标点后十分吃惊，他的古文水平不是一般的好，像《天文志》、《律历志》他也点了，这些对我而言都是"天书"，根本不会读。由此我认定必须认真对待他的请求！

在我当时并不清晰的意识中，隐隐约约感到历史学中应有理工科背景的人参与；又模模糊糊有一种希望，即能有人开科技史方面的课程。真是踏破铁鞋无觅处，得来全不费功夫！刘洪涛不正是最有可能的人选吗？就实而言，在当时的环境中，"阶级斗争"还讲不够，怎么竟然想起要开设科学技术史，不免想入非非！我向一些朋友试探，不止一位说我不看时候，没事找事，有毛病。我也承认确实是这样，但我的毛病有时也难改。经过多次反复，我还是决定试着把洪涛调进来。

我当时仅仅是中国古代史教研室主任，根本不参与人事工作。还有，如何让周围的人能支持或理解？首先想到的是要征得我的老师们的支持，于是我把洪涛标点的《天文志》、《律历志》、《职官志》等请他们审阅。他们阅后几乎异口同声说好，说是个人才。我又把洪涛的标点本放在教研室请同事们审阅，也获得多数同事的支持或理解。然后我向上司介绍、游说。在上下商议过程中，虽不无疑虑和担心，但最后还是批准调入。南开大学是有不拘一格用人才的传统的！

洪涛同志调入之后，立即开始准备开设中国古代科技史，1980 年南开的教学史上首次开设了此课。他的博学与淳朴性的幽默，很快把学生征服了，我不止一次听到学生对他的赞扬。多年之后，一次与几位事业有成又有点高傲的老学生聊天，他们在回忆历史系的老师时，最为服膺的为数不多的老师中就有刘洪涛先生。

洪涛同志十分勤奋，1986 年写毕长达 60 万字《中国古代科技史》一书。他在前言中有一段论述涉及中国近代史上的一桩"公案"，极其精彩，不妨引述如下：

"近代以来许多志士仁人寻找救国道路，他们给自己贫弱的祖国写下的第一份诊断书是：中国受列强凌辱的原因是兵不利、甲不坚、科学

技术不如人。因此开列了‘教育救国’、‘科学救国’的药方。我们曾不止一次嘲笑他们是庸医：在一个腐朽的封建政权下怎能指望发展教育和科学！所以选择了另一条路：经过数十年奋斗，用武装推翻封建政权，建立人民自己的国家。但是，建国以后的历史，特别是十年浩劫的历史把一个更为严峻的问题提到我们的面前：在一个科学、文化落后的国度里，如果不以科学技术、现代文明武装我们的民族，单靠行政手段、口头说教，能不能从两千多年的封建势力形成的社会基础中解脱出来？于是，深沉的反思又把我们带回到原来起步的地方：解决我们贫弱的大问题，最终还是要靠发展教育和科学。志士仁人们没有全错，他们开出的药方虽不可施之于前，却可施之于后。在举国上下都意识到发展科学才是国家出路的时候，另一个问题自然就产生了：我们这个古老文明的国家，曾经处于世界科技的前列，是什么原因使它落后了？怎样才能避免重蹈覆辙？这正是中国古代科技史应该回答的问题，于是它成了受人重视的学科了。”

应该说洪涛同志很好地回答了这些问题。其后又有多篇科技史的论文和著作问世。他同时又长期从事中国古代史的教学，对有关问题也多有创见性的成果。这里仅举一例。90年代初他写了一篇《从赵宋宗室的家族病释烛影斧声之谜》在《南开学报》发表，我粗翻了一下，没有引起注意。过了几天，我的老师杨志玖先生给我打来电话，问我看了刘洪涛的文章没有？接着说：“这篇文章写的极好，有见解，仅凭此文，我看可以晋升为教授！”杨先生是研究唐、宋、元的著名的史学界的耆老。刘洪涛能得到杨先生如此高的评价亦应足矣！

有一件遗憾的事，在这里说几句。2000年进行博士生导师遴选，洪涛也提出了申请。别人都是长篇大论，他在介绍自己时只有几句话，大意是：我这个人老大不小了，还提这个问题，没有出息，实在有些惭愧。如果名额有限，不须大家为难，有或没有，不碍事。我没有钱（项目），现在也许钱比学问更有效？我实在不知行情，请大家批评！在我的印象里，刘洪涛得了全票。我以为这次不会再有问题，遗憾的是，上一级又没有通过，据说还是因为没有“钱”的缘故。我听后怅然不已，果真“钱”比学问更有力量！我想起更早的一件事，当时刚刚提出有否“钱”是能否指导

博士生的基本条件之一。那次也让我去投票，可是我本人就没有“钱”，我怎么有资格投别人的票呢?!于是我声明自己没有资格，起坐退席。事后不止一人批评我不识时务，我深深感到自己过时了!时至今日使我不解的是，历史学科的博士生没有哪位是用导师的经费来支持的，为什么要把“钱”作为具有否决性的条件?洪涛同志比我豁达，他依然是乐呵呵的。

洪涛同志没能赶上他的《古代历法计算法》出版先行而去，但他把“天书”度给我辈，实在是功德无量，他在西天会看到我辈的致敬。

洪涛的夫人窦爱芝教授要我写一个序，我没有能力评论洪涛的大作，仅以此文以志永怀。

2002 年 4 月

前 言

花了一个多月时间，把这部书稿又检查了一遍，当我从台灯下疲惫地抬起头来，从心底里长长出了一口气，终于可以告一段落了。虽然早就想到写这本书相当棘手，干起来还是觉得出乎意料的艰难。

律历之学，明清以来号为绝学。正因如此，不断激发起相关学者的兴趣，自明代邢云路，清人梅文鼎、李锐，以至近代的朱文鑫等，都想把正史中的历志解说明白。大约与我一样，也是对这件事的艰难估计不足，都未如愿以偿。邢云路搞了个《古今律历考》，不过是抄录旧文，除了对授时历的研究稍深之外，对其他历法的研究如何，就很难说了。以梅文鼎算学知识的渊博，最有条件做成此事，无奈他年事已高，又为生计所困，后人只在他自己拟定的《勿庵书目》中看到一本《古今历法通考》，竟是有目而无书。李锐做的工作最细，对后人帮助也最大，可惜他只做了三统历、四分历两种历法的诠释，对乾象历的解释已嫌粗略。此外，虽还修补了宋代的奉元历、占天历，但与他的初衷相去甚远。近人朱文鑫对中西历法都有很深研究，可是他的《历法通考》却只解释了古历的参数，很少涉及算法。

新中国建立后，1957 年中国科学院成立了自然科学史研究室，1975 年扩大为研究所，下设有天文学史研究室。从此，对天文历法史的研究有了专职学者，他们中如陈美东等人，发表了许多重要论文。但是，系统、全面地对正史历志加以诠释仍无人涉足。于是，我几乎是异想天开地做了一个贸然决定：我来做这件事。细想起来，至今不能断定是对是错。有时清夜不寐，扪心自问：予何人哉，予何人哉！竟如是不自量力。

说来奇怪，人时常是不受理智约束的，这就造成了书中常说的“造化弄人”。考大学时，中学的班主任动员我报考文史科系，我断然拒绝

了，一心要做自然科学家。天幸如愿以偿，考入了理工科大学，毕业后还做了几年技术工作。谁知兜了一个圈子，还是调入一所大学，当上一名历史系教师。回想当年劝我报考文史科系的班主任，常常笑谓他是与上帝相通的人。经过数年努力，对历史学不再陌生了，却又鬼使神差地选择了历法研究这条路。有人说我是理科大学毕业，搞天文历法史是用其所长，得其所哉。殊不知理科不下数百种，彼此间同样是“隔行如隔山”。当初我学的是军事科学，对于天文学几乎是一窍不通。由军事科学而历史学，又转而搞起了天文历法，可说是“外行加外行”。这就是我做此事前的知识背景。

平心而论，要说这是纯粹非理性的决定，也不尽然。搞历史学多年，出版的论文、著作也有一些，虽不是成绩卓著，与通常教师相比，并没落在人后。可是，每当我走进学校图书馆，看到那么多的书，说是书山、书海都不足以喻其多。有许多从上架之日起就无人借阅过，心中总是空空荡荡的：我写的那些东西是否也是这样？文章发表了，书也出了，却不知是功德还是造孽。能不能做些别人没有做过又确是历史学科需要做的事？这才想到了解释正史历志，能让一般教师和研究者都读得懂，不再像以前那样望而却步，从而为历史研究别开一片天地，另辟一条蹊径。最初产生这种想法是在1980年前后，为此特地在学校开设了“中国古代科技史”课程，做些知识准备。一边托人打听，得知科技史研究所的专家们正在搞，便没动笔。一拖就是十多年，其间见他们的研究论文不断刊登出来，全面诠释历志的书却一直没有出版，这才意识到他们研究历志的路子是瞄准难点，各个击破，打的是“攻坚战”；我要做的不过是“打扫战场”的功夫。不禁惭愧自己是捡了“现成便宜”，也深悔耽误了十多年的时光。可是细想起来，十多年的教学和研究，使我熟悉了科技史（包括天文历法史）的学术背景，日子倒也没有白过，如今动起手来，与十多年前动手肯定大不一样。

尽管有了这十多年对科技史的研究，像我这样一个“外行加外行”的人做这件事，仍有许多困难。每每遇到一个拦路虎，左思右想，要憋上一个甚至几个星期。咳，总算过来了，一步步走过来了，个中甘苦不必再提。古人说“十年磨一剑”，从最初决定做这件事到这本书稿杀青，已经

过了二十年，付出的辛劳太多了。但是想到能为历史学做些贡献，不枉我加入史学界一场，心中所生欣喜和慰藉足足抵得过一切辛苦而有余。

与此同时，在我心中也深切感谢自邢云路以下曾经探索此事的所有前辈和同行。我写这本书，有的直接采用了他们的研究成果，有的是受了他们的启发，可以说是他们把我带入历志研究这一行的。没有他们的先期研究，这件事无论如何我也做不来。此外，还深切感谢南开大学的领导和学术委员会的专家们，他们出于对我的极大信任，把学校原本不多的资金批给我作为出版资助，使这本书能够顺利出版。

我知道，这件事还没有全部做完，两唐书以后的部分还没有搞出来，我会不会也像李锐他们一样半途而废呢？困难固然很多，一个誓言在我心中不断重复：决不令那种历史重演。耶稣已经背上十字架，普罗米修斯也被带上了高加索的山崖，受难是不可避免的了，谁教我不知轻重，贸然做出这种选择了呢？眼下我只有一门心思，请求专家和同行对于已出版的这本书中的错误给以批评和指正。我会从中受到教益，把以后的事做得更好，没有任何停下来的理由和权利。

2001 年 1 月于天津白堤路寓所

凡 例

一、本书旨在用现代天文和数学知识，解释正史《律历志》(或《历书》)中有关历法计算的文字。

二、解释做法是把历志中有关算法的文字，按自然段顺序编号，逐条解释。包括：(1)用现代数学公式表达原文所述的计算法。(2)对算法依据的道理分说明白。一般只写序号，不录原文，个别需特加说明者除外。

三、三统历以后，一般分四、五个部分：一是解释各参数的意义。二是日月运行计算法。三是“五步”(五星运行规律的总述)。四是由五星运行规律进行的各种推算。五是有的带附表。

四、每章首加一段简短弁言(与“历志”计算原文无关)，说明该历法的总体情形，如历法作者、颁行时间、历法特征等。内容会随历法的具体情形而定。

五、大致是按历分章，虽在同一编“历志”而分属不同历法，便各自立章。

目　录

第一章 《史记·历书》中的历表

历日在三统历以前，应是《史记·历书》中收录的“历术甲子篇”[1]那样的形式：用文字排成历表，以年数为次第，每年只记载年初的月朔大、小余和冬至大、小余两组数据，全年历日都能由这两组数据推算出来。由月朔大、小余进行的推算称为月朔甲子日法，由冬至大、小余进行的推算称为冬至甲子日法。

下面按原文次序逐节介绍“历术甲子篇”的计算方法。

一、历法始点状态

“太初元年，岁名‘焉逢摄提格’，月名‘毕聚’，日得甲子，夜半朔旦冬至。”

这一部分是介绍太初历始点的状态参数的。太初历以元封七年为太初元年，头年（元封六年）十一月朔日夜半为计算历法的始点。即历日虽以太初元年正月一日为起点，计算历法的始点却在头年的十一月，称此月为天正月。

历法始点的状态分别解释如下：

1.“太初元年”

为始点所在年名，由“王纪年法”所得。王纪年法：自新王继位为元年，依次称二年、三年……在年序数前，还要加上一个“年号”，如唐太宗年号为“贞观”、清高宗年号为“乾隆”等。无年号者不是王纪年，如《春秋》称“隐公元年”、“隐公二年”等。汉文帝曾把“文帝十七年”改称“后元元年”，即在年序数“元年”之前加“后元”二字；汉景帝又有“中元”、“后

---

[1] 见《史记·历书》，中华书局1987年版，第1262～1287页。

元”等名，一般不作年号看待。所以，有些人认为王纪年法创始于汉武帝“建元元年”[1]；也有人认为是年号，并把王纪年法的创始年上推到公元前841年西周时期的“共和元年”。

“太初”是汉武帝采用的第七个年号。

2.“岁名‘焉逢摄提格’”

太初元年之“又名”，系按“太岁纪年法”所得，称“岁名”。古人从实际观测中知道岁星12年行天1周，前此已把周天划分为12份，称为十二次，并与十二辰：子、丑、寅……相对应。由于岁星每年行天一次，人们自然想到用岁星在天上所处位置的辰次名称纪年。这样做的不便在于十二辰次序是按天体运行的方向确定的，而岁星的运行方向与此相反，即所谓“天体左转”（自东向西转），“五星（包括岁星在内）右行”（自西向东行）。头年岁星在子位，次年在亥，第三年在戌……十二辰倒着数，十分别扭。于是假想有一颗星与岁星运行速度相同，方向相反，名为“太岁”。岁星与太岁，一可见，一不可见。可见者（岁星）为阳，不可见者（太岁。虽不可见，其位置可由岁星所在位置推知，与可见相同）为阴。阴阳相互依存，不离不弃。那么，由太岁所在的辰次名纪年，就避免了上述的别扭。

这样做仍有不便处：十二辰的周期太短，某王在位期间，年名极易重复出现。为此将十二辰与十天干重叠，由12年周期变为60年周期。年名的天文标志仍是太岁“星”所在的辰次位置，由年名重复产生的混乱就可以避免了。

为了在形式上避免与干支纪时混淆，太岁纪年法还把所用十二辰、十天干另制新名，如《尔雅·释天》所载：“太岁在甲曰阏逢，在乙曰旃蒙，在丙曰柔兆……太岁在寅曰摄提格，在卯曰单阏，在辰曰执徐……”《史记·历书》中的名字由于时代不同，与《尔雅》所载略有差异，参见下表：

[1] 如五代人马鉴撰《续事始》，收入《说郛》卷十，中国书店1986年版，第2册，第36页。

表 1.1 太岁所在与干支名称对照表

岁阳	十 干	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸		
	《尔雅》新名	阏逢	旃蒙	柔兆	强圉	著雍	屠维	上章	重光	玄黓	昭阳		
	《史记》名	焉逢	端蒙	游兆	强梧	徒维	祝犁	商横	昭阳	横艾	尚章		
岁名	十二支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
	《尔雅》新名	困敦	赤奋若	摄提格	单阏	执徐	大荒落	敦牂	协洽	涒滩	作噩	阉茂	大渊献
	《史记》名	困敦	赤奋若	摄提格	单阏	执徐	大荒落	敦牂	协洽	涒滩	作鄂(噩)	淹茂	大渊献

从表中可以看出，所谓“焉逢摄提格”，其实与干支纪年法中的“甲寅”相同。因而，有人认为所谓“太岁纪年法”就是“干支纪年法”，正误不必管它了。

古时曾经采用太岁纪年法的最早证据一般认为是屈原《离骚》中的“摄提贞于孟陬兮”句，由此推断，至迟公元前 4 世纪到公元前 3 世纪之交就有了太岁纪年法。

3.“月名‘毕聚’”

是说历法始点所在月的月名为“毕聚”。月名的制定方法与上述太岁纪年法相同：以十二辰表十二月，为增大周期，也与十干重叠，并把十二辰、十干另制新名。由《尔雅·释天》所载，辰、干与新名对照列表如下：

表 1.2 干支月名与新名对照表

月阳	十 干	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸		
	新 名	毕	橘	修	圉	厉	则	窒	塞	终	极		
月名	十二支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
	月 序	十一	十二	正	二	三	四	五	六	七	八	九	十
	新 名	辜	涂	陬	如	寎	余	皋	且	相	壮	玄	阳

表中正月寅的新名为“陬”，《史记》中写为“聚”，大约是由于音近而讹的原因。所以，“月名‘毕聚’”，就是“月名‘甲寅’”。

4.“日得甲子”

始点所在日的日名为甲子，此由“干支纪日法”所得。具体方法是把十干、十二支依次重叠作日名：如把十干的第一位“甲”与十二支的第一位“子”重叠，得“甲子”，为首日日名；十干第二位与与十二支第二位重叠，得“乙丑”，为第二日日名；第三位重叠，得“丙寅”，为第三日日名……如此做下去，至第61日复得日名“甲子”，参见表1.3。

表1.3　甲子表

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
干支	甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未	壬申	癸酉
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
干支	甲戌	乙亥	丙子	丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未
序号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
干支	甲申	乙酉	丙戌	丁亥	戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳
序号	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
干支	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚子	辛丑	壬寅	癸卯
序号	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
干支	甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑
序号	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
干支	甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥

5.“夜半朔旦冬至”

历法始点既是该日（甲子日）的始点（“夜半”），又是该月（毕聚月）的始点（“朔旦”），还是该年（焉逢摄提格年，即太初元年）的始点（“冬至”点）。即是说计算历法的始点选择了一个非常特殊的时刻，它是年、月、日的共同始点。此时太阳行到黄道的最南端，日、月、地心及观测点在同一直线上，且日、月在地心的同一旁，观测点在地心的另一旁。

二、首年（太初元年）历日的推算参数

1.“正北”

所求年冬至加时辰次对应的方位。由于每个回归年为 365 $\frac{1}{4}$日，畸零为$\frac{1}{4}$日。天左旋，1 昼夜行 1 周天，$\frac{1}{4}$日行 1 象限。第一年始点冬至加时在子，子辰方位为“正北”；第二年始点冬至过 1 象限，加时在卯，卯辰方位为“正东”；第三年加时在午，方位“正南”；第四年加时在酉，方位“正西”；第五年加时重又回到“正北”。《史记·历书》的体例是只记章首年的冬至加时方位，19 年为 1 章，此是第一章章首年加时在北；第二章章首为第 20 年（尚章作噩或癸酉年，为汉昭帝始元二年），冬至加时在酉，方位“正西”；第三章章首为第 39 年（横艾执徐或壬辰年，为汉宣帝地节四年），冬至加时在午，方位“正南”……

2.“十二”

该年包含的朔望月数。平年有 12 个月，所以记为“十二”。若闰年有 13 个月，记为“闰十三”，详见后文。

太初历用“无中置闰法”，把没有中气的月份定为闰月。因而只要算出每月首日（朔日）的甲子日名和二十四节气所在位置（某节气在某月某日），就能确定有无闰月了。

计算朔日甲子日名的方法为“月朔甲子日法”，计算二十四节气所在日的日名方法为“冬至甲子日法”，两者各需一组数据，下面 3、4 便是太初元年的两组数据。

3.“无大余，无小余”

为月朔甲子日法的计算用数据。是所求年天正月朔日到计历始点之间的总日数（称为积日），除去若干甲子（1 甲子 60 日）以后，剩余的不满 1 甲子的部分，其中整日数为大余，不满 1 日的畸零部分（积日余分）为小余。因此处是太初元年天正月朔（与历始重合）的参数，积日整数和余分都是零，所以说“无大余，无小余”。

4."无大余,无小余"

这一组是冬至甲子日法的计算用数据。是所求年冬至点(在天正月)到计历始点之间的总日数(亦名积日),除去若干甲子后,剩余的不满1甲子的部分,整日数为大余,不满1日的畸零为小余。同样,由于太初元年天正月冬至与历始重合,积日为零,也是"无大余,无小余"。

5."焉逢摄提格,太初元年"

已如前述,系自"正北"以下诸参数所在年的年名(前为太岁纪年的年名,后为按王纪年法所得年名)。

这部分(年名)在本章一节中已经出现过,彼处是作为整部历法始点的参数,此处为历法第一年始点的参数,意义虽不同,由于两点系同一点,故名称相同。

三、第二年(太初二年)历日诸参数

1."十二"

此年仍为平年,有12个月。何以是平年?可以粗略按下法估算,太初历所取参数是:1回归年$=365\frac{1}{4}$日, 1个朔望月$=29\frac{499}{940}$日。

头年(太初元年)设了12个月,大、小月相间排列,大月30日,小月29日,合354日或355日(有连大月时355日),差$11\frac{1}{4}$(或$10\frac{1}{4}$)日不够1个回归年,将余数归入第二年。第二年编入12个月后,也有$11\frac{1}{4}$(或$10\frac{1}{4}$)日的剩余,连同上年归入的余数,总余在$22\frac{1}{2}$~$20\frac{1}{2}$之间,不足1个月(至少29日,才够1月),不能编为闰月,所以,第二年还是平年。

2."大余五十四,小余三百四十八"

前面(见本章二节3)说过,这一组数据是由月朔甲子日法算得的积日余数,大余为整日,小余为余分。算法是:头年共12个月,合

$29\frac{499}{940}$日$\times 12 = 354\frac{348}{940}$日，为积日总数。由于历法始点所在日的日名是已知的（见本章一节4），为甲子日。自此日起算，后数354日，算外（第355日）就是第二年开始时（天正月朔日）的日名。但甲子日名60日一复，满60日除去之，只算剩余的不足1甲子的部分即可。显然，此处应除去5甲子（360日），余$54\frac{348}{940}$日。其中整日54为大余，畸零348分为小余。所以《历书》说“大余五十四，小余三百四十八”。自历法始点甲子日起算，大余算外，即按甲子表往后数第55日戊午，就是太初二年天正月初一日的日名。

求下月朔（天正二月初一日）日名，须在此余数上加入一个朔望月的日数（$29\frac{499}{940}$日），或者说是大余加29，小余加499。小余满940分为1日，入大余，此时天正月为大月；不满940分为小月。大余满60日（1甲子）也要除去之，仍是自甲子起算，余数算外为天正二月朔日名。即$54+29=83$日，去1甲子得23日；$348+499=847$分，不足940分。知天正月是小月；二月朔日前大余23，小余847。自甲子起算，大余（23）算外第24日“丁亥”，是天正二月朔日的日名。

求天正二月朔日名法，同样是在二月朔大、小余上加一个朔望月日数，即$23+29=52$日，$847+499=1346$分。1346分超过了一日分数940，从中除去940分化为1整日，入于大余52，得53日，小余变成了$1346-940=406$分。得三月朔大余53，小余406。大余算外第54日丁巳为天正三月朔日名。二月多出1日（积日余分所化），为大月。

如此进行下去，可求得每一个月的大、小和朔日日名，从而也就算出了全年任何一日的日名。

3.“大余五，小余八”

前面说（见本章二节4）这一组数据是由冬至甲子日法求得的积日余分。具体说是第二年（太初二年）冬至前的积日余分。求法可这样设想：已知头年冬至日名（甲子），求次年冬至日名。中间相隔$365\frac{1}{4}$日，只要从甲子向后数，第366日的甲子日名即为所求。同样由于甲子日名

60 日一复，满 60 日即除去之，去 6 甲子(360 日)之后，余 $5\frac{1}{4}$日。分母化为 32 分后，为 $5\frac{8}{32}$日。所以，《历书》说："大余五，小余八。"

每年 $365\frac{1}{4}$日，分为二十四个节气，每气合 $365\frac{1}{4}\div24=15\frac{7}{32}$日。由冬至日名求下一气日名，可在冬至大、小余上加入 $15\frac{7}{32}$日，即冬至大余加 15，小余加 7 分。加后大余满 60 日则除去之，小余满 32 分化为整日入大余，剩余的不满 32 分的部分为小余。如已知太初二年冬至有"大余五，小余八"，求小寒节大、小余：

大余，5＋15＝20；小余，8＋7＝15。

由小寒节大余 20，小余 15，求大寒大、小余：

大余，20＋15＝35；小余，15＋7＝22。

余类推，二十四节气日名均可求出。再与前面按月朔甲子日法求得的逐月朔日日名比较，若某二个朔日名之间只有一个节气日名，而无中节气日名，该月置为闰月。

4."端蒙单阏，二年"

照例，为执行太初历法后第二年的年名。前为太岁纪年法所得；后为王纪年法所得，省略了年号"太初"二字。

四、第三年(太初三年)历日诸参数

1."闰十三"

太初三年有闰月，全年共 13 个月。闰月位置的确定法如下：

前面说，每个回归年 $365\frac{1}{4}$日，平年安排 12 个月，余 $11\frac{1}{4}$或 $10\frac{1}{4}$日；第二年仍是平年，余 $22\frac{1}{2}$～$20\frac{1}{2}$日之间。第三年又有 11 日左右的余日，余日总数达 30 日以上。为了不使按回归年周期得到的年与按月相周期得到的年相差太大，第三年增设 1 月，即设一个闰月，使全年为 13 个月。闰月位置按"无中置闰法"求得，方法是先算出太初三年逐月

朔日日名(月序数姑且自十一月依次顺排)：

十一月(天正月)朔大余 48，朔日名壬子；小余 696(算法见后)，大月。

大余 48，算外第 49 日为壬子，得朔日名“壬子”。大余加 29，小余加 499 得下月十二月大、小余，由大余得朔日日名。如此进行下去，得各月朔日名：

十二月大余 18，朔日名壬午；小余 255，小月。

一月大余 47，朔日名辛亥；小余 754，大月。

…………

再由冬至甲子日法算得该年冬至大、小余为冬至大余 10，小余 16。查甲子表，大余算外第 11 日名甲戌，为冬至日名。冬至大余加 15，小余加 7 分得下一气大、小余，如此依次可以算得各中气大、小余(全年二十四气，分到 12 月中，每月二气。第一气为“节”，第二气谓之“中气”。如一月中气雨水，二月中气春分，三月中气谷雨等)，大余查甲子表得中气日名。与该月朔日名比较，可知它在该月的位置。如前已算得，十一月朔日名壬子，冬至甲戌应是十一月二十三日。同样计算其余诸气：

大寒大余 40，日名甲辰，为十二月二十三日。

雨水大余 11，日名乙亥，为正月二十五日。

…………

大暑大余 43，日名丁未，为六月二十九日。

到下个月情况就不同了：

处暑大余 14，日名戊寅。处暑是七月中气，七月朔日名戊申，至戊寅 31 日。而七月只有 30 日，戊寅落在下月(八月)初一日，七月无中气。按规定，须把七月置为闰月，称为闰六月，而把戊寅所在月(按顺序排列的第八月)称为七月。以下诸月次第顺延，第九月称为八月，第十月称为九月等。参见表 1.4。

表 1.4 太初三年历日计算表

月朔甲子日法					冬至甲子日法				
月序号	大余	小余	大小月	月朔日名	大余	小余	节气名	干支日名	日序号
十一月	48	696	大	壬子	10	16	冬至	甲戌	二十三
十二月	18	255	小	壬午	25	23	小寒	己丑	八
					40	30	大寒	甲辰	二十三
一月	47	754	大	辛亥	56	5	立春	庚申	十
					11	12	雨水	乙亥	二十五
二月	17	313	小	辛巳	26	19	惊蛰	庚寅	十
					41	26	春分	乙巳	二十五
三月	46	812	大	庚戌	57	1	清明	辛酉	十二
					12	8	谷雨	丙子	二十七
四月	16	371	小	庚辰	27	15	立夏	辛卯	十二
					42	22	小满	丙午	二十七
五月	45	870	大	己酉	57	29	芒种	辛酉	十三
					13	4	夏至	丁丑	二十九
六月	15	429	小	己卯	28	11	小暑	壬辰	十四
					43	18	大暑	丁未	二十九
闰六月	44	928	大	戊申	58	25	立秋	壬午	十五
七月	14	487	大	戊寅	14	0	处暑	戊寅	一
					29	7	白露	癸巳	十六
八月	44	46	小	戊申	44	14	秋分	戊午	一
					59	21	寒露	癸亥	十六
九月	13	545	大	丁丑	14	28	霜降	戊寅	二
					30	3	立冬	甲午	十八
十月	43	104	小	丁未	45	10	小雪	己酉	三
					0	17	大雪	甲子	十八
十一月	12	603	大	丙子	15	24	冬至	己卯	四

这样就确定了闰月在太初三年中的位置。

2.“大余四十八，小余六百九十六”

去年（太初二年）大余 54，小余 348。今年又有大余 54，小余 348。大余合为 108，去 1 甲子余 48，故说“大余四十八”。小余合为 696，故说“小余六百九十六”。

3. “大余十，小余十六”

去年有大余 5，小余 8，今年又有此数，合得“大余十，小余十六”。

4. “游兆执徐，三年”

年名。

以下略。算出逐月朔日名，大、小月，节气位置及闰月所在，这是“历术甲子篇”所包括的全部内容。

第二章　首用公式法计算历法的三统历

新莽时人刘歆(？～23年)制定的三统历[1]首次用公式法计算历法，使程序大为简化了。不仅如此，历法中还新增了许多内容，如引入"太极上元"的概念，增加五星和月亮隐见的计算，增加月食的计算等。当然，三统历并不一定是这些项目的发明者，其中许多项目，于秦汉之间流传的古六历[2]之中已经有了，惟"历术甲子篇"仍固守官方传统而已。三统历首次采用这些项目，使历法计算朝野合流，应该说是刘歆做的一大好事。

用公式法，为使计算和叙述更加简便，确定了许多周期。过了某个周期，某种历法现象重复出现，无须再算。如每过19年有7个闰月，19年就是闰月周期，叫做一章。也是最小的周期。最大的周期为"太极上元"，是日、月、五星运行的共同周期，数目是23639040年[3]。它的意义是：在这么多年以前，日、月、五星从天球的同一个位置上同时起步，过这么多年后会重新在这一位置会合。按说历法应从这个共同起点开始计算。也是为了简便，当计算日、月运行(如求年、月、日及与此有关的节气、日食等)而不涉及五星时，只从日、月的会合点起算，周期只有4617年。太初元年天正月夜半子时就是这样一个会合点，它既是年、月、日的起点，也是甲子日名的起点，冬至、月朔、夜半和甲子日名都在此点会合。当计算五星时，只用五星周期。这样一来，"太极上元"形同虚设。五代时曹士蒍制七曜符天历，正式废除"上元"积年参数。

---

① 见《汉书·律历志》，中华书局1987年版，第991～1011页。

② 古六历指黄帝历、颛顼历、夏历、殷历、周历、鲁历。

③ 三统历中五星周期分别是：木星1728年，火星13824年，土星4320年，金星3456年，水星9216年。它们的公倍数是4×9×8×480＝138240年，再求日月的共同周期(4617年)与它的公倍数，得此数(4×8×160×27×171＝23639040)。

为了节省篇幅，自三统历以下，不再抄录原文，但仍按原文次序编号，逐条阐释。

一、计算所用诸参数

1. 统母

是计算日、月运行所需的参数，由几个基本参数衍生而来。

三统历计算日、月运行的基本参数有三个，其中两个与“历术甲子篇”一样，是回归年和朔望月周期。

1 个回归年，$365\frac{385}{1539}$日$\doteq 365.250162443\cdots\cdots$

1 个朔望月，$29\frac{43}{81}$日$\doteq 29.530864197\cdots\cdots$

由回归年的近似值可知，三统历也基本属于四分系统的历法。

由回归年的参数可得：

$365\frac{385}{1539}=\frac{562120}{1539}$日。

右端分数可以理解为：三统历每年天数虽不是整数字，每 1539 年包含的天数却是整数，有 562120 日。即 1539 年是年和日的最小公倍数。也可以理解为：日每天行 1 度，每年行 1 周天。若使 1 度＝1539 分，1 周天＝$365\frac{385}{1539}$度＝562120 分。562120 叫做“周天”，1539 叫做“统法”。

前文说 19 年为 1 章，有 7 个闰月，19 名为“闰法”，又名“章岁”。那么 1 章共有 19×12＋7＝235 个月，235 名为“章月”。每月有 1 个中气，闰月无中气，因而一年有 12 个中气（不论有闰无闰），12 名为“岁中”。同样，1 章中气数 228（12×19＝228）名为“章中”，每统中气数 18468 为“统中”，1 统月数 19035 为“统月”。

前面说 1 统之年＝562120 日，为求日名重复出现的周期，求出 562120 与 1 甲子 60 日的最小公倍数 562120×3 日，或 1539×3 年＝4617 年。4617 为“元法”，显然 1 元＝3 统，依次名为天、地、人统。元月

$=57105$，元中为55404。又1元$=3$统$=3\times81$章$=3\times81\times19$年，可写作1元$=81\times57$年。其中57名为“周至”，81名为“日法”。

三统历一个朔望月取为$29\frac{43}{81}$日$=\frac{2392}{81}$日。2392名为“月法”，81名为“日法”。意思是若分1日为81分，积2392分就是1月。再用上、下弦和望分1月为4段，每段$\frac{\text{月法}}{4}=598$，名为“通法”。

三统历有一个与“历术甲子篇”不同的基本参数：“交食（蚀，后同）周期”，取为$5\frac{20}{23}$月$=\frac{135}{23}$月。意为每$5\frac{20}{23}$月，日、月1交会，或者每135月能有23交会。135名为“朔望之会”。求朔望之会与章月的最小公倍数，即交食与章月的共同周期，得：$135\times47=6345$。其中47名为“会数”，6345名为“会月”。

每年12个中气，每个中气的平均日数为：$\frac{\text{岁实}}{12}=365\frac{385}{1539}\div12=\frac{562120}{1539\times12}=\frac{140530}{4617}$。右端分母名为“元法”，分子140530名为“中法”。

“历术甲子篇”计算冬至日名是把1个回归年日数除去6甲子（360日）后，以余日为大余，余分为小余。积大、小余方得冬至日名。三统历亦如此，1个回归年日数去掉6甲子，得：

$5\frac{385}{1539}$日$=\frac{8080}{1539}$日。分子8080名为“策余”。

此外，章月235月，由于每月之中月行度为1周天加日行度，如图2.1，日、月相冲（居地两旁），称为望。假若日不动，月自A始绕地1周，重又回到A，是从望到望，恰是1个朔望月。即月经1个朔望月绕地1周（或者说是行天1周）。但日并非不动，在月绕地1周期间，日顺行至B'，经过一个圆心角θ。因此，月绕地1周重新回到A时，日、月已不相冲，不能算是从望到望。要使月相重新到望，月须再行θ度，到A'。即是说，在1个朔望月期间，月实行度为1周天加日行度。在235个月（1个章月）间，日绕地19周，月实行应是$235+19=254$周。称此数为“月周”。

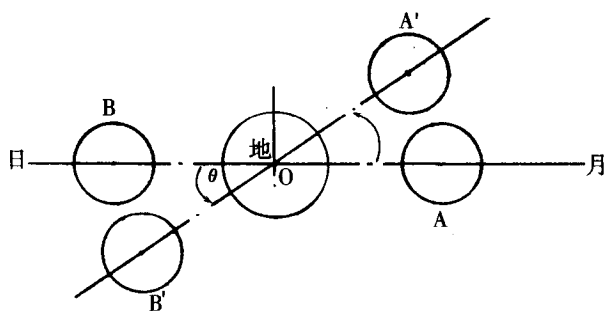



图 2.1 月行度图

2. 纪母

为计算五星运行所需诸参数。之所以叫做"纪母",是由于五星号称"天之纪",是计量(纪)天行的主要参照物。

五星指木、火、土、金、水五大行星,依次又名为岁星、荧惑、镇星、太白、辰星。其中镇星,《史记·天官书》名为填星。

三统历于五星中的每个行星都给出了大、小两个周期:金、水二星小周期名为小复,余三星名为小周;大周期都名为岁数,如下表:

表 2.1 五星周期表

星名 数目 / 参数	木星	金星	土星	火星	水星
小 周(或小复)	12	16	30	64	64
岁 数	1728	3456	4320	13824	9216

同样为计算和叙述的方便,各由两个周期推断出几个新参数。以木星为例:岁数 1728,每岁 12 个中气,1728 年共 20736 个中气,称为"见中分"。所以,"见中分"的意义就是在行星一个大周期内能够见到的中气数。据观测,木星岁数内绕天 145 周,而日每岁绕天 1 周,两者同向而行,在木星岁数 1728 年内,与日交会 1728－145＝1583 次。交会时星隐不见,但有 1 隐就有 1 见,见和隐次数相同。日、木交会(隐)的次数

1583，也是木星出现的次数，因称此数为“见数”。用此数去除见中分，可得每见所含中气数，因又称1583为“见中法”。所以，参数1583，就其作为木星在一大周期内出现的次数而言，名为“见数”；从它作为求每见中气所用的除数而言，名为“见中法”。

见数除见中分（如木星：$\frac{见中分}{见数}=\frac{20736}{1583}=13\frac{157}{1583}$），所得整数13为星每见包含的中气数，称为“积中”；分数部分的分子157名为“中余”。即：

$$\frac{见中分}{见中法}=积中\frac{中余}{见中法} \quad\cdots\cdots (2.1)$$

仿照(2.1)式，可以得到另外两组数据：求每见所含月数，得见月分、见月法、积月、月余；求每见日数，得见日分、见日法、积日、日余。可是，中间有难处，需要变通。比如求见月分，仿见中分的意义，此数应该表示在木星岁数内所含月数，由于1年$=12\frac{7}{19}$月$=\frac{235}{19}$月$=\frac{章月}{章法}$，所含月数应是$\frac{岁数\times章月}{章法}$。所得不是整数，不宜当做一个参数。可以变通一下，取此数的19倍，即取岁数×章月为见月分。这也有问题，前面已有了见中分，等于岁数中包含的有中气的月数，与见月分有重叠。只要再求出1个岁数中的闰月数（“见闰分”）加上见中分，就是见月分，不必再设见月分的参数。求闰月数法：$\frac{岁数\times闰分}{章法}$。但此数也不是整数，故以闰月数的19倍（岁数×闰分）为“见闰分”。闰月增为19倍，见数也应增为19倍，即“见月法”＝见数×19。于是，积月、月余的求法变成了见中分的19倍加见闰分（等于总月数的19倍）除以见月法（见数的19倍），即：

$$\frac{见中分\times章法+见闰分}{见月法}=积月\frac{月余}{见月法} \quad\cdots\cdots (2.2)$$

对于木星，见闰分12096，见月法30077，代入上式得积月13，月余15079。

算积日也可变通后得到较简捷的方法，如直接由(2.2)式算得的积月化为积日：

$$积月\frac{月余}{见月法}\times朔望月=积日\frac{日余}{见月法\times日法}=积日\frac{日余}{见月日法} \quad \cdots (2.3)$$

式中积日、日余为每见日数。根据“见中法”、“见月法”的命名原则，分母(见月法×日法)应该叫做见日法。但由于它是由见月法推出，故名为见月日法。对于木星：

见月日法＝见月法×日法＝30077×81＝2436237

积日数也可以由前(2.1)式算得的每见中气数求得，只要将该数乘以每中气日数即可：

$$积中\frac{中余}{见中法}\times\frac{回归年日数}{12}=\frac{见中分}{见中法}\times\frac{中法}{元法}=\frac{见中分\times中法}{见中法\times元法}$$

$$=积日\frac{日余}{见中日法} \quad \cdots\cdots (2.4)$$

式中见中日法＝见中法×元法。对于木星：

见中日法＝见中法×元法＝1583×4617＝7308711

比较见中日法和见月日法，可以看出，前者是后者的3倍(见中日法＝见数×元法＝见数×81×19×3＝见月法×日法×3＝见月日法×3)；而由此两数所求得的“见日分”也是前者为后者的3倍，所以，无论用见月日法还是由见中日法求得的每见日数(积日)是相等的。

以上3组10个参数(见中分、见中法、积中、中余，见闰分、见月法、积月、月余，见月日法、见中日法)是木、金、土、火、水五大行星共有的参数，虽每个参数的大小不同，都有以上10个参数。独金、水二星每见有晨见、夕见的不同，于以上10个参数之外，又有晨中分、(晨)积中、(晨)中余，夕中分、(夕)积中、(夕)中余，晨闰分、(晨)积月、(晨)月余，夕闰分、(夕)积月、(夕)月余共4组12个参数。意义各与前10个参数中的对应参数相似，如晨中分(与见中分对应)含意是在行星岁数中，晨见包含的中气数；(晨)积中(与积中相应)含意是晨见一次包含的中气数；晨闰分(与见闰分对应)表示行星岁数内包含的闰月总数；晨积月表示行星一见包含的月数。夕见同。实际计算时需要区别晨、夕见的岁数，“纪母”后载有区别的方法：“东九西七乘岁数，并九七为法，得一，金、水晨夕岁数。”意思是晨、夕见岁数的比例是9∶7，晨见岁数为总岁数的$\frac{9}{16}$，

夕见岁数为总数的$\frac{7}{16}$。以金星为例，总岁数是3456；晨见岁数，$3456\times\frac{9}{16}=1944$；夕见岁数，$3456\times\frac{7}{16}=1512$。由此求得：

晨中分＝晨见岁数×12＝1944×12＝23328；

夕中分＝夕见岁数×12＝1512×12＝18144。

(晨)积中及中余：$\frac{\text{晨中分}}{\text{见中法}}=\frac{23328}{2161}=10\frac{1718}{2161}$，

其中(晨)积中为10，(晨)中余1718；

(夕)积中及中余：$\frac{\text{夕中分}}{\text{见中法}}=\frac{18144}{2161}=8\frac{856}{2161}$，

其中(夕)积中为10，(夕)中余为856。

晨闰分＝晨见岁数×闰分＝1944×7＝13608；

夕闰分＝夕见岁数×闰分＝1512×7＝10584。

(晨)积月及月余：

$$\frac{\text{晨中分}\times\text{章法}+\text{晨闰分}}{\text{见月法}}=\frac{23328\times19+13608}{41059}=11\frac{5191}{41059},$$

其中11为(晨)积月，5191为(晨)月余；

(夕)积月及月余：

$$\frac{\text{夕中分}\times\text{章法}+\text{夕闰分}}{\text{见月法}}=\frac{18144\times19+10584}{41059}=8\frac{26848}{41059},$$

其中8为(夕)积月，26848为(夕)月余。

水星晨、夕见求法略。

3. 五步

是记述五星行步，即五星如何一步步地走过天穹的，何时隐，何时见，见后几日复隐？隐、见时速率如何？有无变化？怎样变？总之，是五星运行中的状态变化，按时间先后顺序一步步记录下来。

(1)木星

晨始见(去日半次，15度)

顺行　日行$\frac{2}{11}$度　行121日　行度22度

留　　　　　　25日

逆行　日行$\frac{1}{7}$度　行84日　行度－12度

留　　24日3分

顺行　日行$\frac{2}{11}$度　行111日1828362分　行度20度1661286分

（按：每度7308711分，即以见中日法为分母）

＋）————————————————

（伏）　　行365日1828365分　行度30度1661286分

365日1828365分，以见中日法7308711分为分母，合365$\frac{385}{1539}$日，恰为1个回归年天数。行度30度1661286分，也以见中日法为分母，合30度余，约为1次（周天12次）。所以，《三统历》“五步”说：“凡见一岁，行一次而后伏。”

伏行　日行不满$\frac{1}{11}$度　行33日3334737分　行3度1673451分

见伏合　　398日5163102分　行33度3334737分

平均每日行分为：

$$33\frac{3334737}{7308711}度\div398\frac{5163102}{7308711}=\frac{244522200}{7308711}\div\frac{2914030080}{7308711}$$

$$=\frac{244522200}{2914030080}\doteq\frac{145}{1728}$$

所以，《三统历》“五步”说：“通其率，故曰日行千七百二十八分度之百四十五。”

(2)金星

晨始见（去日半次）

逆行　日行$\frac{1}{2}$度　行6日　行度－3度

留　　8日

顺行　日行$\frac{33}{46}$度　行46日　行度33度

顺行疾　日行1$\frac{15}{92}$度　行184日　行度214度

＋）————————————————

（伏）　　　（一见）计　244 日行度 244 度

伏行　　日行 $1\frac{33}{92}$度余　行 83 日　行度 113 度 4365220 分（分母为见中日法 9977337，即 1 度＝9977337 分）

＋）———————————————————————

（晨见伏）　　总 327 日　行度 357 度 4365220 分（分母为见中日法 9977337，即 1 度＝9977337 分）

夕始见（去日半次）

顺行　日行 $1\frac{15}{92}$度　行 $181\frac{45}{107}$日　行度 211 度

顺迟　日行$\frac{33}{46}$度　行 46 日　行度 33 度

留　　　　$7\frac{62}{107}$日

逆行　日行$\frac{1}{2}$度　行 6 日　行度－3 度

＋）———————————————————————

（伏）　　　（一见）计 241 日　行度 241 度

伏逆行　日行$\frac{7}{8}$度余　行 16 日 1295352 分　行度－14 度 3069868 分（分母为见中日法 9977337 分）

＋）———————————————————————

（夕见伏）　总 257 日 1295352 分　　行度 226 度 6907469 分

金星一复（晨、夕见伏总数）：584 日 1295352 分，行度 584 日 1295352 分。因此《三统历》“五步”说：“故曰（金星）日行一度。”

（3）土星

晨始见（去日半次）

顺行　日行$\frac{1}{15}$度　行 87 日　行度 5 度 15420780 分

（1 度＝19275975 分）

留　　　　34 日

逆行　日行$\frac{5}{81}$度　行 101 日　行度－6 度 4521525 分

留　　　　　　33 日 862455 分

顺行　日行$\frac{1}{15}$度　行 85 日　行度 5 度 12850650 分

+)————————————————————

(伏)　(一见)行 340 日 862455 分　行度 5 度 4473930 分

伏行　日行不足$\frac{3}{15}$度　行 37 日 17170170 分　行度 7 度 8736570 分

+)————————————————————

(一见伏)　总 377 日 18032625 分　行度 12 度 13210500 分

平均每日行度 $12\frac{13210500}{19275975}\div 377\frac{18032625}{19275975}=\frac{244522200}{7285075200}=\frac{145}{4320}$度。所以,《三统历》"五步"说:"故曰(土星)日行四千三百二十分度之百四十五。"

(4)火星

晨始见(去日半次)

顺行　日行$\frac{53}{92}$度　行 276 日　行度 159 度

留　　　　　　10 日

逆行　日行$\frac{17}{62}$度　行 62 日　行度－17 度

留　　　　　　10 日

顺行　日行$\frac{53}{92}$度　行 276 日　行度 159 度

+)————————————————————

(伏)　(一见)计 634 日　行度 301 度

伏行　日行$\frac{73}{92}$度　行 146 日 15689700 分　行度 114 度 8218005 分

("分"以见中日法 29867373 为分母)

+)————————————————————

(一见伏)　总 780 日 15689700 分　行度 415 度 8218005 分

平均日行度 $415\frac{8218005}{29867373}\div 780\frac{15689780}{29867373}=\frac{1240317780}{2331224064}=\frac{7355}{13824}$度/日。所以,《三统历》"五步"说:"故曰:(火星)日行万三千八百二十四分度之七千三百五十五。"

(5)水星

晨始见(去日半次)

逆行　日行2度　行1日　行度－2度

留　　　　　　2日

顺行　日行$\frac{6}{7}$度　行7日　行度6度

顺行疾　日行$1\frac{1}{3}$度　行18日　行度24度

+)————————————————

(伏)　(一见)行28日　行度28度

伏行　日行$1\frac{7}{9}$度余　行37日122029605分　行度68度46610128分

+)————————————————

(晨见伏)行65日122029605分　行度96度46610128分

夕始见(去日半次)

顺行疾　日行$1\frac{1}{3}$度　行$16\frac{1}{2}$日　行度22度

顺行迟　日行$\frac{6}{7}$度　行7日　行度6度

留　　　　$1\frac{1}{2}$日

逆行　日行2度　行1日　行度－2度

+)————————————————

(伏)　(一见)行26日　行度26度

伏逆行　日行$\frac{4}{15}$度余　行24日　行度－6度58662820分

(“分”以见中日法134082297为分母)

+)————————————————

(夕见伏)　行50日　行度19度75419477分

水星一复(晨、夕见伏)经115日122029605分,行天115度122029605分(1度＝134082297分)。行日与天度相等,所以,《三统历》“五步”说:“故曰(水星)日行一度。”

二、统术

是主要利用前述“统母”进行的各项计算，包括对朔、气、闰、食，以及星、月加时，五行配历等杂项的计算。

“历术甲子篇”计算的始点是太初元年岁首，三统历有所不同，另外确立了一个“太极上元”，作为计算历法的始点。按清人李锐的说法，此点下距太初元年 23639040 岁[①]，头年十一月甲子朔旦冬至，岁星在婺女 6 度，年名丙子[②]。算法如下：

1. 推算正朔

(1)先推所求年入于某元、某统的第几年，由于任何一元、一统的首年年名都是可以推知的，由入统年数很容易就能求出所求年的年名。入元、统年数求法：

$$\frac{\text{所求年距太极上元年数(不包括所求年)}}{\text{元法}}=A\,\frac{a}{\text{元法}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.5)$$

其中 A、a 都是正整数或零，且 $0\leqslant a<$元法。由上式所得，知所求年入于上元后第$(A+1)$元的第$(a+1)$年。

若 $a<$统法，所求年入于$(A+1)$元的天统（统首日名甲子，因又名“甲子统”）第 $a+1$ 年。

若统法$\leqslant a<2$ 倍统法，入于地统（统首日名甲辰，因又名“甲辰统”）第〔$(a-$统法$)+1$〕年。

若 2 倍统法$\leqslant a<3$ 倍统法，入于人统（统首日名甲申，因又名“甲申统”）第〔$(a-2$ 倍统法$)+1$〕年。

知道元首、统首年名和入统年数，所求年的年名就能从甲子表（见表 1.3）中查出来。

每元年数(4617)与 1 甲子(60)的最小公倍数是 4617×20(年)。每 20 元，年名一复（重复一遍），因此，上表只计算了 20 元的元首年名。

① 见《李氏算学遗书》。

② 太初历以此年为“甲寅”，三统历以为“丙子”，四分历以为“丁丑”。“甲寅”是太初改历诏书中硬性规定的年名；“丙子”系由“超辰法”算得；“丁丑”则是由以往年名顺数而得，“丁丑”为是。见《后汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 3036 页。

又“太极上元”至太初元年 23639040 岁，合 5120 元，恰是 20 的整数倍，所以，利用(2.5)式计算时，所求年距始点年数不必自太极上元起算，只须从太初元年(公元前 104 年)起算则可。而《汉书·律历志》说三统历上元至太初元年 143127 岁[1]，合 31 元。太初元年年名丙子，“上元”年名必非丙子。《开元占经》以为上元年名庚戌[2]，从表 2.2 可见，元首年名中无“庚戌”名，《后汉书》说是由于计人超辰法多出的年名造成的。那么，143127 年合超 33.9 辰，自丙子后数 34 位，第 35 号恰为“庚戌”。这些且不必管它，利用(2.5)式求年名时，只须自太初元年起算，而太初元年的年名是丙子。在所求年距太初元年不太远的情况下，就不致

表 2.2　元、统首年名表

元序数	1			2			3			4			5		
元首年名	丙子			癸酉			庚午			丁卯			甲子		
天、地、人统首年名	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人
	丙子	乙卯	甲午	癸酉	壬子	辛卯	庚午	己酉	戊子	丁卯	丙午	乙酉	甲子	癸卯	壬午
元序数	6			7			8			9			10		
元首年名	辛酉			戊午			乙卯			壬子			己酉		
天、地、人统首年名	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人
	辛酉	庚子	己卯	戊午	丁酉	丙子	乙卯	甲午	癸酉	壬子	辛卯	庚午	己酉	戊子	丁卯
元序数	11			12			13			14			15		
元首年名	丙午			癸卯			庚子			丁酉			甲午		
天、地、人统首年名	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人
	丙午	乙酉	甲子	癸卯	壬午	辛酉	庚子	己卯	戊午	丁酉	丙子	乙卯	甲午	癸酉	壬子
元序数	16			17			18			19			20		
元首年名	辛卯			戊子			乙酉			壬午			己卯		
天、地、人统首年名	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人	天	地	人
	辛卯	庚午	己酉	戊子	丁卯	丙午	乙酉	甲子	癸卯	壬午	辛酉	庚子	己卯	戊午	丁酉

① 见《汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 1023 页。

② 见《四库全书》影印本第 807 册，第 944 页。

有误。

以太始三年(公元前 94 年)为例,自太初元年至太始三年共 10 年(不包括太始三年),代入(2.5)式得:

$A=0, a=10$。即太始三年入于元后天统第 11 年。从甲子表查得,该年年名丙戌。

(2)“推天正”。按文意,此段是推算所求年天正月(头年十一月)以前的积月数,由此判定所求年有无闰月。推算公式是:

$$\frac{\text{入统岁数}\times\text{章月}}{\text{章岁}}=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}} \quad\cdots\cdots (2.6)$$

此式本身的意义是很明显的:每 19 年(1 个章岁)中有 235 个月(名为章月),入统年数中含有几个章岁,也就具备了几个章月数。所以,入统岁数要除以章岁,乘上章月,得到入统以来的积月数。问题是为何求入统以来的积月数,而不是其他积月。这是由于此处所求积月有两项用途:一是判定闰月,二是判定月朔积日,这两项用途入统岁的“积月”数都能满足要求。

判定所求年有无闰月,《律历志》说由(2.6)式中“闰余”大小来决定,“闰余十二以上,岁有闰”,否则无闰。原因是,三统历每年有 $12\frac{7}{19}$ 个月,平年编入 12 个月后,有余分 7 分。当头年积月余分(闰余)大于 12 时,加上本年所余 7 分,数满章岁(19),该年就可以设 13 个月,即设 1 个闰月,否则不能设闰。把由(2.6)式算得的积月余分称之为“闰余”,原因正在于此。

旧历有“三正”的说法:以冬至所在月(十一月)为正月的,称为天正;以十二月(腊月)为正月者,称为地正;以一月为正月者,为人正。公式(2.6)所得,为所求年天正月以前的积月。若求地正历的积月,天正月(十一月)也包括在积月之内,所以应是“加积月一”;同样的道理,求人正历的积月应该是积月“加二”。

(3)“推正月朔”。即推算所求年天正月朔日的日名。由于统首日名是已知的,算出入统日数即可,《律历志》所给公式是:

$$\begin{cases} \frac{积月 \times 月法}{日法} = 积日\frac{小余}{日法} & \cdots\cdots (2.7) \\ 积日 - 60a = 大余 & \cdots\cdots (2.8) \end{cases}$$

(2.8)式中的 a 是个任意给定的自然数或零，对它的限制是，必须使式中的大余满足下式：

$0 \leqslant 大余 < 60$

(2.7)式的意义是十分明显的：欲知所求年天正月朔以前的积日总数，只要把积月总数乘以每月天数(一个朔望月的日数)即可。而 $\frac{月法}{日法}$ 正是朔望月日数的表示法，把上述过程一步步写出来就是：

$$积日总数 = 积月 \times 每月日数 = 积月 \times 29\frac{43}{81} = 积月 \times \frac{2392}{81}$$

$$= 积月 \times \frac{月法}{日法} = \frac{积月 \times 月法}{日法} = 积日\frac{小余}{日法}$$

其中积日总数中的整数部分用积日表示，不足1日的畸零部分，叫做小余，分母是"日法"。由积日确定天正月朔日日名，小余归入下月，即归入所求年的天正月。由于天正月、本月有小余43分，加上积日小余，满81分，化为整日。当月(天正月)就应设30日，为大月，否则为小月。换句话说，只要积日小余满38分以上，加上天正月本身所有的43分，超过了81分，天正月就应设为大月。相反，小余不满38分为小月。

由(2.7)式算得的积日是自统首日到所求年天正月朔日以前的积日，已知统首日的日名，天正月朔的日名就能从甲子表中查出。同样，由于甲子日名60日为1周，为简便计，积日数中满60(1甲子之数)则除去之，剩余的不满60的部分名为大余。大余算外1日的日名就是所求年天正月朔日名，这就是(2.8)式的意义所在。由于每月 $29\frac{43}{81}$ 日，求下月日名时只要把大余加29，小余加43。加后小余满81分为整日，归入大余，为大月；不满81分，为小月。加后大余满60，则除去之，由余数(不满60的部分)从甲子表中查得下月朔日名。大余再加29，小余再加43，可求得下下月的大、小月和月朔日名……这样进行下去，全年每个月的大、小月和月朔日名均可求出。那么，全年每天的日名也就是确定的了(都能由甲子表查得)。

旧历每过半月的日子为望日，$\frac{1}{4}$月的日子为弦日。望前为上弦，望后为下弦。$\frac{1}{4}$月$=7\frac{31}{81}$日，所以积日大余加7，小余加31分。加后小余满81分，化为整日入大余。大余算外为上弦日的日名，再加得望日名，三加得下弦日日名，四加得下月朔。

2. 推闰月位置

可以像太初历那样先求冬至大、小余，得所求年冬至的日名，再与当年天正月（十一月）朔的日名比较，确定冬至在十一月某日，依次求得各气日名和日序号。某月无中气就是闰月。三统历采用另一种计算法：前已算得入统年所含的积月和闰余，由闰余可直接确定闰月所在。前已说到待求年本身有月余7分（分母是19），将此数均入12个月中，每月有余分$\frac{7}{12\times19}$。与头年剩余的积月余分（闰余）相加，大于或等于1，下月设闰。小于1，则再加上一个月的闰余$\frac{7}{12\times19}$，得数大于或等于1，本月后设一个闰月。小于1，再加……如此进行下去，设至第N月大于或等于1：

$$\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}}+\underbrace{\frac{7}{12\times19}+\frac{7}{12\times19}+\cdots\cdots}_{N\text{项}}\geqslant1$$

$$\text{化简为，}\frac{\text{闰余}\times12+7N}{\text{章中}}\geqslant1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.9)$$

则第N月为闰（自冬至所在月起算）。确定闰月后，仍以中气有无检验之，某月中气在朔或初二日，则前月无中气，设为闰月。

3. 推气至日名

(1)推所求年冬至日名。

求法与“历术甲子篇”相同，也是先求冬至大、小余，由大余定日名。

1个回归年（自冬至到冬至）$=365\frac{385}{1539}$日，除去6甲子（360日）余$5\frac{385}{1539}$日$=\frac{8080}{1539}$日，其中8080名为策余。以入统年数乘此数，除以1539（统法），所得整数部分为冬至前的积日。满60日除去之，剩余的名

为冬至大余；分数部分不是1日，分子为小余。由统首冬至日名起算，大余之外第一日就是所求年冬至日名。计算公式是：

$$\begin{cases}\dfrac{\text{入统岁数}\times\text{策余}}{\text{统法}}=\text{积日}\dfrac{\text{小余}}{\text{统法}} & \cdots\cdots(2.10)\\ \text{积日}-60a=\text{大余} & \cdots\cdots(2.11)\end{cases}$$

与前(2.8)式一样，(2.11)式中的 a 是个任选数，条件是使 0≤大余<60。大余自所入统统首日名起算，算外为所求年天正冬至日名。统首日名可查表而得，《律历志》给出了一元、三统、每统统首，以至每统八十一章、各章章首的日名表。参见表2.6。

(2)推算八节(四立与二至、二分合称八节)日名。

每节日数：全年日数÷8=$365\dfrac{385}{1539}\div 8=45\dfrac{1010}{1539}$日。冬至大、小余逐次加此数得八节大、小余，即

$$\begin{cases}\text{冬至大余}+45m=\text{八节大余} & \cdots\cdots(2.12)\\ \text{冬至小余}+1010m=\text{八节小余} & \cdots\cdots(2.13)\end{cases}$$

m 为八节序号，如立春 $m=1$，春分 $m=2$……八节大余满60除去之，小余满统法(1539)化为整日入大余。大余自统首日起算，算外为该节日名。

(3)推二十四节气所在日名。

每气日数：全年日数÷24=$365\dfrac{385}{1539}\div 24=15\dfrac{1010}{1539\times 3}$日，为了能与(2.10)式算得的冬至小余相加，将冬至小余分子、分母同乘3，仿上式得：

$$\begin{cases}\text{冬至大余}+15n=\text{二十四气大余} & \cdots\cdots(2.14)\\ \text{冬至小余}\times 3+1010n=\text{二十四气小余} & \cdots\cdots(2.15)\end{cases}$$

n 为二十四气序数，如小寒 $n=1$，大寒 $n=2$，立春 $n=3$……大余满60除去之，小余满元法(1539×3)化为日入大余。

仍以太始三年为例，它距太初元年只有10年，小于统法，知此年入于第1元天统第11年。算外为10年(不包括太始三年)，由(2.6)式算得积月为：$\dfrac{\text{入统年数}}{\text{章法}}\times\text{章月}=\dfrac{10\times 235}{19}=123\dfrac{13}{19}$。123为积月，13为闰

余。闰余大于 12 分，知太始三年有闰月。

再由(2.7)、(2.8)计算太始三年前的积日：

$$\frac{\text{积月}\times\text{月法}}{\text{日法}}=\frac{123\times2392}{81}=3632\frac{24}{81}$$

3632 为积日，满 60 除去之，除去 60 甲子余 32 日为大余，24 为小余。

统首日名甲子，后数第 33 位丙申为太始三年天正月朔日名。

小余(24)不满 38，天正月为小月。

大余加 7 得 39(32+7=39)，小余加 31 得 55(24+31=55)。

自甲子后数 39 日，第 40 日癸卯为天正月上弦日。因月朔为丙申，癸卯为本月初八日。上弦大余再加 7(39+7=46)，小余再加 31(55+31=86)。所得小余大于 81，除去 81 分为 1 整日，归入大余，得大余 47，小余 5。由甲子表查得第 48 日辛亥为该月望日，日序数为 16 日；大余再加 7，小余加 31，得本月下弦日名戊午，日序为 23 日。

由天正月朔大、小余计算下月(天正二月，即夏历十二月)朔日名法：大余 32 加 29 得 61，除去 1 甲子 60 日，余 1；小余 24 加 43 得 67，分别为下月朔大、小余。由大余 1，算外乙丑为下月朔日名(也可由月下弦日大余加 7，小余加 31 求得)。再由月朔大、小余求弦望，同上月法。这样，可得到太始三年每月大小、弦望日名以及每天的日名，见表 2.3。

按前述推算闰月的公式(2.9)，确定太始三年闰月位置，前已求得闰余为 13，代入(2.9)式：

$$\frac{7N+13\times12}{228}\geqslant1$$

求得 $N\geqslant10\frac{2}{7}$，取 $N=11$，即自天正月起始的第 11 个月(寅正九月)可能是闰月。究竟闰还是不闰，可通过计算该月节气位置来确定，有节气、无中气者设为闰月，否则不闰。本例中，寅正九月后 1 月有节气(立冬，在该月十六日)，无中气(中气小雪在下月初二日)，所以将该月定为闰月，名“闰九月”(见表 2.3)。

下边计算太始三年的二十四节气，先算冬至：

由公式(2.10)，$\frac{\text{入统岁数}\times\text{策余}}{\text{统法}}=\frac{10\times8080}{1539}=52\frac{772}{1539}$

表 2.3 太始三

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
十一小月	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚子	辛丑*	壬寅	癸卯◡	甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌
十二大月	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未*	壬申	癸酉◡	甲戌	乙亥	丙子	丁丑	戊寅	己卯
正小月	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚子	辛丑	壬寅*◡	癸卯	甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉
二大月	甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未	壬申*◡	癸酉	甲戌	乙亥	丙子	丁丑	戊寅
三小月	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚了	辛丑◡	壬寅	癸卯*	甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申
四大月	癸亥	甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未◡	壬申	癸酉*	甲戌	乙亥	丙子	丁丑
五大月	癸巳	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚子◡	辛丑	壬寅	癸卯*	甲辰	乙巳	丙午	丁未
六小月	癸亥	甲子	乙丑	丙辰	丁卯	戊辰	己巳	庚午◡	辛未	壬申	癸酉	甲戌*	乙亥	丙子	丁丑○
七大月	壬辰	癸巳	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥◡	庚子	辛丑	壬寅	癸卯	甲辰*	乙巳	丙午
八小月	壬戌	癸亥	甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳◡	庚午	辛未	壬申	癸酉	甲戌	乙亥*	丙子○
九大月	辛卯	壬辰	癸巳	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌◡	己亥	庚子	辛丑	壬寅	癸卯	甲辰	乙巳*
闰九小月	辛酉	壬戌	癸亥	甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰◡	己巳	庚午	辛未	壬申	癸酉	甲戌	乙亥○
十大月	庚寅	辛卯△	壬辰	癸巳	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌◡	己亥	庚子	辛丑	壬寅	癸卯	甲辰

△：中气　*：节气　◡：上弦　◠：下弦　○：望

年历日表

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
辛亥○	壬子	癸丑	甲寅	乙卯	丙辰△	丁巳	戊午⌓	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥	甲子	
庚辰○	辛巳	壬午	癸未	甲申	乙酉	丙戌△	丁亥⌓	戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳	甲午
庚戌○	辛亥	壬子	癸丑	甲寅	乙卯	丙辰	丁巳△⌓	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥	
己卯○	庚辰	辛巳	壬午	癸未	甲申	乙酉	丙戌	丁亥△⌓	戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳
己酉○	庚戌	辛亥	壬子	癸丑	甲寅	乙卯	丙辰⌓	丁巳	戊午△	己未	庚申	辛酉	壬戌	
戊寅○	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未	甲申	乙酉	丙戌⌓	丁亥	戊子△	己丑	庚寅	辛卯	壬辰
戊申○	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑	甲寅	乙卯⌓	丙辰	丁巳	戊午	己未△	庚申	辛酉	壬戌
戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未	甲申	乙酉⌓	丙戌	丁亥	戊子	己丑△	庚寅	辛卯	
丁未○	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑	甲寅⌓	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申△	辛酉
丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未	甲申⌓	乙酉	丙戌	丁亥	戊子	己丑	庚寅△	
丙午○	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑⌓	甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申△
丙子*	丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未⌓	甲申	乙酉	丙戌	丁亥	戊子	己丑	
乙巳○	丙午*	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子⌓	癸丑	甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未

52 为大余，772 为小余。从甲子表上查出统首年冬至(甲子)以后 52 位之外的干支丙辰，就是太始三年的冬至日名。

由于每节气 $15\frac{1010}{4617}$日，把上面算得的小余乘以 3 得 2316，分母(统法)也乘 3 化为元法，每气日数中的整日和余分就能直接与大、小余相加求得下一节气小寒的大、小余了。

大余 52＋15＝67，除去 1 甲子余 7，为小寒节气大余；

小余 2316＋1010＝3326，为小寒节气小余。

由大余 7 查甲子表，算外得小寒日名辛未。已知该月日名乙丑(前面计算所得)，辛未为该月(十二月)初七日。

由小寒大、小余分别加 15 和 1010，得大寒大、小余 22 和 4336。由大余 22 查得大寒日名丙戌，为该月二十二日。

大寒大、小余分别加 15 和 1010 得立春大、小余为 37 和 5346，小余 5346 大于元法，除去 1 元之数 4617 为 1 整日，归入大余，大余变成了 38，小余尚有 729。由大余 38 查得立春日名壬寅，是正月初八日。

立春大、小余分别加 15 和 1010，可得雨水大、小余……如此进行下去，当年二十四节气均可求得(见表 2.3)。

4. 推五行配历

三统历把一年 $365\frac{385}{1539}$日划分为木、火、土、金、水五部分，以适应推算运气等特殊需要。分法是把一年日数均分为 5 份，每行得 1 份，为 $73\frac{77}{1539}$日。通常把春、夏、秋、冬四季分属木、火、金、水，而土无所属。每季 3 月，合 $91\frac{481}{1539}$日。每行只得 $73\frac{77}{1539}$日，差 $18\frac{404}{1539}$日不足一季。因此把每季余下的 $18\frac{404}{1539}$日归属于土，四季余数合起来也是 $73\frac{77}{1539}$日。

这样得到三统历的五行分法：春、夏、秋、冬四季每季的前 $73\frac{77}{1539}$日，分别属于木、火、金、水，每季剩余的 $18\frac{404}{1539}$日都属土。这种分法称为“土王四季”。

冬至到立春含三气 $45\frac{1010}{1539}$日，末 $18\frac{404}{1539}$日属土，余 $27\frac{606}{1539}$日，《三统历》说"冬至后中央二十七日六百六分"，意思就是：冬至后距土王日尚有 $27\frac{606}{1539}$日。

5. 推算日、月行度及加时

(1)推算天正月合朔时日、月所在的星度，《三统历》说是"合晨所在星('晨'同'辰')"。已知日每天行 1 度，合朔时日、月同度。所以，自始点到所求天正月朔以前的积日数就是日、月行总度数。如果知道始点时日、月的位置和各星宿间的距度数，就能算出合朔时日、月在某星、某度。

由前(2.7)式算得的积日是：积日$\frac{小余}{日法}$。

从中除去周天全度数，剩余的不是全度的部分是日月行总度数，即：

$$积日\frac{小余}{日法}-m\cdot 365\frac{385}{1539}=\frac{积日\times 日法+小余}{日法}-\frac{周天全度\cdot m}{统法}$$

$$=\frac{积日\times 统法+小余\times 19-周天度\cdot m}{统法}$$

$$=合晨度\frac{小余}{日法}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2.16)$$

适当选择 m 值，使 0≤方程左端分子<周天度，即使 $\frac{积日\times 统法+小余\times 19}{周天度}-1<m\leqslant\frac{积日\times 统法+小余\times 19}{周天度}$。

三统历始点，日月在牵牛初度，二十八宿各星宿的星度见本章表 2.5。

由合晨度历减牵牛初度以后各星矩度，至不能再减，就得到了合晨所在星度。仍以太始三年为例，前已算得积日为 3632，小余 24。代入(2.16)式：

$$\frac{3632\times 1539+24\times 19-562120m}{1539}=\frac{5590104-562120m}{1539}$$

取 $m=9$，得$\frac{531024}{1539}=345\frac{69}{1539}\doteq 345$ 度 2 分 41 秒(每度 60 分，每分 60

秒)。

从牵牛初度起算,以 345 度 2 分 41 秒减牵牛以后各星距度,至箕宿末,共减 339 度,余 6 度 2 分 41 秒。再减斗宿 26 度余,不够减,知入于斗宿 6 度 2 分 41 秒。即太始三年天正月朔,日月合晨在斗宿 6 度 2 分 41 秒。

(2)求天正月朔日夜半,日所在星度。由(2.16)式已算得天正月合朔时日所在度分(其中"分"是不满 1 度的畸零数,与夜半位置无关),(2.7)式算得的是合朔时的积日和小余数。由于积日必到夜半为止,积日小余必是合朔到夜半间的日分数。由于日每天行 1 度,日分数就是度分数。因是由积月求得,《律历志》称为"月小余"。只要用合朔时的行度分(合晨度分)减此数,就得到了夜半时日所在度了。惟合晨度分分母是统法,须将分母化同:

$$合晨度\frac{小余}{统法}-\frac{月小余}{日法}=合晨度\frac{小余}{统法}-\frac{月小余\times章岁}{统法} \quad\cdots\cdots\cdots (2.17)$$

《汉书·律历志》叙述此式说:"以章岁乘月小余,以减合晨度。小余不足者,破全度。"

"合晨度"是指(2.16)式中算得的日行总度分数,如(2.17)式左边第一项那样,既包括整度〔(2.16)式中名为"合晨度"〕,也包括畸零分"小余"。若单指(2.16)式中的"合晨度"(整度数),后面说的"小余不足者"就无从说起。所谓"小余不足者,破全度","小余"必是指合晨度小余,"不足"是指用它减"月小余乘章岁"而不够减,"破全度"是指从"合晨度"中取出 1 度,化为 1539 分,并入小余,而后再减。

由前面的计算,太始三年合晨度的畸零数是 69(合晨度 $345\frac{69}{1539}$),月小余 24,月小余乘章岁($24\times19=456$)大于合晨度的畸零数,需要"破全度",破 1 度化为 1539 分,算得:

$$合晨度\frac{小余}{统法}-\frac{月小余\times章岁}{统法}=345\frac{69}{1539}-\frac{456}{1539}=344\frac{1152}{1539}度$$

夜半度数为 344 度 1152 分(每度 1539 分),约合 344 度 44 分 55 秒。入斗宿 5 度 44 分 55 秒。

(3)推算天正月朔日夜半,月所在星度。因合朔时日月同度,前面

说，由(2.7)式计算出的不足1度的畸零数是合朔时刻到当日夜半时，日行的距离，合晨星度减此数就是夜半时，日所在星度。倘若知道日、月速度的比率，算出合晨到夜半之间日行度数，乘上这个比率，就能得出月行度数。用合晨星度减此数，就是所求的夜半时月所在星度。

下边计算日、月速度比率。

月亮每个朔望月行天1周而重与日会，其间日自行 $29\frac{43}{81}$ 度。因此，月亮在每个朔望月中的实际行度是：1周天 $+29\frac{43}{81}$ 度 $=365\frac{385}{1539}+29\frac{43}{81}$ 度。月日行速比是：

$$\frac{365\frac{385}{1539}+29\frac{43}{81}\text{度}}{29\frac{43}{81}\text{日}}=\frac{\frac{562120}{1539}}{\frac{2392}{81}}+1=\frac{\frac{\text{周天}}{\text{统法}}}{\frac{\text{月法}}{\text{日法}}}+1=\frac{\text{周天}\times\text{日法}}{\text{统法}\times\text{月法}}+1$$

$$=\frac{\text{章月}\times\text{月法}\times\text{日法}}{\text{章岁}\times\text{日法}\times\text{月法}}+1=\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}+1=\frac{\text{章月}+\text{章岁}}{\text{章岁}}=\frac{\text{月周}}{\text{章岁}}$$

三统历把章月＋章岁叫做月周。意义是在一章岁(19年)中，月亮绕天运行的周数。把月周＝254，章岁＝19，代入上式，得月速 $=13\frac{7}{19}$ 度/日，(因日速是每天行1度)，月日速度比率是 $13\frac{7}{19}$。用(2.17)式计算月亮所在星度时，(2.17)式应化为：

$$\text{合晨度}\frac{\text{小余}}{\text{统法}}-\frac{\text{月小余}\times\text{章岁}}{\text{统法}}\times\text{月日速度比率}=\text{合晨度}\frac{\text{小余}}{\text{统法}}-\frac{\text{月小余}\times\text{章岁}}{\text{统法}}\times\frac{\text{月周}}{\text{章岁}}=\text{合晨度}\frac{\text{小余}}{\text{统法}}-\frac{\text{月小余}\times\text{月周}}{\text{统法}}\quad\cdots\cdots\quad(2.18)$$

《律历志》“统术”记此公式是“以月周乘月小余，盈统法得一度，以减合晨度”。与对公式(2.17)的记述比较，若采用相同的格式，可省去“盈统法得一度”数字，而于“减合晨度”后应增“小余不足者，破全度”。所以三统历对(2.17)、(2.18)两式的记述文字虽不同，含意是相同的。

(4)计算合朔的时刻，由(2.7)式算得的积日确定朔在某日，积日小余是不足1日的部分，由它就能确定合朔的时刻。

$\frac{小余}{日法}$是积日所余，表示余数是 1 日的几分之几。而 1 日分十二辰，把余数化为辰数即得：

$$\frac{小余}{日法}\times 12=\frac{小余\times 12}{日法}=辰次\frac{辰余}{日法} \quad \cdots\cdots (2.19)$$

三统历给出的公式"以 12 乘小余为实，各盈分母为法，数起于子，算外则所加辰也"。正是(2.19)式。在太始三年例中，小余 24，日法 81，代入(2.19)式得$\frac{24\times 12}{81}=3\frac{5}{9}$(辰)＝3 时 4 刻 37 分 47 秒(1 日＝100 刻，1 刻＝60 分，1 分＝60 秒)。算外为合朔时刻，所以，合朔发生在卯正正刻 17 分 47 秒(1 时＝8 刻 20 分，分为初、正两时段，每段 4 刻 10 分。去卯初 4 刻 10 分，余 27 分 47 秒入卯正初刻，过 10 分入卯正正刻。总入卯正正刻 17 分 47 秒)，相当于今日的早晨 7 点 6 分 40 秒。

6. 计算月食

三统历采用的交会周期是 $5\frac{20}{23}$月＝$\frac{135}{23}$月，即每 135 月发生 23 次交会。交会才有月食。将月周期化为年周期，先求 135 月与章月 235 的最小公倍数，为 6345 月，合 513 年。三统历把 513 年叫做"会岁"，6345 月叫做"会月"，135 叫做"朔望之会"。这些参数实质都是月食的周期。

由此得月食求法，由入统岁数满 513 岁的周期就除去之，剩余的不满 513 岁的年数称为"会余岁"，把它换算为月($12\frac{7}{19}$月/岁)，再与$\frac{135}{23}$月/食的周期比较，满一食则除去之，不足一食的月数与每食$\frac{135}{23}$月相比，差数就是再过多少月发生月食。

由于会余岁要换算成月，不必由入统岁数算会余岁，可直接由(2.6)式算得的积月，满会月则除去之，剩余的不满会月的部分与 135 月的周期比较，得：

$$\begin{cases} 积月-m\cdot 会月=会余岁积月 & \cdots\cdots (2.20) \\ \frac{会余岁积月\times 23}{135}=食次\frac{次余}{135} & \cdots\cdots (2.21) \\ \frac{135-次余}{23}=差月\frac{月余}{23} & \cdots\cdots (2.22) \end{cases}$$

(2.20)式中的 m 是个待定自然数或零，限定条件是使 0≤会余岁积月<会月。(2.21)式中的"食次"是入统后的已食次数，"次余"是不足一食部分。(2.22)式中"差月"是指入统岁数之外，尚差多少月再食(自天正月起算)。食期为差月算外月的望日。食时日月相冲(行度相差半周天)，由此可算出月食时刻。

例：太始三年入统年数 10，积月 123。积月小于会月，可将此数作为会余岁积月，代入(2.21)、(2.22)式：$\frac{123\times 23}{135}=20\frac{129}{135}$，$\frac{135-129}{23}=\frac{6}{23}$。过$\frac{6}{23}$月有月食，即太始三年天正月有月食(算时刻略)。

综前所述，由回归年、朔望月的大小，可以算出每一年的年名，月朔和弦、望日的日名，大月还是小月，冬至等二十四节气的日名，有无闰月及闰月的位置，全年中四季的五行属性，合朔时的日月星度和时刻。配合月食周期，还能算出月食发生的月日时刻，三统历一一给出了计算公式。

三、纪术

以"纪母"中的参数推算五星见复(出现和隐没为"见复"。"见"同"现"，"复"同"全军覆没"之"覆")的方法，名为纪术。其中也有"推至日"、"推朔日"等名目，看似与"统术"中的相应部分内容相同，其实不同，"纪术"中的所有推算都与五星见复有关，"推至日"是推五星初见与至日之间的距离，"推朔日"是计算五星初见与朔日间的距离等。

1. 推所求年前，行星末见于何年

《律历志》说是"推五星见复"。

已知行星出现的周期(岁数)和见数，自太极上元以来到所求年，星见总数的求法是：

$$\frac{\text{太极上元以来年数}\times\text{见复数}}{\text{岁数}}=\text{定见复数}\frac{\text{见复余}}{\text{岁数}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2.23)$$

式中"定见复数"为太极上元以来至所求年间(包括所求年)的星见次数，"见复余"为不足 1 见的畸零数。五星之中，金、水二星的见数称为

“复数”，其余三星皆名“见数”，“见复数”通指二数，“见复余”亦通指二数之余。

由于$\frac{见复数}{岁数}$是行星每年出现的平均见分数(《律历志》称分子为“大统见复数”，是以行星岁数为“统法”，大于“统母”中的“统法”，因称“大统”)。若(2.23)式中的见复余小于见复数，行星最后一次出现后的余分还没有该行星在一年中的平均见分数大，最后一次出现必在所求年之内。若见复数＜见复余＜2×见复数，最后一次出现后的余分比该星1年的平均见分大，而不足2年的见分，最后一见当在所求年前1年。同样，若2倍见复数＜见复余＜3倍见复数，最后一次必在所求年前2年。余类推。

(2.23)式中的太极上元是指五星的共同始点，即，由五星大周期求得它们的最小公倍数是138240年，太极上元应是这个周期的始点。但究竟是那一年，不得而知。《三统历·世经》中说“上元至伐纣之岁，十四万二千一百九岁”，此数大于五星周期，从中减五星周期得3869年，五星上元应在伐纣之前3869年。但是每经1个周期，五星运行的情形重复出现，所以，不必从中减去138240年，多算1个周期于历日现象并无妨碍，上元仍取距伐纣142109年，加上伐纣到太初元年的年数为143127年，直接以此数入算。

如太始三年距太初元年11年(包括太始三年在内)，距太极上元为143127＋11＝143138年。求木星最后一见，将此数以及木星岁数和见数一起代入(2.23)式得：

$$\frac{143138}{1728}\times 1583=131126\,\frac{1726}{1728}$$

余数1726大于见数1583，小于见数的2倍，所以木星的末次出现在太始三年的头一年，即在太始二年。

2. 推行星末见中气与星次

《律历志》提供的公式是：

$$第一步：\frac{见中分\times 定见复数}{见中法}=积中\frac{中余}{见中法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.24)$$

$$第二步，\frac{积中}{元中}=倍数\frac{中元余}{元中} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.25)$$

第三步，$\frac{\text{中元余}}{\text{章中}}=(\text{倍数})_1\frac{\text{入章中数}}{\text{章中}}$ ························ (2.26)

第四步，$\frac{\text{入章中数}}{12}=(\text{倍数})_2\frac{\text{星见中次}}{12}$ ························ (2.27)

"定见复数"是自太极上元以来到行星最末一次出现之间该行星已经出现过的总次数，"见中法"是在行星一个大周期（行星岁数）之间行星出现的次数，两者相除，得数表示自太极上元以来到该行星末次出现之间，共有几个大周期。再乘"见中分"（行星一大周期内的中气数），得到的是自太极上元以来到行星末次出现之间的中气总数，因此名为"积中"。第二步把积中除以元中，第三步余数除以章中，第四步除以1年的中气数（12），是为了从积中之中，分别除去1元、1章以至1年的中气数，最后所余（"星见中次"）为"定见复数"之中最后出现的不满1年的中气数，算外，是行星末次出现（属于"见复余"的那次出见）于该年内的中气数。《律历志》说是："中数从冬至起，次数从星纪起，算外则星所见中次也。"由于太阳每岁行1周天，每中气行天1次，行星出现时所在中气数与太阳所在的星次数是相同的。而行星始见时均距日半次（参见三统历"五步"），即行星始见时与日处于同次之中，所以，行星出见的星次数与所在中气数相同。

在太始三年例中，前已算得定见复数为131126，按前述的四步求法：

第一步，$\frac{20736\times131126}{1583}=1717642\frac{1450}{1583}$（1717642为积中，1450为中余）；

第二步，$\frac{1717642}{55404}=31\frac{118}{55404}$（118为中元余）；

第三步，$\frac{118}{228}$不够除，知118也是"入章中气"数；

第四步，$\frac{118}{12}=9\frac{10}{12}$，"星见中次"为10，星末见在入章后第10年（太始二年）的第11个中气霜降内，此时木星所在星次为自星纪开始的第11次大火之内。

还有比三统历的"四步法"更简单的方法，可直接由见复余求得。前

已求得太始三年的见复余为1726，不足一见的部分为$\frac{1726}{岁数}$，已知每见年数为$\frac{岁数}{见数}$，那么不足一见的部分折合年数为：

$$\frac{岁数}{见数}\times\frac{1726}{岁数}=\frac{1726}{见数}=\frac{1726}{1583}=1\frac{143}{1583}年$$

意思是末见在所求年前1年的$\frac{143}{1583}$年，将它化为中气（每年12个中气，乘12即得）：

$$\frac{143}{1583}\times 12=\frac{1716}{1583}=1\frac{133}{1583}$$

表示末见在头1年的倒数第二个（顺数第11个）中气，末见中气数，也是星次数。

3. 推行星末见月

前文推算出行星末见在某年以及在该年的第几个中气，此处推算末见在该年的第几个月。月序数与中气序数的异同取决于该年有无闰月。

三统历给出的公式也作四步：

第一步，$\frac{见闰分\times定见复数+章岁\times中余}{见月法}+积中=积月\frac{月余}{见月法}$ ………………………………………… (2.28)

第二步，$\frac{积月}{元月}=倍数\frac{月元余}{元月}$ ………………………………… (2.29)

第三步，$\frac{月元余}{章月}=(倍数)_1\frac{入章月数}{章月}$ ……………………… (2.30)

第四步，入章月数－逐年月数＝星末见在所在年内月数 …… (2.31)

入章后“逐年月数”有平、闰之别，平年减12，闰年减13。平、闰年判法见后。

其中第一步是求太极上元以来定见复数内包含的积月。由两部分构成：有中气月和无中气月（闰月）。前者就是由(2.24)式算得的积中（太极上元以来的中气总数，不是“纪母”中的“积中”）和中余。后者可以这样算得：以行星一周的闰月数（$\frac{见闰分}{19}$），乘以太极上元以来的行星

周数，即：$\frac{\text{见闰分}}{19}\times\frac{\text{定见复数}}{\text{见数}}=\frac{\text{见闰分}\times\text{定见复数}}{\text{见月法}}$。由第(2.24)式可知，中余化为月是$\frac{\text{中余}}{\text{见中法}}$。所求的积月就是：

$$\frac{\text{见闰分}\times\text{定见复数}}{\text{见月法}}+\frac{\text{中余}}{\text{见中法}}+\text{积中}$$
$$=\frac{\text{见闰分}\times\text{定见复数}+\text{中余}\times\text{章法}}{\text{见月法}}+\text{积中}$$

《律历志》叙述上式说："以闰分乘定见复数……"[①] "闰分"为一年闰数，显系误文，上脱"见"字，宜补。

第二步、第三步均无须解释，惟中华书局1987年版《汉书·律历志》叙述第二步说："以元月除积月余，名日月元余。"[②] 与(2.29)式对照，知是"以元月除积月，余名日月之余"，点校误。又述第三步："以章月除月元余，则入章月数也。"[③] 与(2.30)式对照，知于"则"字前脱"余"字。

第四步当减12或者13，由平闰年确定。《律历志》说："以十二除(去)之，至有闰之岁，除十三入章。三岁一闰……"[④] 又是错点。"十三"后当用句号，"入章"二字入下句才对。一章之内每年月数，可由下法断定：因每年$12\frac{7}{19}$月，第一年只能取12个月为平年；头二年共有$12\frac{7}{19}\times2=24\frac{14}{19}$月，不足25月，除去第一年12个月，第二年也只有12个月；三年共有$37\frac{2}{19}$月，除去前2年24个月，余$13\frac{2}{19}$月，第三年应置闰月为13月……如此算下去，《律历志》说"三岁一闰(即第三年为13月)，六岁二闰(即第六年又有1个闰月)，九岁三闰，十一岁四闰，十四岁五闰，十七岁六闰，十九岁七闰"，意义同。

在太始三年的木星例中：

---

① 《汉书·律历志》，中华书局1987年版，第1003页。
② 同上。
③ 同上。
④ 同上。

第一步，$\frac{\text{见闰分}\times\text{定见复数}+\text{章岁}\times\text{中余}}{\text{见月法}}+\text{积中}$

$=\frac{12096\times131126+19\times1450}{30077}+1717642$

$=1770377\,\frac{17051}{30077}$（17051 为月余）；

第二步，$\frac{\text{积月}}{\text{元法}}=\frac{1770377}{57105}=31\,\frac{122}{57105}$（1770377 为积月，122 为月元余，小于章月）；第三步除章月不除，直接以 122 为入章月数；按第四步从入章月数中减 9 年 111 个月（有 3 个闰月），余 11 个月，算外第 12 月应是木星末见月。

"统术"节算得的太始三年算外（即到太始二年）的积月数是 123，此处算得的末见以前的积月数是 122，由此也能断定木星末见必在太始二年的最后一个月，即第 12 月。可是由前(2.24)～(2.27)式算得木星末见在第 11 个中气霜降之中，霜降为第 11 月（夏历九月）中气，可知此中气必在第 11 月～12 月之间，始于第 11 月，终于第 12 月，木星末见于 12 月内小雪前的几天中。

4. 推末见所在年冬至日名

《律历志》称为"推至日"。给出的公式是：

$$\frac{\text{中法}\times\text{中元余}}{\text{元法}}=\text{积日}\,\frac{\text{小余}}{\text{元法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.32)$$

(2.32)式左边写成$\frac{\text{中法}}{\text{元法}}\times$中元余的形式。已知每个中气的天数：$365\,\frac{385}{1539}\div12=\frac{562120}{1539\times12}=\frac{140530}{4617}=\frac{\text{中法}}{\text{元法}}$。中元余是入今元后的中气数。二者相乘显然是入今元后的总日数，所以称整数部分为积日，畸零部分为小余。

每个中气有$\frac{\text{中法}}{\text{元法}}$日$=\frac{140530}{4617}=30\,\frac{2020}{4617}$日，畸零部分要归入下一个中气。所以，任何一个中气积够小余 4617－2020＝2597 分，到下一个中气，加上它本身所有的 2020 分，大于或等于 4617 分，就置为 31 日，为大中。否则 30 日，不是大中。

(2.32)式中的“中元余”是自太极上元“尽所求年”之间年数除去岁数以后得到的入元中气数，所得“积日”为次年冬至前积日，从中除去若干甲子数后，算外是次年冬至日名。所以《律历志》说：“数除积日如法，算外则冬至也。”

将前面算得的太始三年例中的中元余 118 代入(2.32)式：$\frac{140530\times118}{4617}=\frac{16582540}{4617}=3591\,\frac{2893}{4617}$，其中 3591 为积日，除去 59 甲子余 51 日。算外第 52 日名乙卯，就是前面算得的第 11 个中气霜降所在日的日名，它在太始二年十一月之中。

《汉书·律历志》说“算外，则冬至也”，显然是错误的。(2.32)式中所用参数“中元余”是不足 1 元的中气数，由计算中元余的公式(2.25)可见，它是由“定见复数”求得的，所以是行星末见以前到元首之间的中气数，积日“算外”必是末见时(“见复余”之见)行星所在的中气。每见中气数与 1 年中气数不等，定见复数与年数不同步，末见可能在 1 年 12 个中气中的任何 1 个之内，不限定冬至。所以，《律历志》那句话中的“冬”字是衍文。

5. 推行星末见所在月朔日名

(2.29)式由积月算得的月元余，表示入元月数，乘每月的天数($29\,\frac{43}{81}$日)，得到入元以来的天数，算外就是所求朔日名。得如下计算公式：

$$月元余\times29\,\frac{43}{81}=\frac{月元余\times月法}{日法}=积日\,\frac{小余}{日法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.33)$$

《三统历》述此式说：“以月法乘月元余，盈日法得一，名曰积日，余名曰小余。”由于小余要归入下月(星末见所在月)，下月自有余分 43，若归入的小余大于 38 分，连同自身所有的 43 分，大于日法 81 分，该月可设为 30 日，是大月，小余不足 38 分，为小月。从积日除去若干甲子，算外为所求日名。

在太始三年例中，前已算得月元余为 122，代入(2.33)式：

$$\frac{122\times2392}{81}=3602\,\frac{62}{81}$$

积日 3602 除去 60 甲子，余 2，数起甲子，算外第三日名丙寅，就是所求的朔日名。前面求得的霜降日名乙卯，在十一月，乙卯后 12 日为丙寅，是十二月朔。霜降到小雪之间约 30 日余，由此知，木星再见于十二月朔以后的十八九天内。

6. 推行星末见所在中气日及星次度

《律历志》的计算公式是：

$$\frac{\text{中法}\times\text{中余}+\text{见中法}\times\text{小余}}{\text{见中日法}}=\text{入中日(度)数}\frac{\text{日(度)余}}{\text{见中日法}}\cdots\cdots\cdots \quad (2.34)$$

(2.34)式左端可作如下变换：$\dfrac{\text{中法}\times\text{中余}}{\text{见中日法}}+\dfrac{\text{见中法}\times\text{小余}}{\text{见中日法}}$

$$=\frac{\text{中法}\times\text{中余}}{\text{元法}\times\text{见中法}}+\frac{\text{见中法}\times\text{小余}}{\text{见中法}\times\text{元法}}$$

$$=\frac{\text{中法}}{\text{元法}}\times\frac{\text{中余}}{\text{见中法}}+\frac{\text{小余}}{\text{元法}}$$

本节 4 中已解释，$\dfrac{\text{中法}}{\text{元法}}$表示每一中气的日数；由(2.24)式知$\dfrac{\text{中余}}{\text{见中法}}$是定见复数内包含的中气余分。这两项相乘表示的是，定见复数包含的中气之中，于积中之外的畸零部分折合的天数。后一项$\dfrac{\text{小余}}{\text{元法}}$是由“中元余”按(2.32)式推算至日时得出的积日余分，即不足一整日的部分。如图 2.2：O 点为太极上元，D 为行星末见始点；OD 为定见复数，其中 OC 表示所含中气的整数部分，CD 表示中气余分；在中气整数 OC 之中，OA 为元中的整数倍，AC 为中元余；中元余化为积日后，AB 为整日数，BC 为不足 1 日的积日余分。与公式(2.34)对照，$CD=\dfrac{\text{中余}}{\text{见中法}}$，化为积日就是$\dfrac{\text{中法}\times\text{中余}}{\text{见中法}}$，$BC=\dfrac{\text{见中法}\times\text{小余}}{\text{见中日法}}$。因此，所求日数或度数就是图中 BD 的长度。

BD 包括两部分：CD 是行星末见处(D 点)入于该中气的日度数，另一部分 BC 是求“至日”时得到的积日余分。末见所在中气虽自 C 点始，中气所在日却是自 B 点始。所以，推算行星末见在中气的第几日必须自 B 点起算。

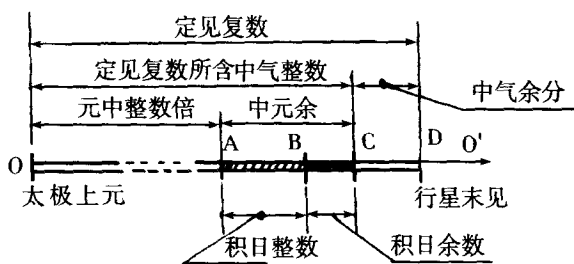



图 2.2　推入中次日度图

《律历志》说："中以至日数，次以次初数，算外则是所见及日所在度数也。""至日"如本节 4 所说"中气所始，称为至日"，非专指冬至、夏至。余不足论。

求夕见，《三统历》说"在日后十五度"。意思是，星夕见（昏见）所在度数是在日度后（日以东）15 度。这是一种规定，没有多少道理。人们规定某星夕见专指日没后（昏时），该星出现于距日半次（15 度）的天穹上的时刻。所以，知某星末见时日所在度，该星夕见的度数也就可知了。

7. 推行星末见于某月第几日

前文已推出行星末见于某月，此推末见于该月的哪一天。《律历志》的公式是：

$$\frac{\text{月法}\times\text{月余}+\text{见月法}\times\text{小余}}{\text{见月日法}}=\text{入月日数}\frac{\text{日余}}{\text{见月日法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.35)$$

作如下变化：

$$\frac{\text{月法}\times\text{月余}}{\text{见月日法}}+\frac{\text{见月法}\times\text{小余}}{\text{见月日法}}$$

$$=\frac{\text{月余}}{\text{见月法}}\times\frac{\text{月法}}{\text{日法}}+\frac{\text{小余}}{\text{日法}}$$

其中$\frac{\text{月余}}{\text{见月法}}$是由(2.28)式"推星见月"得到的积月余分，单位是"月"。意义是星末见到所在月的月初之间相当于 1 个月的几分之几。要推算入月日数，须把它化为日数，为此乘以 1 个朔望月的日数，即乘以$\frac{\text{月法}}{\text{日法}}$，就是(2.35)式变化式中前两个分式的乘积。但是末见所在月的"月初"（即"合朔"时）不见得必在夜半，而计日是自夜半开始的。所以求

入月日数还须加上合朔到夜半这段时间。如图 2.3,OD 为星末见至太极上元之间的定见复数,按(2.28)式化为月,整数部分 OC 名为积月,不足 1 月的部分 CD 为月余;从积月中除去元月的整数倍 OA,剩余的不足 1 元月的部分 AC 为月元余。再按(2.33)式把月元余化为日。整数部分 AB 名为积日,不足 1 日的部分 BC 为小余;前已求出积月算外的部分为 D 点所在月,此月的始点自应是 C 点。要求 D 入于该月的哪一天,只要算出月余 CD 折合的天数就可以了。但是 C 是星末见所在月的合朔点,或者说是该月的理论始点,实际始点是从合朔点所在日的夜半开始的。合朔点到夜半之间的距离(BC),就是由(2.33)式算得的月元余化为积日后的畸零部分($\frac{\text{小余}}{\text{日法}}$),也即是(2.35)式变化式中的最后一个分式代表的日数。加入此数才是末见入月的实际日数。

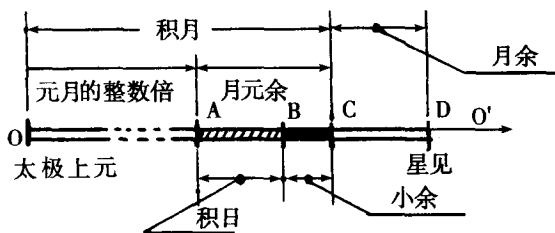



图 2.3 推入月日数图

《律历志》又说,算得 BD 包含的日数后,"并之大余,数除如法,则见日也"。"大余"是指由(2.33)式算得的"积日"数(AB 所含日数),与入月日数(BD)相加得到自入元以来到行星再见的总日数,入元所在日名甲子,照例从总日数除去 60 甲子,所余不足 60 日的部分,从甲子起算,算外就是 D 所在日名。所以并入大余只是为了能从元初日名甲子起算。若从本节 5 算得的月朔日名起算,就不必并入大余了。

8. 推后见所在中气

在今见中气数内再加一见中气即得。若以前"末见"为今见中气,它包括两部分:中元余和中余(见图 2.2。另有元中的整数倍,舍去不计)。一见中气数也有两部分,对于木星:积中 13 和中余 157。为了区别今见

中气中的中余和后见中气中的中余,《律历志》把后见中余称为后中余。以上四部分相加:

$$后见入元中气数=(中元余+\frac{中余}{见中法})+(积中+\frac{后中余}{见中法})$$

$$=(中元余+积中)+\frac{中余+后中余}{见中法} \quad \cdots\cdots\cdots (2.36)$$

前两项是整数相加,后两项是分数相加,分母都是见中法〔参见(2.24)式和"纪母"〕。分数的和满 1,则归入前两项和之中(《律历志》说是归入中元余,是一样的)。前两项和与后两项和中的整数相加得到后见的中元余,即后见入元中气数。由此求后见所在中气就很容易了,就是《律历志》常说的"除数如法,(算外)则后见中也"。"如法"就是像求末见所入中气一样:从中元余中除去逐章中气得入章中数,再从入章中数中除去逐年中气,所余不满 1 年的中气数即为所求。

9. 推后见所在月

仿照推算后见中气的方法可得到推后见月的公式:

$$后见入元月数=(月元余+积月)+\frac{月余+后月余}{见月法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.37)$$

式中对于木星,积月=13,后月余=15079,是每见所含月数和余分;后两项分母都是见月法(30077),相加后满见月法则入前两项和。由入元月数求所在月数仿前法。

10. 推后见至日及入中次度数

即推后见所在中气始日的日名及到始日的日数和度数由(2.32)式知,推前见至日包括两项参数:由中元余化成的整日数"积日"以及不足 1 日的畸零数"小余"。推后见至日,只要在前两项中分别加上 1 见所含的整日数(积日)和畸零数(小余)即得。仿(2.36)式有:

$$后见入元日数=(中元余积日+积日)+\frac{小余\times见数+后小余}{见中日法}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.38)$$

式中小余由(2.32)式推得,分母为元法(4617);后小余由见中日法算出,见中日法=元法×见数,分母不同,应通分后再加。求至日与求入中次数同。

11. 推后见月朔日名和入月日数

由(2.33)式推前见朔日得月元余积日和小余，加后见积日、小余(每见积月所化积日和小余)得：

$$后见月元余日数=(月元余积日+积日)+\frac{小余\times 见月法+后小余}{见月日法} \quad \cdots\cdots \quad (2.39)$$

由(2.35)推入月日数，仿上法得后见入月日数：

$$后见入月日数=(前见大余+每见积日)+\frac{小余+后小余}{见月日法} \quad \cdots\cdots \quad (2.40)$$

前见大、小余是(2.35)式的推算结果，每见积日及后小余是“纪母”节中(2.26)式的计算结果。前见小余及后小余分母都是见月日法。(2.39)、(2.40)两式的计算结果相加，整数部分满60除去之，所余不满60的部分，自甲子起算，算外，即得入月日数。

12. 由后见日度推晨、夕见度

晨见，星在日前15度，由日度减15度得星晨见度；夕见，星在日后15度，由日度加15度得星夕见度。

13. 由始见推若干日后星度

《三统历》称为“推五步”。“五”指五行星，“步”指其行度。推法关键在于求得星行率，即每日星行度。

$$星度=星行率\times 日数+初见星度 \quad \cdots\cdots \quad (2.41)$$

先求星行率：每个大周期行星行天周数为(岁数－见数)。化为天度：(岁数－见数)×周天。一个大周期的日数为：岁数$\times\frac{周天}{统法}$。星行率等于二者相除：

$$\frac{(岁数-见数)\times 周天}{岁数\times\frac{周天}{统法}}=\frac{(岁数-见数)统法}{岁数}$$

代入(2.41)得：

$$星度=\frac{(岁数-见数)统法}{岁数}\times 日数+初见星度 \quad \cdots\cdots \quad (2.42)$$

《三统历》叙述(2.41)式右边第一项(星行率×日数)说：“置始见以来日数至所求日，各以其行度(指每日行度，即星行率)乘之。”其中“日

数”或“星行率”如果有一个是分数〔在(2.42)式中星行率为分数〕，可直接相乘，使$\frac{整数\times分子}{分母}$(《三统历》说：“其星若日有分者，分子乘全为实，分母为法。”)如果两个都是分数，先各自化为假分：$\frac{整数部分\times分母+分子}{分母}$(《三统历》说是“其两有分者，分母分度数乘全，分子从之”)，然后相乘〔假分的分子、分母分别相乘，即“令(分子)相乘为实，分母相乘为法，实如法得一，名曰积度”〕。

第一项所得积度与第二项(初见星度)相加，《三统历》说积度“数起星初见所在宿度，算外，则星所在宿度也”。

四、岁术

三统历中的岁术，是专门计算岁星(即木星)及太岁位置的。本来纪术所论，包括了岁星位置的计算法，此处又专立一法，使对岁星的计算更为简便。这是由于古有岁星纪年法，对岁星的计算比对其余行星的计算更加重要的缘故。

1. 推岁星所在

就是确定岁星某年在某次。由于岁星行率是$\frac{岁数-见数}{岁数}=\frac{1728-1583}{1728}=\frac{145}{1728}$，即每1728年行天145周。把周天分为1728分，岁星每年行145分。又周天分为12次，每次$\frac{1728}{12}=144$分。由此知每年岁星行1次过1分，144年过1次，即144年行天145次。这就是三统历的“超辰法”。懂得这些，岁星的计算就不难了。

与其他行星的算法一样，先求所求年之前到上元以来的积年，从中除去岁星的周期数，剩下的不满1个周期的年数乘以岁星行率(145分/年)，除以每次分数(144分/次)，化为积次。因每周天12次，满12则除去之，所余不满12次的部分就是在所求年以前岁星的行次。自星纪起算，下一次(算外)就是岁星在所求年中的星次数，《律历志》给出

的计算积次的公式是：

$$\frac{(上元积年-岁数\cdot n)\times 岁星行率145}{每次分数144}=积次\frac{次余}{144} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.43)$$

其中n为待选自然数，选择的条件是满足：$0\leqslant 上元积年-岁数\cdot n<岁数$。

2. 三统历的太岁纪年法

就是用60甲子名纪年，今年年名甲子，下年就是乙丑，如此下去，60年1周，与干支纪年相同。与岁星纪年的关系是岁星纪年，年名以12次名，今年岁在星纪，明年则在玄枵，后年在诹訾……自西向东，12年1周；太岁纪年以干支，今年十二支在子（与12次相配为玄枵），明年在丑（12次相配者为星纪），后年在寅（12次为析木）……自东向西，60年1周。所以，后世术士认为岁星在天，循12次左转，每岁行1次；太岁在地，沿十二地支右行，每岁行一支。岁星实有，踪迹可见；太岁是根本不存在的，看不到它的行迹，人们把它当做一颗假想的星，与岁星速率相同，而运行的方向相反。

如此，太岁的行迹可以这样计算：

$$\frac{积次}{60}=甲子周数\frac{余次}{60} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.44)$$

"积次"求法见(2.43)式；余次自丙子起算，算外为所求年的太岁纪年名，《律历志》称为"太岁日"名（"算尽之外，则太岁日也"）。是由于通常称60甲子名为60日名。

3. 论五星赢缩

《律历志》的这一部分内容，宗旨在于征引文献，证明岁星有超辰之事。所引为《左传·襄公二十八年》纪事："岁弃其次而旅于明年之次，以害鸟帑，周楚恶之。"刘歆认为，通常所说的五星赢缩与五星过次、过舍，是不同的（"五星之赢缩不是过也"）：过次、过舍有灾殃（"过次者殃大，过舍者灾小"）；赢缩仅指稍有超前或落后，没有什么灾殃（"不过者亡咎"）。

《律历志》又说："次度六物者，岁时日月星辰也。"[①] 中华书局1987年版《汉书·律历志》于"次度"后加句号，误。这句话的意思是，除了上

① 《汉书·律历志》，中华书局1987年版，第1005页。

述用岁星行次判定列国灾凶，还能由之度量六物：岁、时、日、月、星、辰。“次度六物”就是“其次，用来测度六物”的意思。用句号断开就不可解了。

《律历志》于六物之中只解释了“辰”的含意：“辰者，日月之会而建所指也。”意思是：日月交会时，斗勺所指谓之辰。日行每年1周天，周天分为12次，每月只行1次。月亮每个朔望月行1周天，所以日月每个月交会1次：此月交会于星纪，下月交会于玄枵……一年交会12次。而北斗星座（大熊星座）绕北极转动，也是每岁转1周。把1周天分作十二辰，按《淮南子·天文训》的说法是：正月黄昏，斗柄指寅，二月指卯，三月指辰……称为月建。月建的地支方位子、丑、寅、卯等叫做十二辰。

这一部分虽是与岁星运行有关的天文知识，但与历法计算的关系很小。

五、附表及相关术文

1. 十二次起讫度数及二十四节气星位表

表 2.4　十二次起讫度数及二十四节气星位表

十二次名称	起讫天度及对应节气名				
	初		中		终
星纪	斗12度	大雪	牵牛初度	冬至	婺女7度
玄枵	婺女8度	小寒	危初	大寒	危15度
诹訾	危16度	立春	营室14度	惊蛰	奎4度
降娄	奎5度	雨水	娄4度	春分	胃6度
大梁	胃7度	谷雨	昴8度	清明	毕11度
实沉	毕12度	立夏	井初	小满	井15度
鹑首	井16度	芒种	井31度	夏至	柳8度
鹑火	柳9度	小暑	张3度	大暑	张17度
鹑尾	张18度	立秋	翼15度	处暑	轸11度
寿星	轸12度	白露	角10度	秋分	氐4度
大火	氐5度	寒露	房5度	霜降	尾9度
析木	尾10度	立冬	箕7度	小雪	斗11度

2. 二十八宿星度表

表 2.5　二十八宿星度表

东宫	星名	角	亢	氐	房	心	尾	箕	总度 75
	度数	12	9	15	5	5	18	11	
北宫	星名	斗[①]	牛	女	虚	危	营室	壁	总度 98
	度数	26	8	12	10	17	16	9	
西宫	星名	奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	总度 80
	度数	16	12	14	11	16	2	9	
南宫	星名	井	鬼	柳	星	张	翼	轸	总度 112
	度数	33	4	15	7	18	18	17	

3. 相关术文

以下文字是对三统历参数特征或算法的说明。

"九章岁为百七十一岁，而九道小终"：每章 19 年，9 章 171 年，分作"九道"，是日行 1 个小周期。每道 19 年，即把日行轨道按时间先后划分成若干段，每 19 年(1 章岁)所行为 1 段，叫做 1 道。9 段系 171 年所行为 9 道，组成日行 1 个小周期。以 19 年为 1 道，是由于在 1 道之中，年和月所含日数相等，具备了构成 1 个周期的条件。但是，所含日数非整日，应求更大的周期。为此，以 9 道合为 1 个周期，称"小终"，是由于 9 道所含天数仍非整日，算是一个过渡数。再乘 9 才是整日，叫做"大终"。下文说"九终千五百三十九岁而大终"，1539 年为 1 统之年，统日为 562120，与周天数等，统月为 19035，年、月、日齐同，都是整数，所以说是"大终"。

"三终而与元终"：前"终"字指"大终"1539 年，"三终"合 4617 年，为 1 元之岁，所以说是"与元终"，与 1 元之年相终始的意思。

"进退于牵牛之前四度五分"：这可能是个实测数据，三统历日月起自牵牛初度，后汉四分历日月始自斗 21 度 235 分(1 度＝940 分)，差约

---

① 表中四宫总宿度 365，可知畸零星度未列入，误。《后汉书·律历志》载四分历首，日月起于斗宿 21 度，畸零度分归入斗 21 度末。谓斗有 26 $\frac{1}{4}$度，日星之行自 21 $\frac{1}{4}$度开始。如此可使计算简化。由此知，三统历首日月起于牵牛初度，畸零度应归入斗宿之末，亦斗宿度数"二十六"后脱"四十三分"。

4 度余。可能由于观测水平的限制，当时实测结果是在牵牛初和斗 21 度 235 分之间，无法解释，便取前者为计算依据，说是"进退于牵牛之前四度五分"，作为观测和计算间的允许误差。

"九会"指一"大终"1539 年。以下是解释"九会"中的"九"字，"会"字后标点应用冒号，原文用句号，误。

"阳以九终，故日有九道。阴兼而成之，故月有十九道"：按传统的阴阳学说，日月相对应，日为阳，月为阴。阳数（一、三、五、七、九）终于九，叫做"阳以九终"，因此说日有九道（"故日有九道"）。阴数（二、四、六、八、十）最大是十，但是，阳化气，阴成形，所谓阳作阴成，阴能成就万物，必兼阴阳而有之。阳九阴十，"兼阴阳"就是十九，就是上文说的"阴兼而成之，故月有十九道"。"阳名成功，故九会而终"：前文说的"阳作阴成"有两层含意，一是阳创始，阴成就。"作"作"创作"解。二是阳做事，阴辅佐。"作"解为"做"，"成"解为"佐成"。这里"阳名成功"是作第二种解法，意思"阳号能作成万物"。因此九会而成一大终，达到完美程度，一切都重复出现，就算是把事做到底，全部完成了。

"四营而成易，故四岁中余一，四章而朔余一，为篇首"："四营而成易"，是《易·系辞》中的话，指易卜包括四个步骤："分而为二以象两"、"挂一以象三"、"揲（shé，音舌）之以四以象四时"、"归奇于扐（lè，音勒）以象闰"。意思是：把 49 根蓍草随意分为两束，分握左、右手中，叫做"分而为二以象两"；从左手一束中取出一根蓍草夹在小手指中，与左、右手所握合为三组，叫做"挂一以象三"；而后从左、右手所握二束蓍草中每四根一组取出来，叫做"揲之以四以象四时"；最后把左、右手剩余的蓍草，连同左手小指所夹合在一起，由和数多少决定是阴爻还是阳爻，叫做"归奇于扐以象闰"。阴阳爻既定，可以画卦，卦成就可以卜了。总起来叫做"四营而成易"，以此作为制历中某些现象的象征，其中之一是：

"四岁而中余一"，四岁中气总日数减去整日数之后，还余 1 分。算法如下：每中日数为：$365\frac{385}{1539}\div 12=30\frac{2020}{4617}$，四岁中气日数是 $365\frac{385}{1539}\times 4=1461\frac{1}{1539}$。以每日为 1539 分，除去整日后，恰余 1 分。其二是：

表 2.6　一元、三统、

序号	甲子统	甲辰统	甲申统	序号	甲子统	甲辰统	甲申统	序号	甲子统	甲辰统	甲申统
1	甲子	甲辰	甲申	15	庚辰	庚申	庚子	29	丁酉	丁丑	丁巳
2	癸卯	癸未	癸亥	16	庚申	庚子	庚辰	30	丙子	丙辰	丙申
3	癸未	癸亥	癸卯	17	庚子	庚辰	庚申	31	丙辰	丙申	丙子
4	癸亥	癸卯	癸未	18	己卯	己未	己亥	32	丙申	丙子	丙辰
5	癸卯	癸未	癸亥	19	己未	己亥	己卯	33	丙子	丙辰	丙申
6	壬午	壬戌	壬寅	20	己亥	己卯	己未	34	乙卯	乙未	乙亥
7	壬戌	壬寅	壬午	21	己卯	己未	己亥	35	乙未	乙亥	乙卯
8	壬寅	壬午	壬戌	22	戊午	戊戌	戊寅	36	乙亥	乙卯	乙未
9	壬午	壬戌	壬寅	23	戊戌	戊寅	戊午	37	乙卯	乙未	乙亥
10	辛酉	辛丑	辛巳	24	戊寅	戊午	戊戌	38	甲午	甲戌	甲寅
11	辛丑	辛巳	辛酉	25	戊午	戊戌	戊寅	39	甲戌	甲寅	甲午
12	辛巳	辛酉	辛丑	26	丁酉	丁丑	丁巳	40	甲寅	甲午	甲戌
13	辛酉	辛丑	辛巳	27	丁丑	丁巳	丁酉	41	甲午	甲戌	甲寅
14	庚子	庚辰	庚申	28	丁巳	丁酉	丁丑	42	癸酉	癸丑	癸巳

八十一章首日名表

序号	甲子统	甲辰统	甲申统	序号	甲子统	甲辰统	甲申统	序号	甲子统	甲辰统	甲申统
43	癸丑	癸巳	癸酉	57	庚午[①]	庚戌	庚寅	71	丙戌	丙寅	丙午
44	癸巳	癸酉	癸丑	58	己酉	己丑	己巳	72	丙寅	丙午	丙戌
45	癸酉	癸丑	癸巳	59	己丑	己巳	己酉	73	丙午	丙戌	丙寅
46	壬子	壬辰	壬申	60	己巳	己酉	己丑	74	乙酉	乙丑	乙巳
47	壬辰	壬申	壬子	61	己酉	己丑	己巳	75	乙丑	乙巳	乙酉
48	壬申	壬子	壬辰	62	戊子	戊辰	戊申	76	乙巳	乙酉	乙丑
49	壬子	壬辰	壬申	63	戊辰	戊申	戊子	77	乙酉	乙丑	乙巳
50	辛卯	辛未	辛亥	64	戊申	戊子	戊辰	78	甲子	甲辰	甲申
51	辛未	辛亥	辛卯	65	戊子	戊辰	戊申	79	甲辰	甲申	甲子
52	辛亥	辛卯	辛未	66	丁卯	丁未	丁亥	80	甲申	甲子	甲辰
53	辛卯	辛未	辛亥	67	丁未	丁亥	丁卯	81	甲子	甲辰	甲申
54	庚午	庚戌	庚寅	68	丁亥	丁卯	丁未				
55	庚戌	庚寅	庚午	69	丁卯	丁未	丁亥				
56	庚寅	庚午	庚戌	70	丙午	丙戌	丙寅				

① 甲子统第57章首日名“庚午”，《律历志》误为“庚子”，改正。

“四章而朔余一”，朔法用朔望月日数，每个朔望月 $29\frac{43}{81}$ 日，四章岁（235×4 月）朔望月的总日数为：$29\frac{43}{81}\times235\times4=27759\frac{1}{81}$ 日，分每日为 81 分，除去整日后，也是剩余 1 分。这就是“四章而朔余一”。

“为篇首”：就是“为诸篇之首”。四章为一篇，朔余 1 者为诸篇之首，余 2 者为第二篇，余类推。

此段最后一句说“八十一章而终一统”。每章 19 年，八十一章合 1539 年，恰为一统。所以，“八十一章而终一统”，意思是八十一章与一统的年数齐同，不再有朔余分了。

4. 一元、三统、八十一章首日名表（见表 2.6）

5. 附列算法

（1）推章首朔旦冬至日名：三统历每过一章之日，年、月齐同。即年、月恰尽，重又在同一点开始。年始为冬至，月始为朔旦，所以章首日名也是朔旦、冬至日名。若已知统首日名，而统首日名与本统首章日名相同，求下章（第二章）日名，只须算出一章日数即可：

$$365\frac{385}{1539}\times19=6939\frac{61}{81}$$

从中除去 115 甲子（6900 日），余 $39\frac{61}{81}$ 日，自统首日名，在甲子表中后数 39 日，第 40 日的日名为第二章首日日名。同样大余加 39，小余加 61，小余满 81 分入大余，大余满 60 日除去之，得第三章首日日名……如此可得各章首日日名，或者说是得各章首朔旦、冬至日名。

（2）推篇首日名：前文已说到四章之年为一篇，推篇首日名须先算出一篇积日：

$$365\frac{385}{1539}\times19\times4=\frac{2248480}{81}=27759\frac{1}{81}\text{日}$$

满 1 甲子 60 日则除去之，余 $39\frac{1}{81}$ 日。因此，自首篇日名推下篇日名，大余加 39，与推章首朔旦冬至日名相同；小余只加 1 分，就是《律历志》说的“推篇，大余亦如之，小余加一”。

（3）推周至的首日日名：三章为周至（参见本章一节 1“统母”部

分）。同样，欲求首日日名，先求积日：

$$365\frac{385}{1539}\times19\times3=20819\frac{21}{81}\text{日}$$

再从中除去 346 甲子，余 $59\frac{21}{81}$日，59 为大余，21 为小余。由上一个周至首日日名求下一周至首日日名时，大余加 59，小余加 21，算外为所求日名。

六、世经（略）

第三章　古代最后一个四分系统的历法——后汉四分历[1]

后汉章帝元和二年(85 年)改行四分历,这是中国古代实行的最后一个属于四分系统的历法。

为什么废三统历、改行四分历?最主要原因是三统历的积累误差越来越大。三统历每一朔望月取为 $29\frac{43}{81}\doteq 29.53086$ 日,今测约为 29.53059日,误差 0.00027 日,约 300 年差 1 日。对月象而言,已是明显可见的误差了。《后汉书・律历志》引《春秋保乾图》说"三百年斗历改宪",意思是说每过三百年,就要改变历法。这句话是对四分历误差级别的正确概括。自太初元年(前 104 年)实行太初历(《后汉书》以为太初历就是三统历)到元和二年,历时已有 189 年,误差达半日以上(《后汉书・律历志》说历法"后天四分日之三"),历法算出的晦、朔、弦、望都比天象落后,不得已而改行四分历。

四分历的朔望月取为 $29\frac{499}{940}=29.530851$ 日,与三统历的误差相若,为什么能比三统历更符合天象呢? 这是由于古历采用参数较大,一般是历法落后于天象,初时所差甚微,时日既久,积累起来,成了大数。更改历法时,一般舍去小余,重新起算,等于消除了旧历形成的积累误差,新历尽管更不精确,由于时日尚短,误差不甚显著。

如太初元年以前实行殷历,按殷历计算,太极上元至太初元年前积年 2760263 年。4560 年为 1 元,合 605 元,余 1463 年。1 元 3 纪,每纪 1520 年,因知太初元年入殷历天纪 1463 年。每 76 年为 1 蔀,1463 年合

---

① 见《后汉书・律历志》,中华书局 1987 年版,第 3058～3082 页。

19 蔀，余 19 年。19 年为 1 章，积月 235，积日 $235\times29\frac{499}{940}=6939\frac{705}{940}$。705 为小余，表明太初元年冬至前有小余 705 分。改行太初历后，规定太初元年冬至前无小余，等于舍去了将近$\frac{3}{4}$日，即把历法提前了$\frac{3}{4}$日，由殷历造成的积累误差被抹去了。

再如四分历，以汉文帝后元三年（前 161 年）为元，自太初元年上推 1 统 1539 年，知后元三年入太初（三统）历人统：$1539-(161-104)=1482$ 年。折合天数 $1482\times\frac{562120}{1539}=541300\frac{1140}{1539}$日。小余为 1140。而四分历以此年为元首，无小余，是四分历把三统历的积累误差 1140 分（约$\frac{7}{10}$日）舍弃了。在入元后的短时期内，它可能不如太初历准确，但是到了元和二年前后，太初积累误差已达$\frac{3}{4}$日，四分历舍弃的 1140 分，恰好与此数相当，四分历就比三统历准确了。

四分历计算方法仍分三步介绍。

一、四分历的参数

1. 计算年、月、日名参数

四分历回归年是 $365\frac{1}{4}=\frac{1461}{4}$日。其中 1461 为“周天”，4 为“日法”。

19 年设 7 个闰月，19 为“章法”，7 为“章闰”。19 年共 235 个月，235 名为“章月”。每章年、月所含日数相同。

19 年所含日数 $365\frac{1}{4}\times19=\frac{1461\times19}{4}=6939\frac{3}{4}$日，不是整数。若本章始于夜半，下章始点不在夜半（日始）。为此，求 4 章（76 年）的日数（2775 日）。每 4 章之中，年、月、日三者齐同。把 4 章 76 年称为 1 蔀。1 蔀所含月数 940（$235\times4=940$）名为“蔀月”，所含日数 27759 名为“蔀

日”。蔀日除以蔀月得每月日数 $29\frac{499}{940}$ 日。

1 蔀之中，年、月、日三者虽然齐同，日名不同，即上蔀某日与下蔀对应日期的日名不同。为使日名相同，须将蔀日乘 20，使它成为 1 甲子 60 的公倍数。蔀乘 20 成为纪，即 1 纪＝20 蔀＝1520 年＝18800 月。其中 1520 为“纪法”，18800 为“纪月”。

1 纪 1520 年不是 60 的公倍数，所以，每过 1 纪，年名不复，即上纪某年与下纪对应年份的年名不同。为此求 1520 与 60 的公倍数 4560 年，名为 1 元，4560 为“元法”。

每过 1 元（4560 年），年名重复出现，每过 1 纪（1520 年），日名重复出现；每过 1 蔀，年、月、日整同，即所含年、月、日数相等，且是整数；每过 1 章 19 年，年、月整同，日数虽等，不是整数。

2. 计算二十四节气参数

为了计算二十四节气，引入以下诸参数：

从每个回归年中除去 6 甲子 360 日，余 $5\frac{1}{4}$ 日 $=\frac{21}{4}$ 日，称 21 为“没数”。三分没数得 7，为“没法”。也可这样理解，每年二十四节气，每气 $365\frac{1}{4}$ 日 $\div 24=15\frac{7}{32}$ 日，其中零分 7，名为“没法”，分母 32 为“中法”；合二十四气没法：$7\times 21=168$ 为日余，除以中法 32 分得 $5\frac{1}{4}$ 日 $=\frac{21}{4}$ 日。

1 周天＝1461，三分周天得 487（$1461\div 3=487$），名为“通法”。用章月（235）乘周天得 343335，名为“大周”。或者把 1 日再分为 940 分，1 年内日行总分数（$940\times 365\frac{1}{4}=\frac{940\times 1461}{4}=235\times 1461=343335$）为“大周”。

每一章（19 年）235 个朔望月，即月与日会 235 周，其间日绕地自转 19 周，月实行 $235+19=254$ 周。每周所需天数：$\frac{\frac{1461}{4}\times 19}{254}=\frac{1461\times 19}{254\times 4}=\frac{27759}{1016}=27.3218$ 日，就是今天说的近点月。其中 1016 名为“月周”，

是月行 1 周的分数。

3. 交食参数

交食周期仍是 $5\frac{20}{23}=\frac{135}{23}$月，即每 135 月 23 食。23 名为“食法”，135 名“月数”。

每年有$\frac{235}{19}$月，交食的次数是：$\frac{235}{19}\div\frac{135}{23}=\frac{235\times 23}{135\times 19}=\frac{5405}{2565}=\frac{1081}{513}$ $=2\frac{55}{513}$次。其中 1081 为“食数”，513 为“岁数”。可以理解为每 513 年交食 1081 次。求 513 与元法 4560 的公倍数得 41040，为交食大周期，名为“元会”。每过元会之年（即 41040 年），不仅交食重复出现，出现的年名、日名也都相同。同样求得岁数 513 与蔀法 76 的公倍数，得 2052，为“蔀会”。每过蔀会之年（即 2052 年），不仅交食重复出现，年、月、日齐同，而且交食日名对应相同。

4. 推五星运行参数

五星运行的主要参数是周率和日率，$\frac{\text{日率}}{\text{周率}}$是星合（日、星会合而隐）周期：每合所需年数。因此，可以把周率理解为星行一个周期内的合数，日率则是一个周期包含的年数。这两个参数各相当于三统历中的见数和岁数。惟因三统历求见，四分历求合（合时星隐不见，合就是隐），故不称见数，而称率，都是由观察数据处理而得。《后汉书·律历志》说：“五星数之生也，各记于日，与周天度相约而为率。”意思是说，日率、周率的获得是根据观察得到的每合日数，与周天度数相约简获得的。

由日率、周率进而推出其他参数，如由每合年数推每合月数得“合积月”等：

$$\text{每合月数}=\text{每合年数}\times\text{每年月数}=\frac{\text{日率}}{\text{周率}}\times\frac{235}{19}$$

$$=\frac{\text{日率}\times\text{章月}}{\text{周率}\times\text{章法}}=\text{合积月}\frac{\text{月余}}{\text{月法}}$$

式中周率×章法＝月法。得数中的整数部分为“合积月”，余数为“月余”。以木星为例：日率 4725，周率 4327。代入上式：$\frac{4725\times 235}{4327\times 19}=$

$\frac{1110375}{82213}=13\frac{41606}{82213}$。其中 82213 为木星月法，13 为木星合积月，41606 为月余。

每合须经 13 月余末合后，星再合，必在第 14 月，月朔日名可由合积月所含日数(积日)推得。

$$积日=合积月\times每月日数=13\times\frac{27759}{940}=\frac{360867}{940}=383\frac{847}{940}$$

整日数 383 除去 6 甲子 360 日，余 23 为大余，847 为小余。小余加 93 分，满 940 为整日，因称 93 分为“虚分”。

求再合时入于合积月外一月(上例木星入于第 14 月)中的日数，应由两项合成：一项是月余化成的日数，另一项是求月朔所得积日小余，即：

$$入月日数及余分=月余\times\frac{蔀日}{蔀月}+积日小余$$

对于木星：$入月日数及余分=\frac{41606}{82213}\times\frac{27759}{940}+\frac{847}{940}=\frac{1154940+69634411}{77280220}=15\frac{14641}{17308}$日。其中 15 为“入月日数”，14641 为“入月日余”，17308 为“日度法”。

《后汉书·律历志》说“乘为入月日余”[1]。“乘”应是“剩”字残文，合成此数的二项：月余、小余。都是剩余数，故名为“剩”。

欲求行星每合所行度数，由于日每天行 1 度，每合日数就是积度数。前面说$\frac{日率}{周率}$为每合年数，满 1 年则过 1 周天，星度重复出现，从积度中舍去，只计算不满 1 周天的畸零数。若设：$日率=m\cdot周率+n$，$\frac{日率}{周率}=m\cdot\frac{n}{周率}$，$m$ 舍去不计，只计$\frac{n}{周率}$则可。传统叙述法是，“以周率去日率(日章$-m\cdot周率=n$)，余即某”。将此数乘以每年日数($\frac{周天}{日法}$)，就化成了天度数，即：$\frac{n}{周率}\times\frac{周天}{日法}=\frac{n\cdot周天}{周率\times日法}$。所得整度为“积度”，畸零

① 《后汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 3067 页。

为“度余”，周率乘日法叫做“日度法”。

对于木星，周率 4327，$n=398$，代入上式：

$$\frac{398\times1461}{4327\times4}=\frac{581478}{17308}=33\,\frac{10314}{17308}$$

即木星日度法为 17308，积度为 33，度余 10314。

每个行星都有上述 4 组 13 个参数：日率、周率、合积月、月余、月法，大余、小余、虚分，入月日、日余，日度法、积度、度余。推法与木星同。

表 3.1　五星参数表

	木　星	火　星	土　星	金　星	水　星
日　率	4725	1876	9415	4661	1889
周　率	4327	879	9096	5830	11908
合积月	13	26	12	9	1
月　余	41606	6634	138637	98405	217663
月　法	82213	16701	172824	110770	22625
大　余	23	47	54	25	29
小　余	847	754	348	731	499
虚　分	93	186	592	209	441
入月日	15	12	24	27	28
日　余	14641 (17308)	1872 (3516)	2163 (36384)	281 (23320)	44805 (47632)
日度法	17308	3516	36384	23320	47632
积　度	33	49	12	292	57
度　余	10314	114	29451	281	44805

日余栏括号中的数字是日余的分母，显然本栏数字没有化到最简，有的可继续约分。

《后汉书·律历志》还给出一个五星日率的公倍数“二千九百九十万一千六百二十一亿五十八万二千三百”，误。正确数字应是：二千九百九十九万一千六百二十一亿五千八百二万六千三百(2999162158026300)。

二、四分历的计算法

1.计算年名

与三统历算法一样，要首先算出上元以来到所求年之间的年数。四分历以汉文帝后元三年(前161年)庚辰为入元之年，头年十一月甲子日夜半为朔旦冬至，是计算历日的始点，要计算所求年的年名，先要算出此点到所求年之间的年数(去上元年数)。自此点再上推二元(9120年)为“月食五星之元”，日月五星运行都自此点始。

(1)推入蔀术计算所求年入于四分历的某蔀若干年(包括所求年)，所给公式为：

$$\frac{\text{距上元年数}}{\text{元法}}=m\cdot\frac{\text{入元年数}}{\text{元法}}(m=\text{自然数或零}) \quad\cdots\cdots\quad (3.1)$$

$$\frac{\text{入元年数}}{\text{纪法}}=n\cdot\frac{\text{入纪年数}}{\text{纪法}}(n=0、1、2) \quad\cdots\cdots\quad (3.2)$$

因为入元年数<元法，而1元为3纪，所以n只能等于0、1或2。$n=0$，所求年入于天纪；$n=1$，入于地纪；$n=2$，入于人纪。

$$\frac{\text{入纪年数}}{\text{蔀法}}=P\cdot\frac{\text{入蔀年数}}{\text{蔀法}}(P=0、1、2\cdots\cdots19) \quad\cdots\cdots\quad (3.3)$$

《律历志》说“所得数(P)从甲子蔀起，算外，所入纪岁名命之；算上，即所求年太岁所在”。因1纪为20蔀，入纪年数<纪法，所以(3.3)式中的得数P只能是0～19中间的数字。四分历把1纪为20蔀中的每一蔀首日名推出，作为该蔀名称，如第一蔀蔀首日名甲子，该蔀名为甲子蔀；第二蔀蔀首日名癸卯，该蔀名为癸卯蔀等。还推出了对应的年名，如天纪甲子蔀首年名庚辰，地纪甲子蔀首年名庚子，人纪甲子蔀首年名庚申；天纪癸卯蔀首年名丙申，地纪癸卯蔀首年名丙辰，人纪癸卯蔀首年名丙子等(见表3.2)。由(3.3)式所得知：P之算外为所入蔀，从表中

查出第 $P+1$ 蔀蔀首年名〔是天纪或地纪、人纪已由(3.2)式求得的 n 值判定〕。在甲子表中，由此年名起算。(3.3)式所得“入蔀年数”中的最后一年(即《律历志》所说的“算上”)的甲子名号就是所求年的年名。三统历是“算外”为所求年，四分历却是“算上”为所求年，原因是三统历的“上元以来年数”不包括所求年，而四分历包括所求年。再者四分历不说是“算上为所求年年名”，而说是“所求年太岁所在”，形式虽不同，意义是相同的，因为“太岁所在”就是该年的干支序号。

(2)推月食所入蔀会年。

方法与“推入蔀术”具有相似性。

$$\frac{\text{距上元年数}}{\text{元会}}=m\cdot\frac{\text{元会余}}{\text{元会}} \quad\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

$$\frac{\text{元会余}}{\text{蔀会}}=n\cdot\frac{\text{蔀会余}}{\text{蔀会}} \quad\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

其中的蔀会余便是所求的入蔀会年。但是，由于不知所入蔀会首年的年名，不能由此推算出所求年的年名，问题没有最后解决。为此需要求入纪年，所以《律历志》又给出下式：

$$\frac{n\cdot 27-P\cdot 60}{20}=Q\cdot\frac{\text{纪余}}{20} \quad\cdots\cdots\cdots (3.6)$$

其中 n 为(3.5)式中上元以来的蔀会数，乘 27 后化为蔀数(因为 1 蔀会＝27 蔀)；P 为待定的自然数或 0，条件是满足 $0\leqslant n\cdot 27-P\cdot 60<60$，由于 1 元＝60 蔀，从上元以来蔀数减去 $P\cdot 60$，剩余的就是不满 1 元的蔀数。因 1 元＝3 纪，1 纪＝20 蔀，将上述不满 1 元的蔀数再除以 20，化为上元以来纪数(Q)，除不尽的是纪余，纪余的单位是蔀。

(3.6)式中的 Q 显然只能是 0、1、2 中的某一个数，算外为所入纪。即 $Q=0$，入天纪；$Q=1$，入地纪；$Q=2$，入人纪。“纪余”算外为所入蔀，《律历志》说是“数从甲子蔀起”。即纪余＝0，为甲子蔀；纪余＝1，为癸卯蔀；纪余＝2，为壬午蔀等。《律历志》却说“算外，所入蔀会也”，而不说是“算外，所入蔀也”，表示此句与上文说的“数从甲子蔀起”不是一码事。“数从甲子蔀起”者，算外还是蔀。说成是蔀会，是由于从(3.5)式可见，“纪余”算外是(3.5)中的“蔀会余”的第一年，就是所求的月蚀所入蔀会之年。年名由(3.6)式和表 3.2 推得，为“所入蔀会也”，即所入蔀会之年

的年名。入蔀会的年数则要从(3.5)式推知,即“其初不满蔀会者,入蔀会年数也”。

此段“余以二十”句标点有误,重新点为“余以二十除,所得数从天纪,算外,所入纪。不满二十者”(下略)。

(3)蔀首年名、日名表。

表 3.2 蔀首年名、日名表

蔀序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
天纪岁名	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申
地纪岁名	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰
人纪岁名	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊申	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子
蔀首日名	甲子	癸卯	壬午	辛酉	庚子	己卯	戊午	丁酉	丙子	乙卯	甲午	癸酉	壬子	辛卯	庚午	己酉	戊子	丁卯	丙午	乙酉

此表推法:由于每纪 1520 年,除去 25 个甲子周(1500 年),余 20 年。所以,自上纪年后推 20 年,算外第 21 年为下纪首年年名,如天纪首年庚辰后推第 21 位庚子,为地纪首年年名,庚子后第 21 位庚申为人纪岁名。又每蔀 76 年,除去 1 甲子 60 年,余 16 年。因此,自上蔀首年名后推第 17 位为下蔀首年名。如天纪甲子蔀首年名庚辰,后数第 17 位丙申,为天纪癸卯蔀首年名;丙申后数第 17 位壬子,为天纪壬午蔀首岁名……

推蔀首日名法相同:由于 1 蔀日数为 27759,除去 462 甲子(27720 日),余 39 日,自上一蔀首日日名后推 39 日,算外第 40 日为第二蔀首日日名。如第一蔀首日名为甲子,自甲子后数第 40 日癸卯便是第二蔀首日日名。如此类推,可得各蔀首日名。

2. 推朔、弦、望、气、闰、没及日、月宿度

(1)推天正术。

就是推天正月(所求年头年十一月)的位置(大、小余之类),算法是:

$$\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{章月}}{\text{章法}}=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章法}} \quad \cdots\cdots \quad (3.7)$$

入蔀年的求法见(3.3)式。减 1 是由于“入蔀年”中包括了所求年,

去掉1年才能求出此年前的"积月"数，$\frac{章月}{章法}$=月数/年，乘以（入蔀年－1）年，得这么多年的总月数，整月名积月，畸零为闰余。闰余入下月，积满19分（章法）置为闰月。由于每年自有闰余7分（每年$12\frac{7}{19}$个月，7为闰余），头年所余满19－7＝12分，加本年7分闰余，满19分就能置为闰月。所以《律历志》说，闰余"十二以上，其岁有闰"。

以汉顺帝永建五年（130年）为例，此年到文帝后元三年共291年（包括永建五年在内），不足元法和纪法，可视为入天纪年数，由（3.3）式算得入蔀年为：

$$\frac{入纪年}{蔀法}=\frac{291}{76}=3\frac{63}{76}$$

即所求年为天纪第4蔀（辛酉蔀）的第63年，63为入蔀年。天纪辛酉蔀首年岁名为戊辰，从甲子表可查出，"算上"第63位（去1甲子，为第三位）庚午为永建五年岁名。由（3.7）式算得：

$$\frac{(入蔀年-1)\times 章月}{章法}=\frac{(63-1)\times 235}{19}=766\frac{16}{19}$$

其中766为积月，16为闰余，闰余大于12，知永建五年有闰月。

（2）推天正朔日。

即推所求年天正月朔日的日名。由天正朔日以前的积月数求积日，再由所入蔀首日名和积日数就能推出朔日日名：

$$\frac{入蔀积月\times 蔀日}{蔀月}=积日\frac{小余}{蔀月} \qquad (3.8)$$

其中$\frac{蔀日}{蔀月}$为每月日数，乘以入蔀积月得入蔀积日数，是不言而喻的。

$$积日-m\cdot 60=大余 \qquad (3.9)$$

其中m为待定自然数或零，且满足如下不等式：$0\leqslant 积日-m\cdot 60<60$。

由所入蔀首日名，大余算外就是所求年天正月朔日名。

对于永建五年例，积月＝766，代入（3.4）式得：

$$\frac{766\times 27759}{940}=22620\frac{594}{940}$$

22620 为积日，594 为小余。再由(3.5)式求大余：

$$22620-m\cdot 60 \xlongequal{\text{命}m=377} 0$$

表明大余为零，所求天正月朔日名与所入蔀首日名相同，都是辛酉。

由于一个朔望月等于 $29\frac{499}{940}$ 日，小余积够 940 分可置为大月，否则为小月。而每月都有小余 499 分，月前所余只要大于或等于 940－499＝441 分，增入本月 499 分，就是大月了。这就是《律历志》说的“小余 441 以上，其月大”。

由(3.4)、(3.5)式算得的大、小余求下月朔，只要在大余中加 29 日，小余加上 499 分即得。当然仍是大余加后满 60 日除去之，小余满 940 分化为 1 日入大余，大余算外为下月朔。如永建五年例，天正月朔已如上述，大余为 0，小余 594，求次月(天正二月)。大余 0＋29＝29 日，小余 594＋499＝1093＞940，减 940 分化 1 日入大余，大余变为 30 日，小余 1093－940＝153 分。自蔀首日名辛酉起算，大余算外为第 31 日干支名辛卯便是天正二月朔日名。再加得三月、四月……如此进行下去，可求得逐月朔日名。

《律历志》还提供了另一种推法：

$$\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{大周}-\text{周天}\times\text{闰余}}{\text{蔀月}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.10)$$

此式的意义可由(3.7)式和(3.8)式联立得到说明：

(3.7)式，$\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{章月}}{\text{章法}}=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章法}}$

(3.8)式，$\frac{\text{积月}\times\text{蔀日}}{\text{蔀月}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}$

把(3.7)式两端各减去 $\frac{\text{闰余}}{\text{章法}}$，代入(3.8)式，得：

$$\frac{\left[\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{章月}}{\text{章法}}-\frac{\text{闰余}}{\text{章法}}\right]\times\text{蔀日}}{\text{蔀月}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}$$

整理，$\frac{\left[(\text{入蔀年}-1)\times\text{章月}-\text{闰余}\right]\times\text{周天}}{\text{蔀月}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}$

$$\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{大周}-\text{闰余}\times\text{周天}}{\text{蔀月}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}\text{(证毕)}$$

其中$\frac{\text{蔀日}}{\text{章法}}$=周天，周天×章月＝大周，积日$-m\cdot 60$=大余，自所入蔀首日名起算，大余算外为所求年天正月朔日名。

(3)推二十四气。

先推冬至日名，仿三统历的方法：一年除去 6 甲子，余 $5\frac{1}{4}$日$=\frac{21}{4}=\frac{\text{没数}}{\text{日法}}$，用(入蔀年－1)乘，得冬至积日(《律历志》称为“大余”)。

$$(\text{入蔀年}-1)\times\frac{\text{没数}}{\text{日法}}=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{日法}} \quad\cdots\cdots (3.11)$$

每气日余分$\frac{7}{32}$，全年二十四气合为$\frac{168}{32}=\frac{\text{日余}}{\text{中法}}$，亦可由此数求冬至积日：

$$(\text{入蔀年}-1)\times\frac{\text{日余}}{\text{中法}}=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{中法}} \quad\cdots\cdots (3.12)$$

对于上举永建五年例：$62\times\frac{21}{4}$(或$\times\frac{168}{32}$)$=325\frac{2}{4}$(或 $325\frac{16}{32}$)。其中 325 为大余，2 为小余。大余去 5 甲子，余 25，自辛酉起算，在甲子表中，算外第 26 位丙戌便是所求年冬至日名。前已求得月朔为辛酉，冬至丙戌为该月二十六日。

求下年冬至，大余加 5，小余加 1(分母为 32，则加 8)，小余满分母则入大余。

求其余各气：因每气 $15\frac{7}{32}$日，大余加 15，小余加 7，小余满 32 入大余，得下气。在本例中冬至大余 25，小余 16；下气小寒大余 40，日名辛丑，小余 23；大寒大余 55，日名丙辰，小余 30；立春大余 11，日名壬申，小余 5……一直进行下去，得每气。

(4)推闰月所在。

(3.7)式已算得积月余分为$\frac{\text{闰余}}{\text{章法}}$，又每年有月余 7 分(分母等于章法)，均入 12 月，每月有$\frac{7}{12}$，即有$\frac{\text{章闰}}{12}$的余分。闰余与逐月余分相加，积

够章法 19 分，则在该月后设一闰月。所以，闰月位置可以这样计算：章法减闰余为置闰尚缺分数，除以每月闰分，得月数。即：

$$(\text{章法}-\text{闰余})\div\frac{\text{章闰}}{12}=\frac{(\text{章法}-\text{闰余})\times 12}{\text{章闰}}=\text{月序数}\frac{\text{余数}}{\text{章闰}}\cdots\cdots \quad (3.13)$$

代入永建五年例的各项数据：

$$\frac{(19-16)\times 12}{7}=5\frac{1}{7}$$

月序数为 5，闰月在第 6 个月为闰五月（天正），即永建五年天正闰五月，寅正有闰三月。

四分历又说：余数“满四以上亦得一算之数”，“或进退以中气定之”。意思是：余数满 4 以上，$\frac{\text{余数}}{\text{章闰}}>0.5$，可设闰月在前月，也可设在后月，究竟设在何处，由中气位置决定。在上例中若得数为 $5\frac{4}{7}\sim 5\frac{6}{7}$，闰月可以是闰五月，也可是闰六月。由六月中气大暑的位置决定：大暑在五月后一月为闰六月，在五月后二月为闰五月。

（5）推弦、望。

每月为 $29\frac{499}{940}$ 日，半月为 $14\frac{719\frac{1}{2}}{940}$ 日，四分之一月为 $7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$ 日。所以，求弦望可由月朔大、小余加 $\frac{1}{4}$ 月得上弦，再加 $\frac{1}{4}$ 月得望，加 $\frac{3}{4}$ 月得下弦，加全月得下月朔。即

$$\text{月朔大、小余}+7\frac{359\frac{3}{4}}{490}\text{日}=\text{上弦大、小余}\cdots\cdots \quad (3.14)$$

$$\text{月朔大、小余}+14\frac{719\frac{1}{2}}{940}\text{日}=\text{望日大、小余}\cdots\cdots \quad (3.15)$$

$$\text{月朔大、小余}+22\frac{139\frac{1}{4}}{940}\text{日}=\text{下弦大、小余}\cdots\cdots \quad (3.16)$$

$$\text{月朔大、小余}+29\frac{499}{940}\text{日}=\text{次月朔大、小余}\cdots\cdots \quad (3.17)$$

以永建五年为例，前已算得其天正月朔日大余为 0，小余 594。由

(3.14)式算得上弦大余 8，小余 13 $\frac{3}{4}$；由(3.15)式算得望日大余 15，小余 373 $\frac{1}{2}$；由(3.16)式算得下弦大余 22，小余 733 $\frac{1}{4}$；由(3.17)式算得下月(天正二月)朔大余 30，小余 153。再由入蔀首日名辛酉及各大余日推得上弦、望、下弦及次月朔日名分别为己巳、丙子、癸未和辛卯。

弦、望时刻由小余推得。每日 940 分，分为 100 刻，每刻为$\frac{940}{100}$分。小余除此数得弦、望刻，即：

$$\text{弦望小余} \div \frac{940}{100} = \frac{\text{弦望小余} \times 100\text{ 刻}}{\text{蔀月}} = \text{刻数}\frac{\text{刻余}}{\text{蔀月}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.18)$$

二十四节气时刻仿此式各由其小余数求得。所得刻数小于所在节气夜漏之半者在头日，大于夜漏之半在后日。就是《律历志》说的“不满其所近节气夜漏之半者，以算上为日”。

(6)推没灭术。

先说“没”、“灭”含意，前面介绍参数时曾说，21 为没数，7 为没法。是由于每年冬至日名在甲子表中后退$\frac{21}{4}$位，4 年(1461 日)后退 21 位。那么，每后退一位所需日数设为 x，x 可由下面的比例式求得：$1461 : 21 = x : 1$，解得 $x = \frac{1461}{21} = 69\frac{4}{7}$日。冬至甲子日名后退一位叫做“1 没”，1 没日数$\frac{1461}{21}$，可理解为每 21 没须经 1461 日，所以把 21 叫做“没数”。1 没 $= 69\frac{4}{7} = \frac{487}{7}$日，487 为通数，除以 7 得没日，所以把 7 叫做“没法”。1 没 $= 69\frac{4}{7}$日，2 没 $= 139\frac{1}{7}$日……当没所含日数为整数时，叫做“灭”。可以看出，7 没 = 1 灭，3 灭 = 21 没 = 4 年(1461 日)。

由以上可知，没、灭都是计算冬至甲子日名时采用的参数，冬至日名在甲子表中退后一位称为 1 没，与没相应的日数为没日，没及其对应的没日都是整数时叫做“灭”。

要计算某年冬至以前的没日，先要计算入蔀后至该年冬至之间(入蔀年－1 年)的没数。此没数的整数部分叫做“积没”，畸零部分的分子

叫“没余”。可由如下比例式算得：

4 年：21 没＝(入蔀年－1 年)：x 没

或者写为：　　日法：没数＝(入蔀年－1 年)：x

$$x=\frac{(\text{入蔀年}-1\text{年})\times\text{没数}}{\text{日法}}=\text{积没}\frac{\text{没余}}{\text{日法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.19)$$

把积没化为日数：

$$\text{积没}\times 69\frac{4}{7}\text{日}=\text{积没}\times\frac{487}{7}=\frac{\text{积没}\times\text{通法}}{\text{没法}}=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{没法}}\cdots\cdots\cdots \quad (3.20)$$

这就是四分历给出的公式，将大余用 1 甲子 60 日约简，满 1 甲子则除去之，最后剩余的不足 1 甲子的数目，算外就是所求年冬至前的没日(以蔀首日名命之)。欲求下一个没日，大余加 69，小余加 4 分。小余满没法(7 分)化为整日，入大余。

以永建五年为例：入蔀年 63 年，算外 62 年。

$x=\frac{62\times 21}{4}=325\frac{2}{4}$。325 为积没，2 为没余。化为日数：$\frac{325\times 487}{7}=22610\frac{5}{7}$。22610 为大余，5 为小余。大余用 60 约简后余 50。由此知蔀首日名辛酉之后第 51 位辛亥，是永建五年冬至前的第一个没日。前已算得冬至日名丙戌，查甲子表可知，没日辛亥在冬至丙戌前 35 日。求后没，大余加 69，得 119，去 1 甲子 60 日，余 59；小余加 4，得 9。大于没法 7，除去 7 分为一整日，入大余，大余变为 60，小余还有 2 分。大余算外第 61 日辛酉，是下一没日的日名，它在冬至丙戌后第 35 日。

四分历提供的另一种计算没日的公式是：

$$\frac{\text{通法}-\text{冬至小余}\times 15}{\text{没法}}=\text{天正冬至后没日大余}\frac{\text{小余}}{\text{没法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.21)$$

可以这样理解：先比较求冬至积日的公式(3.11)和求冬至前积没的公式(3.19)，二式左边相同，右边也应相同，因此，可把(3.11)式右边求得的冬至前积日数(每年除去 6 甲子以后的日数和)当做冬至前的积没数，而把$\frac{\text{冬至小余}}{\text{中法}}$中的“冬至小余”当做冬至前没到冬至日之间的积没余分，把它化作日数后就算出了冬至前没到冬至的日数。化日方法如下：由于每气 $15\frac{7}{32}$日，32 为中法，可与上面的积没余分相比较。每 7 分

与 15 日对应，冬至小余分相当于几日，得比例式：7 : 15＝冬至小余 : x，$x=\frac{冬至小余\times 15}{7}=\frac{冬至小余\times 15}{没法}$。而每没天数是$\frac{通法}{没法}$，冬至后没到冬至的天数：

$$\frac{通法}{没法}-\frac{冬至小余\times 15}{没法}=\frac{通法-冬至小余\times 15}{没法}$$

就是四分历给出的公式。

(7)推合朔时日所在天度。

三统历称为“推合晨度”。四分历所给公式是“置入蔀积日，以蔀月乘之，满大周除去之，其余满蔀月得一，名为积度，不尽为余分。积度加斗二十一度，加二百三十五分”。可写成如下形式：

$$天度=21^{\circ}235'+\frac{积日\times 蔀月-n\cdot 大周}{蔀月}$$

（其中 n 是自然数，满足 $0\leqslant 积日\times 蔀月-n\cdot 大周<大周$）…… (3.22)

由于日所在天度就是日行总度加上计历时起始星度（斗 21°235′），所在天度数应该是：

$$天度=21^{\circ}235'+日行总度-n\cdot 周天度$$

（n 满足 $0\leqslant 日行总度-n\cdot 周天度<365\frac{1}{4}度$）…………………… (3.23)

后式中的“日行总度”由(3.8)式知，应包括积日和小余两项，不能只计积日（只计积日为夜半度）。由此知四分历原文[①]中“蔀月乘之”之后漏脱“并小余”三字。将(3.8)式算得的积日连同小余数代入后式中得：

$$天度=21^{\circ}235'+积日+\frac{小余}{蔀月}-n\cdot 周天度$$

化简：

$$=21^{\circ}235'+\frac{积日\times 蔀月+小余}{蔀月}-\frac{n\cdot 周天度\times 蔀月}{蔀月}$$

$$=21^{\circ}235'+\frac{积日\times 蔀月+小余-n\cdot 大周}{蔀月}$$ …………… (3.24)

式中 n 是自然数，且满足 $0\leqslant 积日\times 蔀月+小余-n\cdot 大周<大周$。

以永建五年为例，积日为 22620，小余 594。代入上式：

---

① 见《后汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 3063、3064 页。

$$天度=21°235'+\frac{22620\times940+594-n\cdot343335}{940}$$

取 $n=61$

$$天度=21°235'+\frac{21265394-20743435}{940}$$

$$=21°235'+\frac{319959}{940}$$

$$=21°235'+340°359'$$

$$=361°594' \quad (1°=940')$$

与四分历列出的周天二十八宿星度比较，知合朔时入箕宿 7°359′（“以宿次除之，不满宿，则日月合朔所在星度也”，“经斗除二百三十五分”）。求日月再合，加一月日数 $29\frac{499}{940}$ 即得。

计算合朔星度的另法：

$$合朔天度=21\frac{1}{4}度+\frac{大周-闰余\times周天}{蔀月} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.25)$$

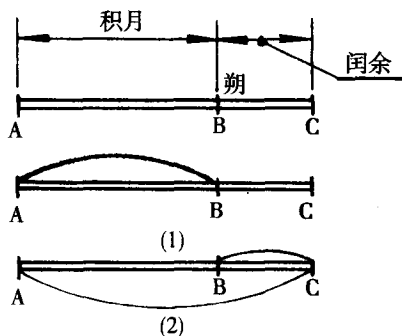



图 3.1　朔日计算法

此式可这样理解：如图 3.1，AC 是（入蔀年－1）年，AB 为（入蔀年－1）年中的积月数，BC 为闰余。因而，朔日点 B 的天度数可由图 3.1（1）、（2）两个途径求出：（1）是直接由 AB 的积月数求积日（积日就是天度）；（2）是分别求出 AC、BC 的积日数，由 $AB=AC-BC$ 求出 AB 积日数。（3.24）式是按（1）计算的，（3.25）式则是按（2）推出：

$$AC=(\text{入蔀年}-1)\times\text{每年月数}\times\text{每月日数}$$

$$=(\text{入蔀年}-1)\times\frac{\text{章月}}{\text{章法}}\times\frac{\text{蔀日}}{\text{蔀月}}=(\text{入蔀年}-1)\times\frac{\text{大周}}{\text{蔀月}}$$

$$BC=\frac{\text{闰余}}{\text{章法}}\times\text{每月日数}=\frac{\text{闰}}{\text{章法}}\times\frac{\text{蔀日}}{\text{蔀月}}=\frac{\text{闰余}\times\text{周天}}{\text{蔀月}}$$

那么，$AB=AC-BC=(\text{入蔀年}-1)\times\frac{\text{大周}}{\text{蔀月}}-\frac{\text{闰余}\times\text{周天}}{\text{蔀月}}$

$$=\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{大周}-\text{闰余}\times\text{周天}}{\text{蔀月}}$$

加上起始星度，就是所求的朔日天度了。即：

$$\text{朔日天度}=21\frac{1}{4}\text{度}+\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{大周}-\text{闰余}\times\text{周天}}{\text{蔀月}}\quad\cdots\cdots\quad(3.26)$$

当入蔀年=2 时，就变成了(3.25)式。(3.25)式是(3.26)式的一个特例。

中华书局 1987 年版《后汉书・律历志》述此公式说："以闰余乘周天，以减大周余，满蔀月得一，合以斗二十一度四分一。"与公式(3.26)比较知，"以减大周余"[①]，应在"周"后断句，"余"字入下句，并在"周"后补"乘入蔀年减一"六字。

(8)推天正朔夜半日所在星度。

与三统历算法同，把入蔀积月化为日，包括积日和小余两部分〔参见(3.8)式〕。由积日得合朔夜半星度，由小余得合朔时刻。本处只求星度：

$$\text{夜半日星度}=\text{起始星度}+(\text{积日}-n\cdot\text{周天度})$$

$$=21\text{度}\,19\text{分}+(\text{积日}-n\cdot 365\frac{1}{4})$$

$$=21\text{度}\,19\text{分}+(\text{积日}-n\cdot\frac{\text{蔀日}}{\text{蔀法}})$$

$$=21\text{度}\,19\text{分}+\frac{\text{积日}\times\text{蔀法}-n\cdot\text{蔀日}}{\text{蔀法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.27)$$

式中 n 是自然数，且满足 $0\leqslant\text{积日}-n\cdot 365\frac{1}{4}<365\frac{1}{4}$。此外，加 1 度

---

① 《后汉书・律历志》，中华书局 1987 年版，第 3064 页。

得次日夜半日度，加 30 度（大月）或 29 度（小月）得次月朔夜半日度，即：

$$朔日夜半日所在度+1度=次日夜半日所在度 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.28)$$

$$朔日夜半日所在度+\left\langle\begin{matrix}30(大月)\\29(小月)\end{matrix}\right.=次月朔日夜半日所在度 \quad \cdots (3.29)$$

前面说由积日小余得合朔时刻，是从夜半起算的，所以将合朔时日所在度分数减小余，也能得夜半度分。即：

朔日夜半日星度＝合朔度分－朔小余

由(3.24)、(3.8)式知：$=21°235'+\frac{积日\times 蔀月+小余-n\cdot 大周}{蔀月}-\frac{小余}{蔀月}$

$$=21°235'+\frac{积日\times 蔀月-n\cdot 大周}{蔀月} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.30)$$

同样 n 为自然数，且满足 $0\leqslant 积日\times 蔀月+小余-n\cdot 大周<大周$。在算得的结果中 1 度＝940 分，而(3.27)式的计算结果是 1 度＝76 分。为将二式计算结果齐同，可列出如下比例式：$1:940=x:76$。$x=\frac{76\times 1}{940}=\frac{1\times 19}{235}$。把(3.30)式算得的度分中的分数乘以 19，除以 235，就得到了与(3.27)式相同的结果。

比较(3.24)和(3.30)式可知，计算合朔星度与朔日夜半星度都是由积日算出的，区别在于前者计入积日小余，后者不计。

(9)求朔日夜半月所在星度。

与求日在朔日夜半时的星度一样，也可由入蔀积日及积日小余两个途径计算。先由积日计算：

星月初度＋月行积度－$n\cdot$周天度＝朔夜半月度分

日每天行 1 度，月每日行 $13\frac{7}{19}$度，月行积度应为入蔀积日的 $13\frac{7}{19}$倍，所以，上式变为：

$$初度+入蔀积日\times 13\frac{7}{19}-n\cdot 周天度$$

$$=21°19'+入蔀积日\times\frac{254}{19}-n\cdot 周天度$$

$$=21°19'+\text{入蔀积日}\times\frac{254\times4}{19\times4}-\frac{n\cdot\text{周天度}\times19}{4\times19}$$

$$=21°19'+\frac{\text{入蔀积日}\times\text{月周}-n\cdot\text{蔀日}}{\text{蔀法}}=\text{积度}\frac{\text{度余}}{\text{蔀法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.31)$$

其中 n 是自然数，满足 $0\leqslant$ 入蔀积日 $\times$ 月周 $-n\cdot$ 蔀日 $<$ 蔀日。

因月每日行 $13\frac{7}{19}$ 度，合 13 度 28 分（1 度＝76 分），求次日夜半度分，只须把上式求得的结果加 13 度 28 分即得：

$$\text{头日夜半月度分}+13°28'=\text{次日夜半月度分}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.32)$$

求次月：大月 30 日，月行 $13°28'\times30-365°19'=35°61'$

小月 29 日，月行 $35°61'-13°28'=22°33'$

所以求次月朔日夜半月度分，只须由头月朔日夜半月度分加 35 度 61 分（大月）或 22 度 33 分（小月）即得：

$$\text{头月朔日夜半月度分}+\left\langle\begin{matrix}35°61'(\text{大月})\\22°33'(\text{小月})\end{matrix}\right.=\text{次月朔日夜半月度分}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.33)$$

单位制都是 1 度＝76 分，即以 76 为度法。斗分 $\frac{1}{4}$ 变成了 $\frac{19}{76}$，所以《律历志》说“分满法得一度”，就是说分满 76 化为 1 度，又说“经斗除十九分”就是把月度分化为宿度时，经斗宿还要去掉 $\frac{1}{4}$ 度，即 19 分。

《律历志》还说：“其冬下旬月在张、心署之，谓昼漏分后尽漏尽也。”冬日下旬，月常在张、心二宿之间，是指黄昏昼漏尽时。所谓“尽漏尽也”，前一个“尽”字为“昼”字，形近而误，前加逗号，全句为“谓昼漏分后，昼漏尽也”。

由小余求夜半月度有两法：第一，合朔时月度（亦日度）减去在当日小余段内的月行度，即：

$$\text{合朔时月度(亦日度)}-\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}\times\text{月行速度}=\text{夜半月度}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(3.34)$$

其中“月行速度”是月对恒星的速度，等于 $13\frac{7}{19}$ 度/日。

第二，用夜半日度减去夜半到合朔间的日月行度差。如图 3.2，夜半时日行度为 OB，月行度为 OA。合朔时日月同行到 C，夜半到合朔间

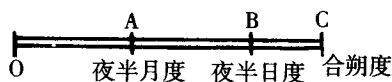



图 3.2　推夜半月度图

($\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}$)，日月行度差为 AB，这三项的关系：$OB-AB=OA$。四分历求夜半月行度的公式就是由此推出：

$$\text{夜半月度}=\text{夜半日所在度}-\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}}\times\text{月对日速度}$$

$$=\text{夜半日所在度}-\frac{\text{小余}\times 12\frac{7}{19}}{\text{蔀月}}$$

$$=\text{夜半日度}-\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}/12\frac{7}{19}}$$

$$=\text{夜半日度}-\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.35)$$

四分历述此公式说"以蔀法除朔小余，所得以减日半度也"，清代李锐《李氏算学遗书》在末句"日"字后增"夜"字，"日夜半度"也就是本公式中的夜半日度 OB。

(10)推朔日黎明时日所在度分。

(3.27)、(3.30)式已推得夜半时日所在度分，加上当日夜漏之半得黎明度分，夜漏数可从《后汉书·律历志》附列的表[①]中查得，把它化成度分，方法是：昼夜日行 1 度化为 100 刻，每刻$=\frac{1}{100}$度，夜漏之半$=\frac{1}{2}\times\frac{\text{夜漏数}}{100}$度$=\frac{\text{夜漏数}}{200}$度。由(3.27)式计算得的夜半度分采用的单位制是 1 度=76 分，由(3.30)式算得的度分是 1 度=940 分。夜漏数化为分须与它们一致：夜漏之半$=\frac{\text{夜漏数}}{200}\times$蔀法(或者×蔀月)。因此，计算黎明度分的公式可写为：

① 见《后汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 3077 页。

$$黎明日度分=夜半度分+\frac{夜漏数\times蔀法}{200}分 \quad \cdots\cdots (3.36)$$

分满蔀法(76)化为 1 度,入夜半度。或者:

$$黎明日度分=夜半度分+\frac{夜漏数\times蔀月}{200}分 \quad \cdots\cdots (3.37)$$

分满蔀月(940)化为 1,入夜半度。

前式中的夜半度分由(3.27)式求得,后式由(3.30)式求得。

(11)求朔日昏时日所在度分。

由朔日夜半度加 1 度得次日夜半度,减$\frac{夜漏数}{2}$,即得:

$$\begin{aligned}昏时日度分&=朔日夜半度分+1度-\frac{夜漏数\times蔀法}{200}分\\&=朔日夜半度分+蔀法(分)-\frac{夜漏数\times蔀法}{200}分 \quad \cdots (3.38)\end{aligned}$$

(12)求朔日黎明月所在度分。

把(3.36)式中的夜漏数化为月行分数,夜半度分改为夜半月度分即得:

$$\begin{aligned}黎明月度分&=夜半月度+夜半月分+\frac{夜漏数\times蔀法}{200}\times13\frac{7}{19}分\\&=夜半月度分+\frac{夜漏数\times月周}{200}分 \quad \cdots\cdots (3.39)\end{aligned}$$

式中 1 度=76 分,分满蔀法 76 化为度。律历志中“夜半度”、“后半”增“月”字。

(13)求朔日昏时月所在度分。

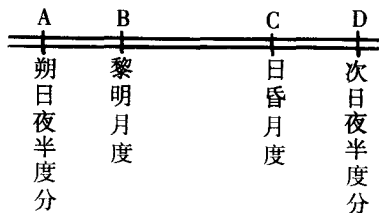



图 3.3 推日昏月度图

如图 3.3,A 为朔日夜半度分,D 为次日夜半度分,B 为黎明月度,

C 为日昏月度。显然 $AB=CD$。由于 AD 等于1日内的月行度 $13\frac{7}{19}$度，化为分：$13\frac{7}{19}\times$蔀法＝月周(1度＝76分)。那么：

$$
\begin{aligned}
\text{日昏月度} &= \text{朔日夜半月度分} + AC \\
&= \text{朔日夜半月度分} + (AD-CD) \\
&= \text{朔日夜半月度分} + (AD-AB) \\
&= \text{朔日夜半月度分} + (\text{月周} - \text{夜半到黎明月行分}) \\
&= \text{朔日夜半月度分} + \left(\text{月周} - \frac{\text{夜漏数} \times \text{月周}}{200}\right)\text{分} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.40)
\end{aligned}
$$

式中1度＝76分。括号内所得满蔀法(76)化为1度。

(14)推弦、望日所入星度。

弦$=\frac{1}{4}$月$=7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$日，望$=\frac{1}{2}$月$=14\frac{719\frac{1}{2}}{940}$日。所以，月朔星度加7度 $359\frac{3}{4}$分得上弦日度，再加得望日度，三加得下弦度，四加得下月朔星度。求宿度，用星度递减二十八宿各宿度即得。

(15)推弦、望时月在星度。

弦时月行度$=\frac{1}{4}$月$\times$月每日行度$=7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$日$\times 13\frac{7}{19}$度/日$=98\frac{653\frac{1}{2}}{940}$度。所以，上弦月星度＝合弦星度$+98\frac{653\frac{1}{2}}{940}$度。望月星度＝合朔星度$+98\frac{653\frac{1}{2}}{940}\times 2$，下弦月星度＝合朔星度$+98\frac{653\frac{1}{2}}{940}\times 3$。其中合朔星度由(3.22)式求得。

3. 推月食术

(1)计算所求年中的第一次月食所在月。

分四步计算：

第一步，求自人蔀会到所求年前一年之间共发生了几次月食〔入蔀会年求法参见(3.4)～(3.6)式〕：

$$(\text{入蔀会年}-1)\times\frac{\text{食数}}{\text{岁数}}=\text{积食}\frac{\text{食余}}{\text{岁数}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.41)$$

第二步，求所求年前与积食相应的总月数（积月），积月算外就是所求年前第一次月食所在月：

$$\text{积食}\times\text{月数}/\text{每食}=\frac{\text{积食}\times\text{月数}}{\text{食法}}=\text{积月}\frac{\text{月余分}}{\text{食法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.42)$$

第三步，求该食入于第几章第几月：

$$\text{积月}/\text{章月}=m\,\frac{\text{入章月数}}{\text{章月}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.43)$$

（m 为自然数或 0）

第四步，求末食发生在某年某月：

$$\frac{\text{入章月}-\text{入章闰月}}{12}=n\ \text{年}\frac{P\ \text{月}}{12} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.44)$$

从$(n+1)$年的天正月数起，第 $P+1$ 月为月食所在月。其中入章闰月：

$$\frac{\text{入章月}\times\text{章闰}}{\text{章月}}=\text{入章闰数}\frac{\text{余分}}{\text{章月}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.45)$$

若食在闰月，当(3.44)式中入章月增 1，入章闰数也增 1，临界情形是无余分，即：

$$\frac{(\text{入章月}+1)\times\text{章闰}}{\text{章月}}=\text{入章闰数}+1$$

将此式中的

$$\frac{\text{入章月}\times\text{章闰}}{\text{章月}}=\left[\frac{(\text{入章月}+1)\times\text{章闰}}{\text{章月}}-1\right]\frac{\text{余分}}{\text{章月}}$$

$$=\frac{(\text{入章月}+1)\times\text{章闰}-\text{章月}+\text{余分}}{\text{章月}}$$

化简得：余分＝章月－章闰＝235－7＝228

食在闰月时，余分为 228 分。反之亦然。即当余分为 228 分时，食在闰月。此结论也可直接由(3.45)式推知；当余分是 228，再加上月食所在月的余分 7，得数等于章月 235，月食所在月就是闰月。但是，前述“推闰月所在”法中说，余数满 4 以上，不必满 7，就能置闰。即 228+7 固然为闰月，今知不必加 7，加 4 即可。而 7 是月食所在月的闰余分，不可减，从 228 中减 4 得 224，因而，余分不必满 228，只要满 224 以上即得。下限 224，上限可以定为增 7 分，为 231。四分历说“余分满二百二

十四以上至二百三十一，为食在闰月”。如前所说，满 4 分虽可置闰，但不必一定置闰，还要根据中气所在判定：下月朔日是中气所在，则前月置为闰月，否则不必置闰。

以永建五年为例，由(3.4)、(3.5)式算得入蔀会年(距文帝后元三年)为 291 年，代入(3.41)式得：

$$(291-1)\times\frac{1081}{513}=611\,\frac{47}{513}$$

611 为积食，47 为食余。把积食代入(3.42)式：

$$\frac{611\times135}{23}=3586\,\frac{7}{23}$$

3586 为积月，7 为月余分。把积月代入(3.43)式：

$$\frac{3586}{235}=15\,\frac{61}{235}$$

61 为入章月数。先代入(3.45)式求闰月数：

$$\frac{61\times7}{235}=1\,\frac{192}{235}$$

192 为余分，余分不足 224，月食不在闰月。将闰月数和入章月数代入(3.44)式：

$$\frac{61-1}{12}=5$$

表示末食以前的积月恰等于 15 章零 5 年的月数，算外为永建五年天正月(四年十一月)，是下次月食发生的月份。

因每食 $5\,\frac{20}{23}$月，求下食，月数加 5，余分在(3.42)式算得的积月余分(永建五年例中为 7 分)上加 20，满 23 分化为一整月，即得。如永建五年例天正月加 5 得六月，人正为四月。月余分加 20 得 27，除去 23 分为 1 月，月变为天正七月，即五月，月余分剩 4。如此求下食，再加 5 月 20 分，得 11 月余 1 分。知永建五年五月、十一月有月食。

(2)推月食所在月朔日名。

由(3.41)式算得的末食前积月数化为积日，再由末食所入蔀首日名就能推知月食所在月朔的日名：

$$积月\times每月日数=积月\times 29\frac{499}{940}$$

$$=积月\times 29+\frac{积月\times 499}{940}=积日+\frac{积月\times 499}{蔀月}=P\frac{小余}{蔀月} \quad \cdots\cdots\cdots (3.46)$$

其中 P 为积月所含整日数，小余<蔀月。

整日 P 满 1 甲子则除去之，所余不满 1 甲子的部分，从所入蔀首日名数起，算外就是所求朔日的日名。

在永建五年例中，已算得积月为 3586；入蔀会年 291，该蔀会首为汉文帝后元三年，年名庚辰，日名甲子。291 去 4 甲子 240 年余 51，庚辰后第 51 年名庚午，知永建元年年名庚午。将积月代入(3.46)式得：$3586\times 29+\frac{3586\times 499}{940}=105897\frac{594}{940}$。$P=105897$，594 为小余。$P$ 除以 60，余数 57。自甲子后数第 58 日辛酉为该年天正月朔日名，与由前述(3.8)、(3.9)式算得的结果相同。

(3)求月食所在日名。

因月食必在望日，已知月食所在月朔日的大、小余，加上一个朔望月日数的$\frac{1}{2}$($29\frac{499}{940}\div 2=14\frac{719.5}{940}$)即得。四分历说："加大余十四，小余七百一十九半。小余满蔀月为大余，大余命如前，则食日也。"

以永建五年为例，前已算得月朔大余 57，加 14 得 71，去 1 甲子余 11。小余 594 加 719.5，得 1313.5，去 940 入大余，大余得 12，小余剩 373.5。大余算外 13，由蔀会首日名甲子后数第 13 日名丙子就是日食所在日。月朔为辛酉，丙子为本月十六日。

(4)求后食朔日和食日日名。

图 3.4 后食朔日计算法

先说朔，已知头食朔，每食 $5\frac{20}{23}$月，后食距头食朔至少有 5 个月。所

以，先在头食朔大小余上加 5 个月的日数（$147\frac{615}{940}$日，去 2 甲子 120 日，余 27 日 615 分），得到第 6 个月朔日（后食前某个月的朔日）大、小余。所以，四分历说求下食朔先“加大余二十七，小余六百一十五”。如图 3.4，头食 B 所在月的朔日为 A，自 A 点加 5 整月得第 6 个月的月朔 A'。AB 等于由积食计算积月的公式（3.41）所得的“$\frac{月余分}{食法}$月”，为不致混淆，设为$\frac{M}{食法}$（本节中把 $A'C$ 的长定为“月余分”）。$A'B'=AB$，那么 $AA'=BB'=5$ 整月。由于 $BC=5\frac{20}{23}$月，则 $B'C=\frac{20}{23}$月$=\frac{20}{食法}$月。而 $A'C=A'B'+B'C=\frac{M+20}{食法}$月，此时若 $M+20<$食法，则 $A'C=\frac{M+20}{食法}=\frac{月余分}{食法}<1$，$A'$便是后食 C 所在月的月朔日；若 $M+20>$食法，$A'C=\frac{M+20}{食法}=1\frac{月余分}{食法}$，$C$ 所在月的月朔大小余比 A'的大小余增加数恰一整月（A'大余加 29 得后食朔大余。A'小余加 499 分得后食朔小余）。下边讨论以上两种情况下“月余分”的特征，前一种情形：$M+20=$月余分，由于 $M\geqslant0$，月余分$\geqslant20$。后一种情形：$M+20-$食法$=$月余分，由于 $M<$食法，月余分<20。

综上所述，后食朔求法可这样表达：

命月余分＝积月余分＋食月余分，当月余分$\geqslant$20 时，

$$\left.\begin{array}{l}头食朔大余+27=后食朔大余\\头食朔小余+615=后食朔小余\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.47)$$

当月余分$<$20 时，

$$\left.\begin{array}{l}头食朔大余+27+29=后食朔大余\\头食朔小余+615+499=后食朔小余\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.48)$$

后食日求法与头食日求法相同，由后食朔大小余加半个朔望月得到。即：

$$\left.\begin{array}{l}后食朔大余+14=后食日大余\\后食朔小余+719.5=后食日小余\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.49)$$

所得小余应由实测数验证之。方法是将小余折算为漏刻数，视其与实测是否相符。此外还须注意，小余折算成的漏刻数若小于夜漏之半，食在头日；大于夜漏之半在后日。

以永建五年为例，前已算得朔日大余 57，小余 594。是由积月余分 7，得月余分＝20＋7－23＝4＜20。应由(3.48)式算后食朔得：后食朔大余 113，去 1 甲子 60 日余 53；小余分别加 615、499 得 1708 分，除去 940 分入大余，大余变为 54，小余成了 768；再由(3.49)求后食日大余 9，小余 547.5。

后食朔大余 54，小余 768，由此求得后食朔日名戊午，为天正七月朔。

后食日大余 9，小余 547.5，由此得后食日名癸酉。自朔日戊午到癸酉共 16 日，所以食日为天正七月十六日。将小余 547.5 化为刻：$\frac{547.5}{940}\times 100 \doteq 58.24$刻。查表知天正七月(夏历五月)夏至前后昼漏 65 刻，夜漏 35 刻，小余刻大于夜漏之半，夜漏已尽，后食日在大余算外(第 10 日癸酉)，否则应以算上(第 9 日壬申为后食日)。

(5)四分历提供的另一种算法。

第一步，先求积月：

$$\frac{(\text{上元以来年数}-\text{岁数}\cdot m)\times\text{章月}}{\text{章法}}=\text{积月}\frac{\text{月余}}{\text{章法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.50)$$

式中上元以来年数不包括所求年，m 是自然数，且满足 $0\leqslant$ 上元以来年数－岁数 $\cdot\, m<$ 岁数。

第二步，求后食月：

$$\frac{\text{积月}\times 112-\text{月数}\cdot n}{\text{食法}}=P\cdot\frac{\text{余分}}{\text{食法}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.51)$$

式中 n 是自然数，且满足 $0\leqslant$ 积月 $\times 112-$ 月数 $\cdot\, n<$ 月数。计算得到的分数中，整数部分 P 之前(因为 P 在积月之内，而积月是所求年底以前月数，所以应自所求年底往回数，第 $P+1$ 月)是所求年内的末次月食(由于交食周期只有 5 月余，此前在所求年内可能还有一食)。

(3.50)式不必解释，(3.51)式可这样理解：$\frac{\text{食法 }23}{\text{月数 }135}$等于每月食

数，即每月$\frac{23}{135}$食。将每月化为135分，食分只有23。月分比食分多112分（135－23＝112）。每个月多112分，在积月数内多出的总数是：积月×112分。其中每多出135分满一食周（食分是23），除去之。直到多出分数不足135分即不足一食周为止，表达式是：

积月×112－月数·n

其中n是自然数，而且满足0≤积月×112－月数·n＜月数。

再将上式除以23，由于23是每月食分，得数就是末食以后的月数。算法见（3.51）式，得数$P\cdot\frac{\text{余分}}{\text{食法}}$。由于"上元年数"中包括所求年，所以$P$是末食到所求年底的月数，自年底往前数的第$P+1$月为所求年的后一次月食所在月。

也可这样理解：由于$\frac{\text{积月}\times\text{食法}}{\text{月数}}$表示在积月之内有若干食，设此数为$Q$，上式写为：

①$\frac{\text{积月}\times\text{食法}}{\text{月数}}=Q\cdot\frac{\text{积月余分}}{\text{月数}}$。或者$=\frac{Q\cdot\text{月数}+\text{积月余分}}{\text{月数}}$。即：

积月×食法＝Q·月数＋积月余分。由此得：

②积月余分＝积月×食法－Q·月数。

从上面①式可以看出，积月余分满月数就得一食，所以，距离下食所差分数是：

③月数－积月余分＝月数－（积月×食法－Q·月数）。

从①式还可以看出，积月余分是将积月扩大23（食法）倍后得到的，由③式求得的差分与月的关系也是1∶23。要把它化为月，须缩小23倍，即：

$$④\text{距下食所差月数}=\frac{\text{月数}-\text{积月余分}}{\text{食法}}$$

$$=\frac{\text{月数}-(\text{积月}\times\text{食法}-Q\cdot\text{月数})}{\text{食法}}。$$

这是计算下食所在月的正式。现不用此式，将右端分子变换：月数－（积月×食法－Q·月数）＝（1＋Q）月数－积月×食法。若使（1＋Q）月数＝积月×月数－n·月数，即使1＋Q＝积月－n。从①式知为积月

内的食数，小于积月，因而是可以做到的，代入上式得：

$$(1+Q)\text{月数}-\text{积月}\times\text{食法}=(\text{积月}-n)\text{月数}-\text{积月}\times\text{食法}$$
$$=\text{积月}(\text{月数}-\text{食法})-n\cdot\text{月数}$$
$$=112\cdot\text{积月}-n\cdot\text{月数}$$

为(3.51)式左端分子。此式可这样理解：由于每月有$\frac{23}{135}$食/月，把1月化为135分，食占23分。积月所有月分数为：积月×135，即积月×月数；所有食分数是：积月×23，即积月×食法。月分与食分的差数就是：

$$\text{积月}\times\text{月数}-\text{积月}\times\text{食法}=\text{积月}\times(\text{月数}-\text{食法})=112\cdot\text{积月}$$

其中，满135分为1食周，除去之。n食之后，不能再减，余数是不足1周的分数，即从末食到再食所差分数：112积月－月数·n。此数虽不满一食周，满23分(每月食分)为1月，所以，从末食到再食所差月数是：

$$\frac{112\text{积月}-\text{月数}\cdot n}{\text{食法}}=P\cdot\frac{\text{余分}}{\text{食法}}$$

《律历志》原文述(3.50)式说："以岁数去上元，余以为积月。"[①] 岁数和上元单位都是年，二者相减，余数不可能是积月。中间必有脱漏。从前面说到的计算过程看，宜补为："以岁数去上元，余以章月乘之，章法而一，为积月。"此外，本段末句："余满食法得一，则天正后食。"所谓"天正后食"，并非指"天正月以后某月食"，而是指自天正月开始每年两次交食中的后一次交食。

(6)推月食发生的时刻。

四分历称为月食"加时"。所给公式是：

$$\frac{\text{小余}\times 12-\frac{1}{2}\times 940}{940}=P\cdot\frac{\text{余分}}{940} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3.52)$$

小余是由算得的月食积日余分，分母是蔀月940。表示大余日数之外，又$\frac{\text{小余}}{940}$日发生月食。1日为12时，小余除12，得数就是月食所在时辰。但是，可能除不尽，故不除，而把940分乘12，这样不是每日有940分，而是每日有940×12分，每个时辰就有940分。分母940乘12，分

① 《汉书·律历志》，中华书局1987年版，第3066页。

子小余也应乘 12，得出小余折合的分数，其中满 940 分就是一个时辰。每日自子正初刻始，子时的前半个时辰归前一日；后半个时辰入当日。每日的子时只有半个时辰。所以，计算时先减去属于前日的半个时辰（$\frac{1}{2}\times 940$），再用一个时辰的整分（940 分）除，得数中的整数部分 P 表示自子正初刻开始的时辰数。算外（$P+1$）为月食发生的时辰，即月食所加辰。

（7）求月食刻分。

四分历称为推“上水漏刻”。求法可以用（3.52）式求得的余分化为刻分数，但因每个时辰所含刻数不是整数，所以，不用此法，而由积日小余直接求刻数：

$$\frac{\text{小余}}{940}\times 100=Q\cdot\frac{\text{余数}}{940} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.53)$$

整数 Q 为刻数。由余数可得分数（每 1 刻为 10 分）：

$$\frac{\text{余数}}{940}\times 10=R\cdot\frac{\text{余分}}{940} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.54)$$

整数 R 为分数。

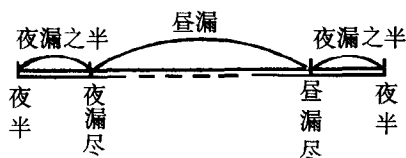



图 3.5　一日漏刻分布图

算得的刻分在当时的位置可见图 3.5，先由月食所在的节气从四分历提供的昼刻表中查得当时的昼漏、夜漏各若干刻，设为 $H_{\text{昼}}$、$H_{\text{夜}}$，再由算得的 Q 中除去 $\frac{1}{2}H_{\text{夜}}$，余为昼漏刻数。若大于 $H_{\text{昼}}$，从中减去 $H_{\text{昼}}$，余为今夜漏刻数；若 $Q<\frac{1}{2}H_{\text{夜}}$，食在昨夜后半夜（属昨日）。

以永建五年为例，前已算得首次月食在天正月十六日，大余 12，小余 373.5。将小余代入（3.52）式：

$$\frac{373.5\times12-\frac{1}{2}\times940}{940}=\frac{4482-470}{940}=4\frac{352}{940}$$，$P=4$，算外第 5 个时辰有月食。

将小余代入(3.53)式得月食刻数：

$$\frac{373.5\times100}{940}=39\frac{690}{940}$$，$Q=39$ 刻，690 为余数。把余数代入(3.54)式得食分数：

$$\frac{690\times10}{940}=7\frac{320}{940}$$，$R=7$ 分。

天正月十六日已入小寒节，从漏刻表[1] 中查得此时夜漏 54 刻 2 分，昼漏 45 刻 8 分。从算得的 39 刻 7 分中减夜漏之半 27 刻 1 分，余 12 刻 6 分。不足昼漏 45 刻 8 分，所以，月食在天正月 16 日昼漏 12 刻 6 分，月食不见。

4. 推五星隐见法

(1)推算日星末次会合于何年。

如前文所述知，五星每见年数为$\frac{日率}{周率}$，自上元以来到所求年之间的年数(积年)除以此数，得总合数，四分历称为“积合”：

$$上元积年\div每合年数=上元积年\div\frac{日率}{周率}=\frac{上元积年\times周率}{日率}$$

$$=积合\frac{合余}{日率} \quad\cdots\cdots(3.55)$$

积合是除得的整数，合余为余数，是不足一合的余分，也是末合(积合中的最后一合)到所求年末之间的时段。由于它是积年数乘周率后得到的数字余分，再除以周率就恢复成了年份：

$$\frac{合余}{周率}=退岁\frac{余数}{周率} \quad\cdots\cdots(3.56)$$

退岁是 1 时，距末合的时段大于 1 年，末合应在所求年的前一年；退岁是 2，在前二年；余类推。(3.56)式《律历志》有“不得焉退岁”[2] 的

---

① 见《后汉书·律历志下》，中华书局 1987 年版，第 3077 页。

② 同上书，第 3068 页。

话，应是“所得为退岁”之误。当合余小于周率，相除得不到整数，《律历志》说是“无所得”，末合在所求年，即所谓“星合其年”。金、水二星晨合、夕合相间出现，计历之初，即上元之初自晨合开始，所以，积合是奇数时，末合是晨合；是偶数时，末合为夕合。

《律历志》还说“其不满周率者反减之，余为度分”。由(3.55)式可知合余是由上元积年乘周率，再除日率得到的余数，可以理解为：把每年化为数目与周率相等的分数，数满日率为一合。从上元积年化成的总分数中去掉所有合分，剩余的不满一合的余分数就是合余。虽是余分，与年数之比为“1：周率”的比率不变。用周率减合余，就是用年分减余分，所得差是距再合的分数，因名为度分。不过此度分与每年$=365\frac{1}{4}$度的度分不同。

(2)求末合所在月。

《律历志》称为“星合月”。在前文已说到，星每合月数＝合积月$\frac{月余}{月法}$。

$$\begin{aligned}末合以前的总月数&=每合月数\times总合数\\&=合积月\frac{月余}{月法}\times积合\\&=合积月\times积合+\frac{月余\times积合}{月法}\\&=积月\frac{月余}{月法}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.57)\end{aligned}$$

《律历志》把“合积月×积合”叫做“小积”。得到积月后，求末合所在年中的月数按下式计算，无须再解释：

$$\frac{积月}{纪月}=B_1\frac{入纪月}{纪月}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.58)$$

其中入纪月为余数。已知每章235个月中有7个闰月，入纪月中的闰月数为：

$$\frac{入纪月\times7}{235}=\frac{入纪月\times章闰}{章月}=闰数\frac{闰余}{章月}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.59)$$

从入纪月中减去闰月数，用每年12个月除，满12个月为1年，所余不满12个月的部分就是末合的入岁月数，算外为星末合所在月：

$$\frac{\text{入纪月}-\text{闰数}}{12}=B_2\frac{\text{入岁月数}}{12} \quad \cdots\cdots (3.60)$$

由于星合在入岁月算外1月，该月又增闰月7分（每月分为235分），满章月235分多一闰。与推月食所在月一样，知闰余在224～231分之间时，入岁月算外1月，即星合月可能为闰月。

以永建五年木星为例：上元在汉文帝后元三年前9120年庚辰之岁，永建五年距上元9120＋291＝9411年。

先由(3.55)式求积合：$\frac{9411\times4327}{4725}=8618\frac{1347}{4725}$。8618为积合，1347为合余。按(3.56)式由合余求星末合所在年，由于合余小于周率，末合在当年（永建五年）。

再按(3.57)式由积合求末合前积月：

$$13\times8618+\frac{41606\times8618}{82213}=112034+4361\frac{29615}{82213}$$
$$=116395\frac{29615}{82213}$$

得数中116395为积月，29615为月余。由本节4(2)的其余三个公式计算末合所在月：

$\frac{\text{积月}}{\text{纪月}}=\frac{116395}{18800}=6\frac{3595}{18800}$，3595为入纪月。

$\frac{\text{入纪月}\times\text{章闰}}{\text{章月}}=\frac{3595\times7}{235}=\frac{25165}{235}=107\frac{20}{235}$，107为闰月数。

$\frac{\text{入纪月}-\text{闰数}}{12}=\frac{3595-107}{12}=290\frac{8}{12}$，8为入岁月数，算外为九月。

知木星末合在永建五年天正九月（人正七月）。闰余20<224，星合月不是闰月。

(3)推算星合月朔的日名。

既得入纪月，由月求积日，由积日求朔日名就很容易了。算式如下：

$$\text{入纪月}\times\text{每月日数}=\frac{\text{入纪月}\times\text{蔀日}}{\text{蔀月}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀月}} \quad \cdots\cdots (3.61)$$

把积日去60甲子，所余不足60日的部分为大余。在甲子表中，由纪首日名后数第“大余加一”日的甲子名就是所求朔日名。

(4)推算星合于该月第几日。

星合入月日数由二部分算得：一是推积月〔见(3.57)式〕所得的积月余分，二是推月朔所得〔见(3.61)式〕的积日小余。即入月日数等于：

$$
\begin{aligned}
&\text{月余所化日}+\text{积日小余}\\
&=\frac{\text{月余}}{\text{月法}}\times\frac{\text{蔀日}}{\text{蔀月}}+\frac{\text{朔小余}}{\text{蔀月}}=\frac{\text{月余}\times\text{蔀日}+\text{月法}\times\text{朔小余}}{\text{月法}\times\text{蔀月}}
\end{aligned}
$$

而月法＝周率×章法，蔀月＝章月×日法，代入上式：

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\text{月余}\times\text{蔀日}+\text{月法}\times\text{朔小余}}{\text{周率}\times\text{章法}\times\text{章月}\times\text{日法}}\\
&=\frac{\text{月余}\times\text{蔀日}+\text{月法}\times\text{朔小余}}{(\text{章法}\times\text{章月})\times(\text{周率}\times\text{日法})}\\
&=\frac{\text{月余}\times\text{蔀日}+\text{月法}\times\text{朔小余}}{4465\times\text{日度法}}\\
&=\text{入月日}\,\frac{\text{日余}}{\text{日度法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.62)
\end{aligned}
$$

正是《律历志》所给公式，其中把得数的整数部分叫做"入月日"，余数为"日余"。算外(入月日＋1)就是末次星合的日子。已知朔日名，入月日及末合日的日名可由甲子表查得。

以永建五年木星为例，先由(3.61)式算朔日名：

$$
\frac{\text{入纪月}\times\text{蔀日}}{\text{蔀月}}=\frac{3595\times27759}{940}=106163\,\frac{385}{940}
$$

从积日 106163 中除去 1769 甲子，余 23 日为大余，385 为小余。自纪首日名甲子后推第 24 日为丁亥，就是所求朔日名(即永建五年七月朔日名)。

再由(3.61)式推入月日：

$$
\frac{29615\times27759+82213\times385}{4465\times17308}=11\,\frac{3652370}{77280220}=11\,\frac{818}{17308}
$$

朔日丁亥，第 11 日名丁酉为入月日，算外第 12 日戊戌为日星末合所在日名。

(5)推算日星末合时所在天度。

《律历志》所给公式为：

$$
\frac{\text{周天}\times\text{度分}}{\text{日度法}}=\text{积度}\,\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.63)
$$

为说明该式意义，把左端作如下变换：

$$\frac{周天\times度分}{日度法}=\frac{周天\times(周率-合余)}{日法\times周率}=\frac{周天}{日法}\times(1-\frac{合余}{周率})$$

由(3.56)式知$\frac{合余}{周率}$是末合到所求年底之间的年数，$1-\frac{合余}{周率}$表示所求年初到末合之间的年数。因合余＜周率，所得年数也小于1。因每年为$365\frac{1}{4}$度$=\frac{周天}{日法}$，末合所在度数自应是$\frac{周天}{日法}\times(1-\frac{合余}{周率})$，(3.63)式得证。自斗宿$21\frac{1}{4}$度数起，满积度为入宿度。

(6)《律历志》求再合的计算公式。

①计算末合岁天正冬至日名：

$$\frac{(上元积年-退岁-80n)\times没数}{日法}=大余\frac{小余}{日法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.64)$$

式中n是待选自然数，满足$0\leqslant$上元积年$-$退岁$-80n<80$。上元积年减退岁，是自上元到末合的实有年数，减去80的倍数，是由于每80年所含日数是1甲子60日的公倍数($365\frac{1}{4}$日$\times80=29220$日$=487\times60$)，求冬至日名时，应从积日之中减去此数，而化为积日后减与化前减是一样的。乘没法21，再除日法4，其实是乘以每年日数去掉6甲子以后的数字，即乘以$5\frac{1}{4}$日。上元至末合之间的年数，乘以每年日数(去6甲子后)，所得自然数是冬至大、小余了。由冬至大余得冬至日名是很容易的。

②由冬至日名求末合所在日的日名，只要求出末合距冬至日数即得，此数由两项构成：一是冬至小余，是头年日分留下来的部分，它本来属于冬至日前，因历法只计整日，把它留到了冬至之后。二是末合在冬至后的日数，包括整日和日余两部分，可以由(3.63)式算得的积度和度余代替，这样得到下面的计算公式：

$$\frac{小余}{日法}+\frac{度余}{日度法}+积度=冬至后星合日数$$

将左端变化：

$$\frac{小余\times周率}{日法\times周率}+\frac{度余}{日度法}+积度=\frac{小余\times周率+度余}{日度法}+积度$$

$$=冬至后星合日数 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.65)$$

由冬至后日数和冬至日名，查表得到合日名。(3.65)式是《律历志》所给公式，原文说“以周率乘小余，并度余，余满日度法从度，即至后星合日数也”①，“余满日度法从度”句中的“余”字衍。

③求末合以后，星再合于某月：(3.57)式已求得末合前积月和月余；(3.60)式求得了末合的入岁月数；在五星参数中又有合积月和月余两个参数，是星每合所需月数和月余分。那么，求末合后再合所在月，只要把末合的入岁月数与合积月相加，再把末合的积月余分与每合积月余分相加，后者满月法化为整月，入前项即得：

$$再合月数=入岁月+合积月+\frac{积月余}{月法}+\frac{合积月余}{月法}$$

$$=入岁月+合积月+\frac{积月余+合积月余}{月法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.66)$$

所得月数的整数部分设为 P，满 12 为 1 年，除去之，余从末合所在月后数，算外就是再合所入月。其间若有闰月须除去，判断有无闰月的方法可将合积月与合积月余两项相加，乘以章闰，再加上前(3.59)式求得的末合闰余，满章月就有一个闰月，不满则无闰。

对金、水二星，前文已述及由积合奇偶判定出末合是晨合还是夕合。末合在晨，则再合在夕；反之末合在夕，则再合在晨。《律历志》说是“加晨得夕，加夕得晨”，意思是“加于晨得夕，加于夕得晨”。

(7)求再合所在月朔日名。

图 3.6　求再合朔日名图

如图 3.6，(3.57)式已算得末合 B 点以前的积月 OA 段和月余 AB 段，D 为末合之后星再合点。而且，由末合点 B 到再合点 D 之间的合积

① 《后汉书・律历志》，中华书局 1987 年版，第 3069 页。

月 BC 和月余 CD 也是已知的。欲求 D 点所在月的朔日名，须求出 D 点以前的积月数，由积月整数求积日，积日外 1 日就是所求朔日名。从图 3.6 可知，此积月包括四段，即 $OA+AB+BC+CD$，OA 段的积日大、小余已由(3.61)求得，只把后三段相加的结果加在它上面即可，AB 为积月余($\frac{\text{积月余}}{\text{月法}}$)，$BC$ 为合积月，CD 为每合月余$\frac{\text{每合月余}}{\text{月法}}$。上式可写为：

$$\frac{\text{积月余}}{\text{月法}}+\text{合积月}+\frac{\text{每合月余}}{\text{月法}}=H\,\frac{\text{月余}}{\text{月法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.67)$$

H 为(3.67)式左端三项相加所得的整数部分，月余数为畸零。式中 1、3 两项相加若小于 1，$H=$合积月，由 H 化为积日所得大、小余与每合积日大、小余数目相同。加上朔日大、小余(OA 段)，算外就是再合朔日名。《律历志》说“求朔日，以大小余加今所得”。“大小余”指五星参数中的每合积日大、小余；“今所得”指由(3.61)式推出的末合朔日大、小余，若末合积月余＋每合月余＜月法：

$$\text{末合朔日大小余}+\text{每合朔日大小余}=\text{再合朔日大小余} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3.68)$$

1、3 两项相加若大于 1，$H=$合积月$+1$，由 H 算得的大小余应是在由合积月算得的大余之上加 29，小余之上加 499。小余满蔀月(940)大余增 1 日，大余算外为再合朔日名。若末合积月余＋每合月余＞月法，有：

$$\left.\begin{array}{l}\text{末合朔日大余}+\text{每合朔日大余}+29=\text{再合朔日大余}\\ \text{末合朔日小余}+\text{每合朔日小余}+499=\text{再合朔日小余}\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \quad (3.69)$$

再合朔日小余满 940 化为 1 日入大余，大余满 60 日除去之。

以永建五年木星为例，前已由(3.57)式算得末合月余为 29615；木星月余为 41606；月法为 82213；两项月余之和为：$29615+41606=71221<82213$，知道应由(3.68)式计算。前由(3.61)式已算得末合积日大余 23，小余 385。木星每合积日大余 23，小余 847。两大余相加得 46，两小余相加得 1232。小余除 940 得 1 日入大余，大余变成 47，小余剩 292。自纪首日名甲子后数第 48 日辛亥就是再合所在月朔日名。

(8)求再合入于该月第几日及日名。

如图 3.7，B、D 分别为末合、再合点，B 所入月朔为 A，入月日数和

图 3.7　求再合的入月日数图

日余为 AB，已由(3.62)式算出。CD 为每合的入月日数和日余，BC 为每合积月整数，OA 为入纪整月数，都是已知的。欲求再合的入月日数，因 DA、BC 都是整月，取 $EC=AB$，则 $AE=BC$，$OA+AE$ 为整月，E 为月朔点，只要 $CE+CD<1$ 月，ED 为再合的入月日及余。即：

$$ED=AB+CD=\text{末合入月日及日余}+\text{每合入月日及日余}=\text{再合入月日及余} \quad (3.70)$$

式中两个日余之和满日度法得 1 日。就是《律历志》说的"求入月日：以入月日、日余加今所得，余满日度法得一，从日"。其中"入月日、日余"是五星参数，为每合的入月日数和日余；"今所得"指由(3.62)式算得的末合入月日和日余；"余满日度法"中的"余"是指末合、每合的入月日余分之和，它们的分母都是日度法，所以说"满日度法得一，从日"。

(3.70)式有两个问题需要解决：一是以 AE 代 BC 有可能会出现 1 日大小的误差。原因是：BC 段原为积月整数，自 B 点起算时无小余，延至 C 点，积月化日后，不足 1 日的部分为小余，入下月。今改为自 A 起算，A 点有上月遗留下来的小余(朔小余)，若此小余大于虚分，与 BC 段原来入于下月的小余相加满 1 日，应入于整月中，使整月多排一个大月。这样，AE 段比 BC 段多 1 日，ED 段也就比 $AB+CD$ 少 1 日。所以，《律历志》说"其前合月朔小余满其虚分者，空加一日"，"空加一日"就是算式所无，凭空加上 1 日的意思。AE 段加 1 日，入月日数则应减 1 日，等于末合入月日、日余加每合入月日、日余，减去 1 日。

二是(3.70)式表示的是 $AB+CD$ 段小于 1 月的情形。若 $AB+CD$ 大于 1 个月，应去掉 1 月，入前积月，剩余的不满 1 月的部分为入月日数。去掉的月份是大月还是小月(应减去 30 天还是 29 天)，可由再合所在月朔小余判定：小余不满 499 分，前月为大月，去 30 日；大于 499，前月为小月，只去 29 日。所以，《律历志》说："日满月先去二十九，其后合

月朔小余不满四百九十九，又减一日。”剩余的整日数为大余，就是所求入月日数，大余算外得再合日名。

以永建五年木星为例：由前(3.62)式已算得末合入月日为 11，日余 818；每合入月日 15，日余 14641。相加得整日 26，余分 15459，不满月。又由(3.61)式算得末合月朔小余 385 分，大于木星虚分 93，应从上边相加数 26 中减去 1 日得 25。即木星再合的入月日数是 25，日余是 15459 分(1 日＝17308 分)。

(9)求再合时所在星度。

《律历志》说：“以积度(、)度余，加今所得，余满日度法得一(、)从度。”“积度(、)度余”都是五星参数，是星每合运行的总度数减去周天(或周天的若干倍)以后剩余的度数及余分；“今所得”为末合以前的积度及余分，两者相加自然是再合时星度。由星度递减每宿矩度(自斗 21 度始)，至某宿不够减，为入某宿度。

5. 五星行步

详细记述五星运行的步骤或过程，三统历称之为“五步”[1]。四分历无名，姑借用之。《律历志》给出了行星每合之中运行变化的具体数据，包括伏、见、顺行、留、逆行等每步的行度及时日。

木星行步：

晨伏，经 16 日 7320.5 分，行 2 度 13811 分，星在日后 13 度余，见于东方。见后顺行。

顺行，每日行$\frac{11}{58}$度，经 58 日，行 11 度，转迟行。

迟行，每日行$\frac{9}{58}$度，经 58 日，行 9 度，停留不行。

留，经 25 日，转逆行。

逆行，每日行$\frac{1}{7}$度，经 84 日，退 12 度，复停留不行。

留，经 25 日，转顺行迟。

顺行(迟)，经 58 日，行 9 度，转疾行。

---

① 见《后汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 3070～3073 页。

顺行(疾),经 58 日,行 11 度,在日前 13 度有奇,夕伏西方。

将以上各步相加得(不包括晨伏)366 日,行 28 度。日星会合则星隐不见,称为“伏”。晨合称为“晨伏”,夕合称为“夕伏”。星合时日月同度。合后而离,但日星近,星仍不见,即合后一段相当长的时间内星仍不见。所以,前面说木星晨伏后经 16 日 7320.5 分(以日度法 17308 为分母),木星行 2 度 13811 分(分母也是日度法)。因日每天行 1 度,16 日余行了 16 度多,减木星行度,得 13 度余,为日星间相距度数。13 度余接近半次,日光掩不住星光了,此时星在日后,即日在东,星在西(日自西向东行,以东为前)。每天早晨日出前,木星见于东方,所以称为“晨见”。

此后,由于日行疾,星行迟,日星之间愈来愈远。经 366 日,日东行 366 度,星行才 28 度,差 338 度,加上起初相距的 13 度余,日星差 351 度余。周天 365.25 度,差 13 度余日超过星一周天,即差 13 度余日从背后追及星,日反而在星后 13 度余。此时星在东日在西,相距 13 度余。每天日落后,星犹在天,片刻即没,所以说是夕伏。夕伏后复经 16 日 7320.5 分,日比星多行 13 度余,日追及星,重又会合。前后二合之间,历 398日14641分,星行33度10314分(日行加一周天),平均每天行:

$$33\frac{10314}{\text{日度法}}\text{度}\div 398\frac{14641}{\text{日度法}}\text{日}=\frac{33\times17308+10314}{398\times17308+14641}\text{度/日}$$

$$=\frac{581478}{6903225}\text{度/日}=\frac{398}{4725}\text{度/日}$$

所以,《律历志》说:“通率:日行四千七百二十五分之三百九十八。”

火星、土星、金星、水星与木星相似,略。有了以上诸数据,星在任何时日的位置就能确定了。

6. 五步术

亦即计算五星行步的方法。

第一步,按前文推出合时星所在度分,自合时起算,所求时日距合时若超过星伏时日(如求木星,超过16日余),则星见。见时度分求法:

$$星合时度分+伏时行度分=星见时度分 \quad (3.71)$$

不超过星伏时日，按比例求出该时矩内的星行度数加在星合时度分上即可。

第二步，由星见度分加见后星行度分，即得星在度分。但是第一步求得的星见分是以日度法为分母，而见后的星行分的分母则不同，为使二者相加，先通分。“星见度分”中的整度不计，余分称为“星见度余”；星行度分中的分母（如木星疾行$\frac{11}{58}$度/日，迟行$\frac{9}{58}$度/日中的分母58），叫做“行分母”。设星见度余的分母由日度法化为行分母后，变成x分，x可由下比例式求得：

$$日度法:星见度余=行分母:x$$

$$x=\frac{星见度分\times行分母}{日度法} \quad (3.72)$$

《律历志》描述此式说：“行分母乘之分，如日度法而一。分不尽，如半法以上，亦得一。”首句“乘之分”中的“分”字，中华书局1987年版断入下句，此处从清代李锐《汉四分术》，“之分”指“星见度分”中的“分”。末句“如半法以上，亦得一”，是四舍五入的意思，(3.72)式中用分母除分子，剩余除不尽的部分，只要比分母“日度法”的一半以上大，可进位为整数。将星见度分的零分分母与星行分的分母化同以后，就能直接相加了。

第三步，星见度分与星顺行度分相加，逆行度分相减，留时无加无减。加满分母则化分为度。顺行、逆行分母不同时，相加之前先通分，通分法仿(3.72)式得：

$$新分=\frac{故分\times当行之分母}{故母} \quad (3.73)$$

“故分”、“故母”就是原来的分子、分母，“当行之分母”就是所化新分母。所得新分也有四舍五入的问题，不过当舍或入，与前相参而行。如顺行半分入为整分，是多计了半分；逆行时有半分也应入为整分，多减半分。《律历志》说：“其分有损益，前后相放。”“放”即“仿”字，益则俱益，损则俱损，一加一减，才能接近真值。清代李锐《汉四分历》说“相放者，前益者后损之，前损者后益之”，误。由所得星在度分求入宿度分与前法同，

经斗宿时，整度之外，多去$\frac{1}{4}$度(行母的$\frac{1}{4}$)。

《律历志》这一段最后指出，“五步”中说的星行度都是黄道度。若换算为赤道度，可按所附黄赤道度变换表计算，表中所列赤道度后注有进退度数，由赤道度进加退减便得到了黄道度。反之也可由黄道度得赤道度。

如求永建五年木星末见后200日所在天度。由(3.63)式求出木星末见所在天度：合余已算得为1347，度分＝周率－合余＝4327－1347＝2980，代入(3.63)式，$\frac{1461\times2980}{17308}=251\frac{9472}{17308}$，得251度9472分。自斗21$\frac{1}{4}$度数起，除去斗至壁北方七宿77度，奎至参西方宿80度，余94度9472分。入南方宿井33度、鬼4度、柳15度、星7度、张18度、翼17度，合94度。永建五年木星末合在南方翼宿17度9472分。

末合后200日木星行度：伏16日7320.5分，行2度13811分。由(3.69)式：星见度分＝伏时所行度分＋合时度分

$$=2°13811'+17°9472'=20°5975'$$

星见后顺疾行58日，行11度，顺迟行58日，行9度，留25日，逆行42日9987.5分，退$6\frac{9987.5/17308}{7}$度$\doteq6\frac{1}{7}$度。

至此距末合整200日。星见时20度5975分，1度＝17308分；逆行度分是6度，1度＝7分。先按(3.72)式把分母都化为7分：

$\frac{\text{星见度余}\times\text{逆行分母}}{\text{日度法}}=\frac{5975\times7}{17308}\doteq2.4$，把不足半分的部分舍弃，得2分。

最后依次相加：星见度分＋顺疾行度＋顺迟。

行度－逆行度分＝$20°2'+11°+9°-6°1'=34°1'$(式中$1°=7'$)。自翼宿后数：翼18度，轸16度1分，合为34度1分。所以知，永建五年木星末见后200日，在轸宿16度1分。黄道度为轸宿17度1分。

三、附表

1. 十二月中气

表 3.3 十二月中气名表

月名	十一月 天正	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月
中气	冬至	大寒	雨水	春分	谷雨	小满	夏至	大暑	处暑	秋分	霜降	小雪

按:《律历志注》引"月令章句"说"孟春以立春为节,惊蛰为中",表以雨水为中,与月令不同。

2. 二十八宿赤道度

表 3.4 二十八宿赤道距度表

星名	斗	牛	女	虚	危	室	壁	北七宿总	奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	西七宿总
赤道度	$26\frac{1}{4}$ (退2)	8	12 (进1)	10 (进2)	17 (进2)	16 (进3)	19 (进1)	$94\frac{1}{4}$	16	12 (退1)	14 (退1)	11 (退2)	16 (退3)	2 (退3)	9 (退4)	80
星名	井	鬼	柳	星	张	翼	轸	南七宿总	角	亢	氐	房	心	尾	箕	东七宿总
赤道度	33 (退3)	4	15	7 (进1)	18 (进1)	18 (进2)	17 (进1)	112	12	9 (退1)	15 (退2)	5 (退3)	5 (退3)	18 (退3)	11 (退3)	75

按:表中"进退度"是黄、赤道累积度数之差,赤道积度多为进,黄道积度多为退。表中所列既为赤道度,若注明"进"某度,减此度当为黄道积度;注明"退"某度,加此度为黄道积度。应当注意的是进退度不是单个星宿度的黄道、赤道度数差,因此某宿下所注进或退,不能说明该宿黄道度相对赤道度的大小。如娄宿赤道、黄道度都是12度,赤道度下注明"退1",它表示的是自牛前5度开始到娄宿之间的黄道累积度(94度)比赤道累积度(93度)多1度(见下表),因称"退1"。

表 3.5　黄、赤积度对照表

宿名	斗	牛	女	虚	危	室	壁	奎	娄	………	斗
赤道度	始点: $21\frac{1}{4}$	8	12	10	17	16	9	16	12	………	$21\frac{1}{4}$
赤道积度	→	5	13	25	35	52	68	77	93	………	344
黄道度	始点: $19\frac{1}{4}$	7	11	10	16	18	10	17	12	………	$19\frac{1}{4}$
黄道积度	→	5	12	23	33	49	67	77	94	………	346
黄赤道度差		0	1	2	2	3	1	0	-1		-2
进退度			进一	进二	进二	进三	进一		退一		退二

正因为此，计算入宿度时，不论入于娄初（如娄 1 度）还是娄末（如娄 12 度），都要把赤道度加 1 得黄道度。

3. 二十八宿黄道度

表 3.6　二十八宿黄道距度表

星名	斗	牛	女	虚	危	室	壁	北七宿总	奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	西七宿总
黄道度	$24\frac{1}{4}$	7	11	10	16	18	10	$96\frac{1}{4}$	17	12	15	12	16	3	8	83
星名	井	鬼	柳	星	张	翼	轸	南七宿总	角	亢	氐	房	心	尾	箕	东七宿总
黄道度	30	4	14	7	17	19	18	109	13	10	16	5	5	18	10	77

按：由黄道度求赤道度可以反用前表（表 3.5）中的进退数，如由赤道度求黄道度进减退加，由黄道度求赤道度则进加退减。因此，此表不复注进退值。

4. 二十四气的有关数值（参见表 3.7）

所谓“有关数值”包括每气日所在度、黄道去极度、晷影长短、昼夜漏刻、昏旦中星所在宿度等。表前后各有一段说明文字，依次解释如后。

（1）表数来源。

有些是实测数据，其他出于算法。如说：“黄道去极、日景（同‘影’）

之生，据仪表也。”是说黄道去极度与晷影长短两组数据是由仪表测得的，前者据浑仪，后者据圭表，合称“仪表”。“漏刻之生，以去极远近差乘节气之差，如远近而差一刻，以相增损。”是说昼夜漏刻数由下面的公式计算而得：

$$漏刻差=\frac{去极远近差\times 节气差}{二至去极远近差} \qquad (3.74)$$

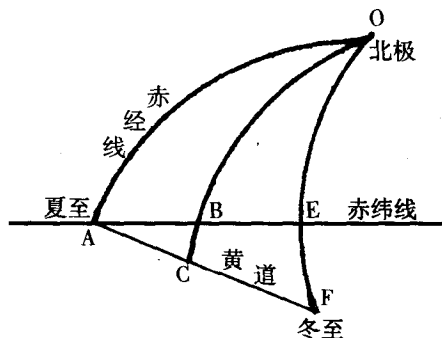



图 3.8　昼夜漏刻差计算图

欲求 A、B 两点的昼夜漏刻差，可由它们的去极远近差 BC，冬至、夏至去极远近差 EF（为 48 度，去赤道南北各 24 度），以及冬至、夏至昼夜漏刻差即所谓节气差 AE（20 刻：夏至点昼比夜长 20 刻，冬至点夜比昼长 20 刻）之间的比例关系求得。由于 AE、AF、OC、OF 四条线相交成的两个弧面直角三角形相似：$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$，有 $BC : EF = AB \cdot AE$，即：

$$AB=\frac{BC\cdot AE}{EF}=\frac{去极远近差\times 节气差}{二至去极远近差}$$

（3.74）式得证。求出 AB 后，由 A 点的昼夜漏刻加、减 AB 值得 B 点昼夜漏刻。又（3.74）式可写为：

$$去极远近差=\frac{漏刻差\times 二至去极远近差}{节气差}$$

已知黄道上某点的去极度，另一点的去极度可以通过计算它与某点间的去极远近差得到。因此可以说这是中国历法中已知的最早的计算黄

道去极度的公式。由于黄道去极度与赤纬度互余，它也是最早的计算黄道上的某点赤纬度的公式。

昏、旦中星所在度的算法是："昏明之生，以天度乘昼漏，夜漏减之，二百而一，为定度。以减天度，余为明；加定度一为昏。"这一段叙述的公式是：

$$\begin{cases} \text{旦中星度}=\text{周天度}-\dfrac{\text{周天度}\times\text{昼漏}-\text{夜漏}}{200} & \cdots\cdots (3.75) \\ \text{昏中星度}=\dfrac{\text{周天度}\times\text{昼漏}-\text{夜漏}}{200}+1 & \cdots\cdots (3.76) \end{cases}$$

(3.75)式右端第二项《律历志》称为"定度"，为说明该式来历，把定度写成下边形式：

$$\frac{\text{周天度}}{100}=\frac{\text{昼漏}}{2}-\frac{\text{夜漏}}{200}$$

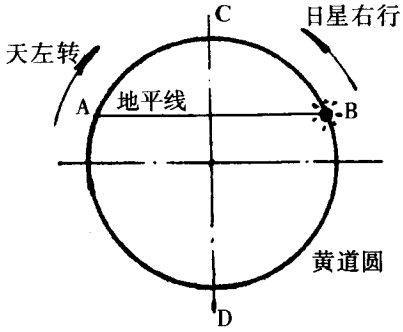



图 3.9 昏、旦中星图

从图 3.9 可知，当太阳随天左转到西方地平线上的 B 点时，已届黄昏，距中天 C 的刻数为$\frac{\text{昼漏}}{2}$刻。昼夜行天一周，历时百刻，所以折合天度为：($\frac{\text{周天度数}}{100\text{刻}}\times\frac{\text{昼漏刻}}{2}$)度。这就是日在昏时星度与中天间的星度差 $\overset{\frown}{BC}$。当日行至地平线上的另一点 A 处时，天届黎明，距中天 C 的距离是 $\overset{\frown}{A_{DB}C}=\text{周天度}-\overset{\frown}{BC}$。

但是,待求的昏、旦中星度并不等于 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{A_{DB}C}$。因为,必须在日没入地平之下,中天 C 处的星宿可见,才是星中天时,即昏、旦中星度比 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{A_{DB}C}$稍大。

设:$\begin{cases} 旦中天度=\overset{\frown}{A_{DB}C}+\triangle_1 \\ 昏中天度=\overset{\frown}{BC}+\triangle_2 \end{cases}$

《律历志》中$\triangle_1=\dfrac{夜漏}{200}$,$\triangle_2=1-\dfrac{夜漏}{200}$。代入上式得:

$$旦中天度=\overset{\frown}{A_{DB}C}+\triangle_1=周天度-\frac{周天度}{100}\times\frac{昼漏刻}{2}+\frac{夜漏}{200}$$

$$=周天度-\frac{周天度\times昼漏}{200}+\frac{夜漏}{200}$$

$$=周天度-\frac{周天度\times昼漏-夜漏}{200}$$

得(3.75)式。

$$昏中天度=\frac{周天度}{100}\times\frac{昼漏}{2}+(1-\frac{夜漏}{200})$$

$$=\frac{周天度\times昼漏-夜漏}{200}+1$$

得(3.76)式。

(3.75)式+(3.76)式=周天度+1,周天度是从昏中天 C 到旦中天 C 所经度数,此外多出的 1 度恰巧等于$\triangle_1+\triangle_2$的值,是在一周天外加入的经验值。

算出旦、昏中星度后,由表中的日所在度数值以及前面给出的二十八宿距度值,就能求得中天入某宿某度。精确到度,度以下分秒不具,只用强弱等字样表示约数。划分法如图 3.8,$A\sim B$ 为 1 度,划为 12 份。《律历志》说"其余四之",先分为 4 份。《律历志》说"如法为少","如法"就是用"法"(即除数)去除,所得数($\frac{1}{4}$)叫做"少";"二为半,三为太",少的二倍叫做"半",三倍叫做"太"。若仍分不尽,再把每份划分成三小份("不尽,三之"),共得 12 小份。每份中的第一小份称为"某份强",第二

小份叫做“下一份少弱”，如少、半之间的三小份，第一小份为“少强”，第二小份为“半弱”。余同。

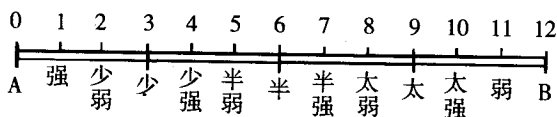



图 3.10 零分约数图

(2)二十四气数值表。

表 3.7 二十四气天度，昼、夜漏刻，晷影及昏、旦中星表

二十四气	日所在	黄道去极	晷影	昼漏刻	夜漏刻	昏中星	旦中星
冬　至	斗 21°8′，退 2	115°	1 丈 3 尺	45 刻	55 刻	奎 6°弱	亢 2°少强，退 1
小　寒	女 2°7′，进 1	113°强	1 丈 2 尺 3 寸	45 刻 8 分	54 刻 2 分	娄 6°半强，退 1	氐 7°少弱，退 2
大　寒	虚 5°14′，进 2	110°太弱	1 丈 1 尺	46 刻 8 分	53 刻 8 分	胃 11°半强，退 1	心半度，退 3
立　春	危 10°21′，进 2	106°少强	9 尺 6 寸	48 刻 6 分	51 刻 4 分	毕 5°少弱，退 3	尾 7°半弱，退 3
雨　水	室 8°28′，进 3	101°强	7 尺 9 寸 5 分	50 刻 8 分	49 刻 2 分	参 6°半弱，退 4	箕大弱，退 3
惊　蛰	壁 8°3′，进 1	95°强	6 尺 5 寸	53 刻 3 分	46 刻 7 分	井 17°少弱，退 3	斗少，退 2
春　分	奎 14°10′	89°强	5 尺 2 寸 5 分	55 刻 8 分	44 刻 2 分	鬼 4°	斗 11°弱，退 2
清　明	胃 1°17′，退 1	83°少弱	4 尺 1 寸 5 分	58 刻 3 分	41 刻 7 分	星 4°太，进 1	斗 21°半，退2
谷　雨	昴 2°24′，退 2	77°太强	3 尺 2 寸	60 刻 5 分	39 刻 5 分	张 17°，进 1	牛 6°半
立　夏	毕 6°31′，退 3	73°少弱	2 尺 5 寸 2 分	62 刻 4 分	37 刻 6 分	翼 17°太，进 2	女 10°少，进 1
小　满	参 4°6′，退 4	69°太弱	1 尺 9 寸 8 分	63 刻 9 分	36 刻 1 分	角太弱	危太弱，进 2

续表

二十四气	日所在	黄道去极	晷影	昼漏刻	夜漏刻	昏中星	旦中星
芒　种	井10°13′，退3	67° 少弱	1尺6寸8分	64刻9分	35刻1分	亢5°太，退1	危14°强，进2
夏　至	井25°20′，退3	67° 强	1尺5寸	65刻	35刻	氐12°少弱，退2	室12°少弱，进3
小　暑	柳3°27′	67° 太强	1尺7寸	64刻7分	35刻3分	尾1°太强，退3	奎2°，太强
大　暑	星4°2′，进1	70°	2尺	63刻8分	36刻2分	尾15°半弱，退3	娄3°太，退1
立　秋	张12°9′，进1	73° 半强	2尺5寸5分	62刻3分	37刻7分	箕9°太强，退3	胃9°太弱，退1
处　暑	翼9°16′，进2	78° 半强	3尺3寸3分	60刻2分	39刻8分	斗10°少，退2	毕3°太，退3
白　露	轸6°23′，进1	84° 少强	4尺3寸5分	57刻8分	42刻2分	斗21°强，退2	参5°半弱，退4
秋　分	角4°30′	90° 半强	5尺5寸	55刻2分	44刻8分	牛5°少	井16°少强，退3
寒　露	亢8°5′，退1	96° 太强	6尺8寸5分	52刻6分	47刻4分	女7°太，进1	鬼3°少强
霜　降	氐14°12′，退2	102° 少强	8尺4寸	50刻3分	49刻7分	虚6°太，进2	星3°太强，进1
立　冬	尾4°19′，退3	107° 少强	1丈	48刻2分	51刻8分	危8°强，进2	张15°太强
小　雪	箕1°26′，退3	111° 弱	1丈1尺4寸	46刻7分	53刻3分	室3°半强，进3	翼15°太强，进2
大　雪	斗6°1′，退2	113° 太强	1丈2尺5寸6分	45刻5分	54刻5分	壁半强，进1	轸15°强，进1
冬　至							

此表每栏数据可以这样检查："日所在"栏以冬至在斗21°8′为基数（1°＝32′），这是四分历采用的基准数，不一定由实测而得。已知日每天行1°，每气行15°7′，冬至后，每气加此数可得该气日所在。由此检得表中此栏数字无误。

“黄道去极”和“晷影”栏数字得自实测。漏刻数虽有计算公式，但可以粗略按每日昼、夜漏刻总为百刻的准则作粗略估计。由此知大寒昼、夜漏刻数必有一误，它的小分不可能都是 8 分。与第五章表 5.4 对照知，夜漏应为 2 分。

还有“昏中星”、“旦中星”栏中数字，由前面的计算知道昏、旦中星度之和等于一周天加 1 度，由此加以估算，可知正误。如冬至昏中星在奎 6 度弱，旦中星为亢 2 度少强。奎 6 度弱的积度为 83 减$\frac{1}{12}$度，亢 2 度少强的积度为 283 $\frac{5}{12}$，两者相加得 366 $\frac{1}{4}$度，恰是周天加 1 度。因此知冬至的昏、旦中星数是正确的。如此可测知每气昏、旦星数是否正确。

(3)求日所在星。

是上表的最后一段文字，大意是说：中星是以日在位置为判定基准的，而日行四岁一周，每气日行整度之外，还有小余，由小余判定日位的方法是：

节气昏明中星度－节气小余＝日星度 ……………………… (3.77)

计算时节气小余要化为少少强弱，与昏、旦中星度中的少太强弱相加减，加减的原则是：强为正值，弱为负值；强、弱相减时，“同名相去，异名从之”，就是同名相减，异名相加；二强相加为弱，从弱减强为强。即：

$$\left.\begin{array}{l} A\text{强}-B\text{强}=(A-B)\text{强} \\ A\text{弱}-B\text{弱}=(A-B)\text{弱} \end{array}\right\}\text{“同名相去”}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\text{强}-B\text{弱}=A\text{强}+|B\text{弱}| \\ B\text{弱}-A\text{强}=-(|B\text{弱}|+A\text{强}) \end{array}\right\}\text{“异名从之”}$$

少－强＝弱　“从强进少为弱”

少－弱＝强　“从弱退少而强”

又说上元年名庚辰，到熹平三年入历，中间共 9455 年，熹平三年年名甲寅。

从以上可见，四分历与三统历的区别，除参数值不同外，大处有三：第一，五星无大周、小周之说，岁星无大、小周，也就没有了超辰法。第二，四分历增加了黄赤道度求法，是由算得的赤道度增、减一个修正值

得到的，修正值是从浑仪上实测而得[1]，还没有黄、赤道度的换算公式。第三，四分历增加了二十四气漏刻差和昏、旦中星度的计算法。所以，总的说二者无大区别，只是四分历的计算更加详细而已。

① 见《后汉书》，中华书局 1987 年版，第 3076 页，注引张衡《浑仪》文。

第四章　改法以后的乾象历

汉灵帝熹平年间，刘洪造乾象历，载于《晋书·律历志》，说它的特征有四条：一是以为四分历之所以粗疏，主要由于斗分(回归年的零分数)太大，把回归年由 $365\frac{1}{4}=365.25$ 日缩小为 $365\frac{145}{589}=365.24618$ 日，在历史上第一次突破了四分系统历法的樊篱。二是冬至时、日所在天度由四分历的斗 21 度 8 分，改为 22 度。三是由《易经》卦数推导参数，因取名为"乾象历"。四是首创月行迟疾法和月行三道术，认为月行有迟疾，日月交会分阴阳表里。

下面首先介绍它采用的各项参数，与前大意相同者，不再详解。

一、乾象历采用的参数

1. 计算年、月、日名及节气、闰日的参数

(1)上元岁名己丑，至建安十一年(206 年)丙戌，积岁 7378 年。

(2)回归年取为 $365\frac{145}{589}=\frac{215130}{589}$ 日。其中 215130 名为周天，589 为纪法，145 为斗分。因以 589 年为 1 纪，每纪 31 章，每章 19 年。19 为章岁，31 为通数；2 纪 1178 年为 1 元，名为乾法。一乾二纪，前为内纪，后为外纪。1 元月数＝乾法×每年月数＝$1178\times\frac{235}{19}=14570$，名为元月。同样 1 纪月数＝纪法×每年月数＝$589\times\frac{235}{19}=31\times235=7285$，其中 235 为章月，7285 为纪月。1 年去 6 甲子，余 $5\frac{145}{589}=\frac{3090}{589}$ 日，3090 为余数。以余数与 1 甲子 60 的公约数 30，约简余数($3090\div30$)，得 103，

为没法。

(3)1个朔望月取为 $29\frac{773}{1457}$日 $\doteq$ $\frac{43026}{1457}$日。其中43026为通法，1457为日法。1年12个中气，名12为岁中，通法除以$\frac{岁中}{2}$得7171，名为会通。

(4)19年(1章)设7个闰月，7为章闰。

2. 交食参数

(1)月食周期。

取为 $5\frac{1635}{1882}=\frac{11045}{1882}$月，其中11045为会月，1882为会率。会月折合的年数，即除以每年月数得893为会岁，会岁除以章岁，得折合成的章数47，名会数。二分之一会率得941，为朔望合数。虽名为朔望合数，与朔望月并无关系。可以这样理解：由于月食周期为 $5\frac{1635}{1882}$月/食$=\frac{11045}{1882}$月/食，每1882食11045月，1882为月食大周期，由于月食时日月交会，这个大周期可以看做日月由初交到再交之间的距离，与一个朔望月相似。它的一半就与一个朔望月中从朔到望相似，因称朔望合数。

(2)月行率。

由于章月为235，表示在1章(19年)之中日月交会235次，每月日行1次，月绕地1周；月绕地235周为235月；日行235次，合19年或绕地19周。那么，月实际绕地转了(235+19)周，才可能与日交会235次。即月实行254周，称为小周，是月在1章岁(19年)之中的实转周数。而以小周乘纪法，除以章岁，或者说以小周×通数，所得(7874)都叫月周。所以，月在一纪之年行天周数叫做“月周”。

3. 五星参数

(1)一般参数。

与四分历相似，也有周率、日率、(每)合月数及月余、合月法、日度法、朔大余及小余、入月日及日余、朔虚分、斗分、度数及度余等。

以木星为例，每合周期$=\frac{日率}{周率}=\frac{7341}{6722}\doteq1.09208$年/合。在四分历

中，$\frac{日率}{周率}=\frac{4725}{4327}\doteq 1.09195$，乾象历的木星周期偏大。

$$每合月数=\frac{日率}{周率}\times 每年月数=\frac{7341}{6722}\times\frac{235}{19}=\frac{1725135}{127718}$$

$$=13\frac{64801}{127718}$$

式中 13 为合月数，64801 为月余，127718 为合月法。周率乘章岁得合月法。

$$每合整月的积日数=合月数\times 每月日数=13\times\frac{43026}{1457}=383\frac{1307}{1457}。$$

式中 383 是整日数，除去 6 甲子 360 日，余 23，为朔大余；不满整日的余分数 1307 为朔小余。朔小余差 150 分积满日法，不能化为整日，把 150 分叫做“朔虚分”。

由月余和朔小余求得入月日数：

$$\frac{月余}{合月法}\times\frac{通法}{日法}+\frac{朔小余}{日法}=\frac{64801}{127718}\times\frac{43026}{1457}+\frac{1307}{1457}=15\frac{3484646}{3959258}日$$

$$=入月日\frac{日余}{日度法}$$

其中 15 为入月日，3484646 为日余，3959258 为日度法。在四分历中，日度法＝周率×日法。此处日度法＝合月法×日法/会数＝$\frac{周率\times 章岁\times 日法}{会数}$＝周率×章岁×通数＝周率×纪法。

每合运行的天度数就是每合日数除去每岁日数的倍数：

$$\frac{日率-周率}{周率}\times\frac{周天}{纪法}=\frac{619}{6722}\times\frac{215130}{589}=33\frac{2509956}{3959258}$$

其中 33 为度数，2509956 为度余。

(2)星斗分。

五星还有一个参数叫做“斗分”，《律历志》说“斗分乘周率，为斗分”。前一个斗分指周天度数中的畸零部分：周天 $365\frac{145}{589}$度，145 叫做斗分。后一个斗分是五星参数，“斗”原为“升”字，据钱大昕校改。改正以后，有两个斗分，反而易生混乱，且不去管它，这个星斗分是由天斗分

145 乘以周率得到的，如木星斗分＝145×6722＝974690。余仿此。

星斗分这个参数是四分历所无。

火、土、金、水四星参数来历同木星。

二、推算法

1. 计算年、月、日、时法

乾象历自己丑到建安十一年积 7378 年，除以乾法 1178 岁，得 6 元，余 310 年。从建安十一年(206 年)上推 310 年为公元前 104 年，即太初元年。可见乾象历与太初历一样，都是自太初元年入元。

乾法 1178 不是 60 的公倍数，1 元之后年名不复，这与三统历相同。1 元日数：元月×每月日数＝$14570\times\frac{43026}{1457}=430260$，是 60 的公倍数。所以，1 元之后，日名重复。经 1 纪日名虽不重复，日为整数，年、月、日齐同，即年、月、日都自同一日的夜半子时起。所以，乾象历预先给出纪首日名(内纪为甲子，外纪为甲午)，从入纪年开始计算。

(1)推入纪年。

先求自上元以来到所求年之间的年数，除以乾法，剩余的不满乾法的部分若小于纪法，为入内纪甲子年的年数；若大于纪法，从其中减去纪法年，剩余的不足 1 纪的年数为入外纪甲午年的年数。设 H 为上元以来的年数，则

$$H=m\text{乾}+n\text{纪}+Q \quad \cdots\cdots (4.1)$$

其中 m、n、Q 为自然数或零，且 $\begin{cases} n\text{纪}<\text{乾法} \\ Q<\text{纪法} \end{cases}$，$Q$ 为入纪年，当 $n=0$ 时入内纪，$n=1$ 时入外纪。

(2)推所求年天正朔日名。

式中“$Q-1$”为所求年外的入纪年数。

$$(Q-1)\times\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}=\text{定积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}} \quad \cdots\cdots (4.2)$$

闰余 12 以来，所求年有闰。

$$定积月\times每月日数=定积月\times\frac{通法}{日法}=定积日\frac{小余}{日法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.3)$$

从定积日中除去 60 的若干倍，剩余的不满 1 甲子 60 日的部分为大余。自所入纪纪首日名起算，大余外日名就是所求年天正朔日名。

由于乾象历每月 $29\frac{773}{1457}$ 日，求下月朔日名，应在大余之上加 29，小余之上加 773。小余满日法 1457 则化为整日入大余，该月为大月。因此，只要上月小余满 684 以上，加下月日余 773 分，就大于日法 1457，下月必为大月。否则是小月。

(3)推算冬至日名。

每年去 6 甲子，余 $5\frac{145}{589}$ 日 $=\frac{3090}{589}=\frac{余数}{纪法}$。以入纪年外所求年乘之，得数中的整数部分为大余，畸零为小余。大余中满 1 甲子 60 日则除去之，剩余的不满 1 甲子的数目 a，由纪首日名起算，算外即第 $a+1$ 的日名就是所求年冬至日名。

$$(入纪年-1)\times\frac{余数}{纪法}=大余\frac{小余}{纪法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.4)$$

式中大余 $=60n+a$（n、a 都是自然数或 0）。

乾象历每气 $15\frac{515}{2356}$ 日，由冬至大小余求二十四气中其余诸气的方法是：冬至大余加 15，小余分母化同后，加 515，加满 2356 分为 1 日，入大余。自纪首日名起算，算外就是下一个节气小寒日名；大余再加 15，小余再加773，得大寒……如此进行下去，依次可得二十四气日名。

(4)推闰月。

与四分历(3.13)式相同，公式为：

$$\frac{(章岁-闰余)\times岁中}{章闰}=月序数\frac{余数}{章闰}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.5)$$

式中“章岁”，四分历称为“章法”；“岁中”是每岁中气数，等于 12，四分历直接说“以 12 乘之”，不言“岁中”。其余全部相同，不另释。

(5)推弦望日名。

以乾象历每朔望月日数除以 2 得望日数，除以 4 得弦日数，分别与

由(4.3)式得到的朔大余、小余相加。小余满日法 1457 化为整日，入大余，大余算外为弦望日名。

$$朔望月日数\div 2=29\frac{773}{1457}\div 2=14\frac{1115}{1457}日$$

$$朔望月日数\div 4=7\frac{557.5}{1457}日$$

所以，朔大余加 7，小余加 557.5，小余加后满 1457 化整日入大余，大余算外得上弦日。大余再加 7(或由朔大余加 14)，小余再加 557.5，同样，小余满 1457 化整日入大余，大余算外得望日。又加 7，加 557.5，得下弦日。第 4 次加 7，加 557.5，得下月朔。

与四分历一样，由弦望小余折合成刻数，若不满相邻节气夜漏刻数之半，弦望必在黎明之前，算做头一日弦望。大于漏刻之半，弦望在黎明后者为当日。以冬至附近日为例，冬至夜漏 55 刻(乾象历二十四节气昼夜漏刻数与四分历同)，半夜刻数折合日分为$\frac{55}{2}\times\frac{1457}{100}=400.675\approx 401$。弦望小余不满 401 分者，由大余定弦望日；小余大于 401 分，由大余算外定弦望日。

乾象历与四分历一样也是每日百刻，每刻 10 分。由小余求刻数：小余$\times\frac{100刻}{日法}=刻数\frac{刻余}{日法}$。由其中刻余求分：$\frac{刻余\times 10}{日法}=分数\frac{分余}{日法}$。

(6)推没日。

先仿四分历中的(3.19)式推所求年冬至前的积没数：

$$\frac{(入纪年-1)\times 余数}{纪法}=积没\frac{没余}{纪法} \qquad (4.6)$$

在四分历中，“入纪年”改用“入蔀年”，“余数”叫做“没数”，“纪法”叫做日法。

乾象历每年 $365\frac{145}{589}$日，去 6 甲子余 $5\frac{145}{589}=\frac{3090}{589}$日，按四分历中的解释，每 589 年 3090 没，每没日数是：$365\frac{145}{589}\times\frac{589}{3090}=\frac{215130}{3090}=\frac{7171}{103}$。其中 7171 为会通，103 为没法。

(4.6)式中积没余数是$\frac{没余}{纪法}$，距下一没所差分数为$1-\frac{没余}{纪法}=\frac{纪法-没余}{纪法}$。乘以每没日数，就是冬至后的没日距冬至天数：

$$\frac{纪法-没余}{纪法}\times\frac{7171}{103}=\frac{(纪法-没余)\times\frac{会通}{没法}}{纪法}=\frac{大余\frac{小余}{没法}}{纪法}\quad\cdots\cdots\quad(4.7)$$

乾象历述此式说"有余加尽积为一，以会通乘之，满没法为大余，不尽为小余。大余命以纪，算外，冬至后没日"。对照(4.7)式看，"有余"指没余不是零，即算出积没后还有一个余数；"加尽积为一"指此余数加上另一个数，就能使它与"积"一样大的这么个数字。因没余小于纪法，没余积满纪法就成一没，入于积没了，所以，"积"指"纪法"。使余数能够"尽积"的数自应是(纪法－没余)。即是说"加尽积为一"指的是(纪法－没余)这么个数字。此后就容易懂了。"大余命以纪"，即大余除以纪法，得到的整日数，算外，就是冬至距下没的日数。

由于每没等于$\frac{7171}{103}=69\frac{64}{103}$日，求次没该加大余69，小余64，小余满没法103化为整日入大余。小余为零时为灭日。

(7)推所求年天正月朔日夜半日所在天度数。

由于日每天行1度，由(4.3)式求得的定积日数就是入纪以来到天正月朔夜半前日行总度数。其中满周天度($365\frac{145}{589}$度)则除去之，剩余的不满周天度的部分就是日所在天度。即：

$$定积日\div365\frac{145}{589}=定积日\times\frac{纪法}{周天}=N\frac{余数}{周天}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.8)$$

N是积度中包含的周天度的倍数，应除去不计。由于余数是定积日或说是积度数乘以纪法得到的数字，把它还原为度数应再除以纪法，即：

$$\frac{余数}{纪法}=天度\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.9)$$

顺次以二十八宿各宿度除，不满某宿度时，就是入于该宿的度数。乾象历始于二十八宿中的牛前5度，斗宿为$26\frac{145}{589}$度(余与四分历同)。所以，经斗时不可忘记有零分145分(每度589分)。

(8)推所求年天正朔夜半月所在天度。

由于月 19 年行天 254 周(19 为章法,254 为小周),每年行天$\frac{254}{19}$周。而日每年行天 1 周,日、月速度比是 $1:\frac{254}{19}$。日每天行 1 度,月每天行度就是$\frac{254}{19}$度。入纪后到所求年前月行总度数就是:总度数=定积日×每日行度=定积日×$\frac{254}{19}$=$\frac{\text{定积日}\times\text{小周}}{\text{章法}}$。同样满周天度则除去之,即从中除去周天度的若干倍,剩余的不满周天度的部分就是月所在天度:

$$\frac{\text{总度数}}{\text{周天度}}=\frac{\text{定积日}\times\text{小周}}{\text{章法}}\div\frac{\text{周天}}{\text{纪法}}=\frac{\text{定积日}\times\text{小周}\times\text{纪法}}{\text{周天}\times\text{章法}}$$

$$=\frac{\text{定积日}\times\text{月周}}{\text{周天}}=N\,\frac{\text{余数}}{\text{周天}}\quad\cdots\cdots\quad(4.10)$$

其中 N 为总度数所含周天度的倍数,略去不计。月周=$\frac{\text{小周}\times\text{纪法}}{\text{章法}}$,是每纪月行周天数,设为 L。L 化为分,纪化为日:$\frac{L\text{ 周天}}{\text{纪}}=\frac{L\cdot\text{周天分}}{589\text{ 年}\times\frac{\text{周天分}}{\text{纪法}}}=$ L 分/日。即月周数也是每日月行分数。因此,(4.10)式中的分子和余数单位都应是分,单位制与周天分相同:1 度=589 分。余数(分)化为度:

$$\frac{\text{余数}}{\text{纪法}}=\text{天度数}\quad\cdots\cdots\quad(4.11)$$

(4.11)式得数中的整数为度,除不尽的部分为分。同样用二十八宿各宿度减(从牛前 5 度始),至某宿,所余不足该宿度数,此余数就是夜半月入该宿的宿度数。

求下月(天正二月)朔月所在度。因历法大月 30 日,小月 29 日。以小月 29 天计,从上月朔到次月朔月行度为:每日行度×29=$\frac{254}{19}\times29$=$387\frac{13}{19}$。减去 1 周天:$387\frac{13}{19}-365\frac{145}{589}=22\frac{258}{589}$度。所以,下月若为小月,在(4.11)式求得的天度数中,度数加 22,分数加 258,就是下月朔月

所在度。若是大月，月多行 1 日，增$\frac{254}{19}=13\frac{7}{19}=13\frac{217}{589}$度，即要再加 13 度，217 分。分满纪法 589 化为 1 度。

乾象历说："其冬下旬，月在张、心署之。"意思是说：每年冬季下旬，月在张、心二宿之间时，历法要标明这个日子。理由：据《隋志》记载，南陈制，月在张、心日不得行刑。是忌日。由此知，大约汉末已有此制。旧说：冬季于五行属水，二十八宿心在卯，属木；张在午，属火。水长生于申，死于卯，胎于午。死日阴气太重，胎日物始成形，忌刑杀是可以理解的。

(9)推合朔时日、月所在度。

合朔时日、月同度，照例由二部分组成：一是由(4.3)式算得的"小余"，为朔小余；二是由(4.8)式算得的"余数"，除以纪法后就能得出天正朔夜半时，日所在度分。朔小余的分母是日法(1457)，而由(4.8)式求得的夜半度分分母是纪法(589)，周天宿度中斗宿的畸零部分分母也是纪法。所以，为使二数能够相加，而且加得的度分能与周天度分相比较，应该通分，分母都化为纪法。

$$\frac{朔小余}{日法}+\frac{余数}{纪法}=\frac{朔小余\times\frac{章岁}{会数}}{日法\times\frac{章岁}{会数}}+\frac{朔日夜半度分}{纪法}$$

$$=\frac{朔小余\times\frac{章岁}{会数}}{纪法}+\frac{朔日夜半度分}{纪法}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.12)$$

其中右第一项分子"朔小余$\times\frac{章岁}{会数}$"的整数部分为大分，不足分母的部分为小分，舍去小分，(4.12)式可以写为：

$$合朔时日、月所在度分=\frac{大分+朔日夜半度分}{纪法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.13)$$

求下月应加上一个朔望月的天数(也是度数)$29\frac{773}{1457}$，其中 1457 为日法，也应化为纪法：$773\times\frac{章岁}{会数}/1457\times\frac{章岁}{会数}=312\frac{23}{47}/589$。所以，求下月只要把(4.13)式算的度数加 29，大分(分子中的整度数)加 312，小分(分子中的零分数)加 23 分即得。运算中小分积满 47(会数)分，化为

1 大分，大分积满 589(纪法)化为 1 整度。

(10)求弦、望时，日所在度。

在本节(9)中已算出 1 个朔望月的日行度数为 $29\frac{312\frac{23}{47}}{589}$ 度，$\frac{1}{2}$ 月、$\frac{1}{4}$ 月日行度分别为：$29\frac{312\frac{23}{47}}{589}\div 2=14\frac{450\frac{35}{47}}{589}$ 度，$29\frac{312\frac{23}{47}}{589}\div 4=7\frac{225\frac{17.5}{47}}{589}$ 度。

把(4.13)算得的合朔时日所在度分加朔望月的 $\frac{1}{2}$ 得望时日度分，加 $\frac{1}{4}$ 朔望月得上弦日度分，加 $\frac{3}{4}$ 朔望月得下弦日度分。即合朔度加 7 得上弦度，合朔大分加 225，小分加 17.5 得上弦大、小分。再加度 7，大分 225，小分 17.5；或者由朔日度分直接加度 14，大分 450，小分 35，都能得望时日度分。三次加度 7，大分 225，小分 17.5 得下弦度分。

(11)求弦、望时，月行度分。

先计算月亮在 1 个朔望月中运行的天度数，已知每天行 $13\frac{7}{19}$ 度，1 个朔望月行：

$$29\frac{773}{1457}\times 13\frac{7}{19}=\frac{43026}{1457}\times\frac{254}{19}=\frac{10928604}{27683}$$

$$=394\frac{21502}{27683}=394\frac{457\frac{23}{47}}{589}\text{度}$$

457 为大分，23 为小分(此数也可由 1 周天 $365\frac{145}{589}$ 加 1 个朔望月 $29\frac{773}{1457}$ 获得)。

上弦行度为全月行度的 $\frac{1}{4}$：

$$394\frac{457\frac{23}{47}}{589}\div 4=98\frac{408\frac{41}{47}}{589}$$

98 为全度，408 为大分，41 为小分。与(4.13)式算得的合朔度分相加得上弦度分，小分满会数(47)入大分，大分满纪法(589)入全度。再加得望，三加得下弦，四加得下月合朔度分。

(12)求某月昏或黎明时日与月所在天度。

本节(7)已求得天正朔夜半时日所在天度，此后，过 1 日增 1 度，大月增 30 度，小月增 29 度，如此任何一日的日行度都可求出，设为 M。此数是所求日夜半时日所在天度，本节是由 M 求此日黄昏及次日黎明时的天度。显然，黎明度只要把 M 增以该日夜漏之半即得。黄昏度须增 1 日后再减夜漏之半。昼夜漏时刻数可从表中查出[1]，只要把漏刻数换算为天度分，全部问题就都解决了。换算法参见四分历(3.36)、(3.37)式中的方法化为日行分：

$$\frac{\frac{1}{2}\text{夜漏数}}{100}\times\text{纪法}=\frac{\text{夜漏数}\times\text{纪法}}{200}$$

化为月行分：$\frac{\frac{1}{2}\text{夜漏数}}{100}\times\text{纪法}\times 13\frac{7}{19}=\frac{\text{夜漏数}\times\text{月周}}{200}$ ……………… (4.14)

乾象历把以上二数称为明分。求次日黄昏应加 1 度(日行)或 $13\frac{7}{19}$ 度(月行)，再减明分。求日度应把 1 度破为分，数同纪法。即 1 度一明分＝纪法一明分。

求月度破分应乘以日法：

$13\frac{7}{19}\times$日法一明分＝月周一明分

乾象历把以上二数称为昏分。以昏、明分各加夜半度分得昏明度分。

---

[1] 乾象历不具此表，可使用四分历中提供的表，见《后汉书·律历志下》，中华书局 1987 年版，第 3077～3079 页。

2. 推算月蚀（三统历、四分历皆作食，乾象历作蚀）

（1）推月蚀所在月。

与四分历一样，先从上元积年中减去月蚀的大周期（会岁），由剩余的不足一个周期的年数求月数，名积月，由积月求蚀月。

$$\frac{\text{上元积年}-1}{\text{会岁}}=M\,\frac{\text{余年}}{\text{会岁}} \quad \cdots\cdots (4.15)$$

$$\text{余年}\div\frac{\text{会岁}}{\text{会率}}=\frac{\text{余年}\times\text{会率}}{\text{会岁}}=\text{积蚀}\frac{\text{蚀余}}{\text{会岁}} \quad \cdots\cdots (4.16)$$

$$\text{积蚀}\frac{\text{蚀余}}{\text{会岁}}\times\frac{\text{会月}}{\text{会率}}=\text{积月}\frac{\text{月余}}{\text{会率}} \quad \cdots\cdots (4.17)$$

（4.17）式中“积蚀$\frac{\text{蚀余}}{\text{会岁}}$”，乾象历称为“有余加积一”。本来只用“有余”即$\frac{\text{蚀余}}{\text{会岁}}$乘每食月数（$\frac{\text{会月}}{\text{会率}}$）得到末蚀以后的积月数，算外就是下一蚀所在月。但是，这样求得的积月中是否有闰月，不得而知。虽知积月数，不能确定下一蚀在所求年中的第几月。只好连同“积蚀”在内，一起计算积月了。这样算得的积月，其实是“余年”包含的总月数，其中所含闰月数是容易计算的。去掉闰月数，剩余的部分满 12（岁中）为 1 年，除去之，所余不满 12 的数目之外，就是下一蚀所在的月序数。即：

$$\text{余年}\times\frac{\text{章闰}}{\text{章岁}}=\text{积闰}\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}} \quad \cdots\cdots (4.18)$$

$$\frac{\text{积月}-\text{积闰}}{\text{岁中}}=N\,\frac{\text{月序数}}{\text{岁中}} \quad \cdots\cdots (4.19)$$

（M、N 都是自然数）

（2）求再蚀所在月。

由于月蚀周期为 $5\frac{1635}{1882}$月，在（4.17）式算得的结果中积月加 5，月余加 1635。加后的月余满会率（1882）为 1 月，入积月，就得到了再蚀所在月份。

以上（1）、（2）算出的都是月蚀所在月，而所在日必是该月的望日。

3. 杂推

（1）推卦用事日。

此项计算是三统历、四分历历法所无，乾象历首次计入历法。唐代

僧一行历议①说，"推卦用事日"本于京房，大要是把一个回归年的天数分配给六十四卦，其中坎、离、震、兑四正卦分从二至、二分日起，各得$\frac{73}{80}$日；相邻的颐、晋、井、大畜四卦各得$5\frac{14}{80}$日；其余五十六卦各得$6\frac{7}{80}$日。除了北齐的天保历之外，自乾象历以来都用此法。清人钱大昕、李锐释乾象历也采用这种说法。问题在于如何与乾象历原文统一起来。原文是："因冬至大余，倍其小余，坎用事日也。""因冬至大余"，是说冬至大余原来多少，还是多少，无加无减；"倍其小余"，是由于冬至小余分母为纪法589，而卦气所用分母为乾法1178，是纪法的2倍。把冬至小余改为卦气分数，分母增加1倍，分子（小余）也应增加1倍，所以说是"倍其小余"。接着说是"坎用事日也"。应该说是"坎始用事日也"。四正卦各自二至二分始，坎始于冬至。

乾象历接着说："加小余千七十五，满乾法从大余，中孚（始）用事日也。求次卦，各加大余六，小余百三。其四正（前）各因其中日，而倍其小余。"〔"（）"内字为笔者所增〕

前三句是说，中孚所主，自冬至后$\frac{1075}{1178}$日始。其余三正卦仿此；中三句是说，中孚以后每隔$6\frac{103}{1178}$日得一卦；末尾二句中第一句"四正前"指四正卦之前的四卦：坎卦之前为颐，震卦之前为晋，离卦之前为井，兑卦之前为大畜。这四卦都"因其中日"，即各以冬至、夏至、春分、秋分四个中气为分界，所主日为卦气余日。第二句是说，它们的小余是各"次卦"小余（103）的2倍日算法为：

每季，$365\frac{145}{589}\div4=91\frac{367}{1178}$日。

六十四卦分入每季各得十六卦。以首季为例，自冬至起，$\frac{1075}{1178}$日得中孚，是坎卦主$\frac{1075}{1178}$日。中孚卦以下各得$6\frac{103}{1178}$日，末卦为晋。晋所得

① 见《新唐书·律历志中》，中华书局1987年版，第598～599页。

日为：$91\frac{367}{1178}-(\frac{1075}{1178}+6\frac{103}{1178}\times14)=5\frac{206}{1178}$日。

其余三季各卦仿此，得四季各卦分布如下：

坎，　中孚，　复，　屯　……　随，　晋；

$\frac{1075}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$ …… $6\frac{103}{1178}$，$5\frac{206}{1178}$；

震，　解，　大壮，　豫　……　家人，　井；

$\frac{1075}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$ …… $6\frac{103}{1178}$，$5\frac{206}{1178}$；

离，　咸，　姤，　鼎　……　萃，　大畜；

$\frac{1075}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$ …… $6\frac{103}{1178}$，$5\frac{206}{1178}$；

兑，　贲，　观，　归妹　……　蹇，　颐。

$\frac{1075}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$，$6\frac{103}{1178}$ …… $6\frac{103}{1178}$，$5\frac{206}{1178}$。

如此坎、震、离、兑四正卦各得$\frac{1075}{1178}$日，晋、井、大畜、颐各得$5\frac{206}{1178}$日，其余中孚等卦得$6\frac{103}{1178}$日。$\frac{1075}{1178}\approx\frac{73}{80}$，$5\frac{206}{1178}\approx5\frac{14}{80}$，$6\frac{103}{1178}\approx6\frac{7}{80}$。与一行及钱氏、李锐说相合。

(2)推五行用事。

与三统历中的推法相同：$365\frac{145}{589}\div5=73\frac{29}{589}$日，五行中每行用事$73\frac{29}{589}$日。但每季$365\frac{145}{589}\div4=91\frac{183\frac{1}{2}}{589}$日，木、火、金、水分主四季中的前$73\frac{29}{589}$日，剩余$91\frac{183\frac{1}{2}}{589}-73\frac{29}{589}=18\frac{154\frac{1}{2}}{589}$日是土所主。由于每季都有18日余归土所主，叫做“土王四季”。

由于在历法中，年始于冬至而季始于四立（立春、立夏、立秋、立冬），自立冬到冬至合三气$45\frac{1545}{2356}$日。即每年冬至以后有

$73\frac{29}{589}-45\frac{1545}{2356}=27\frac{927}{2356}$日为水用事。过了这 $27\frac{927}{2356}$天便是土用事日，$18\frac{154\frac{1}{2}}{589}=18\frac{618}{2356}$日以后为立春节，木始用事；$73\frac{29}{589}=73\frac{116}{2356}$日后，土再用事 $18\frac{618}{2356}$日，到了立夏节，开始火用事；$73\frac{116}{2356}$日后土用事 $18\frac{618}{2356}$日是立秋节，金始用事；$73\frac{116}{2356}$日之后又是土用事 $18\frac{618}{2356}$日，接着是水用事；三气 $45\frac{1545}{2356}$日之后为冬至节，下一年就开始了。

乾象历述其算法说，在冬至的大、小余之上加大余 27，小余 927。小余满 2356 化为大余，得到土用事之初的大、小余；在此大、小余之上加大余 18，小余 618，得到立春日木用事之初的大、小余；再加大余 73，小余 116，得土复用事之初的大、小余；又加大余 18，小余 618，为火用事初的大、小余……都是小余满 2356 分化为 1 日，入大余。

(3)推加时。

就是推算五行初用事的时辰，照例由大余定日，小余定时辰。因每日十二辰，将小余的分母(每日分数)除以 12，得每辰分数。用它除小余，得数就是自夜半开始的辰次数。但是，这样计算很容易因除不尽使计算复杂化，所以不除，改为把小余乘 12。这时小余原来的分母就由每日分数变成了每辰分数，用它去除小余乘 12 得到的积，商就是所求时辰的序号(从子时起算)。

此法不仅适用于求五行加时，前面算出的合朔、弦、望与冬至等节气，以及六十四卦用事等所加时辰都能用此法算出。三统历、四分历都用此法计算。乾象历不同处是计算“朔、弦、望用定小余”。三统历、四分历计算用的是平小余(小余的平均数)，而乾象历用定小余(小余的真值)。乾象历认为月行有迟疾变化，在每月的不同时段上各不相同，像三统历、四分历那样把一个朔望月除以 2 得望，除以 4 得弦只是近似值，所以，第一次提出了用定小余，这是乾象历的一大贡献。定小余的求法详于后。

(4)推漏刻。

与推加时的方法相同，由于一日为百刻，把小余的分母(1日分数)除100，得1刻分数，用此数除小余就得到了加时的刻数。同样为避免除不尽带来的麻烦，直接把小余的分母当做1刻分数(等于扩大了100倍)，小余也应扩大100倍，而后用分母除，得刻数。1刻=10分，除不尽的余数乘10后，再除得分数。以推五行用事为例，若某年冬至无大、小余，求冬至后第一个土王日所加漏刻。前面说过，冬至后$27\frac{927}{2356}$日内为水王，水王以后为土王。由27定土王所在日(算外，即冬至后第28日为土王日)，求土王在此日的几刻几分，须由小余927算出。算法本应把分母2356除100，得出每刻23.56分，$927\div23.56\doteq39.34$刻。按四分历的表示法为39刻3分半弱。这种算法是小数除法，古时以为烦琐，不除。直接把分母2356当做每刻分数，相当于把分母扩大了100倍，因而分子也要相应扩大100倍：927×100。与分母相除：$\frac{927\times100}{2356}=39$刻，余816分。因每刻等于10分，将余数乘10，再除$\frac{816\times10}{2356}=3$分余1092，余数将近分母的一半，称半弱。总得数为39刻3分半弱。

乾象历概括上法是："以百乘小余，满其法得一刻。不尽什(同'十')之，求分。[1]"

求出漏刻数后，查表(见《后汉书·律历志》)得到与所求日相近节气的昼夜漏刻数，自夜分尽时起算，夜分尽时为昼漏刻分之始。若夜分虽尽而夜上水未尽，归夜漏还是昼漏，要视距昼漏近还是距夜漏近，归近者是。在上例中，大余27，接近于冬至后的第二个节气大寒，从表中查得靠近大寒的日子夜漏53刻8分，夜漏之半26刻9分。以上算得的刻数(39刻3分半弱)大于此数12刻4分半弱($39.34-26.9=12.44$)，入第二日(冬至后第28日)昼漏12刻4分半弱。

(5)黄赤道度换算法。

乾象历说是"推有进退"。由赤道度变为黄道度须增加或减少一个

---

[1] 原文"分"后标点为逗号，误，改句号。

固定值，增为进，减为退，因称“推有进退”。

表 4.1　乾象历黄、赤道度对照表

赤道积度	二分点 4	8	11	15	19	23	26	30	34	38	41	45
赤道增度	4	4	3	4	4	4	3	4	4	4	3	4
黄对赤增度	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
黄增积度	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3
黄道累积度	$4\frac{1}{4}$	$8\frac{1}{2}$	$11\frac{3}{4}$	16	$20\frac{1}{4}$	$24\frac{1}{2}$	$27\frac{3}{4}$	32	$36\frac{1}{4}$	$40\frac{1}{2}$	$43\frac{3}{4}$	48
赤道积度	50	54	57	61	65	69	72	76	80	84	87	91 二至点
赤道增度	5	4	3	4	4	4	3	4	4	4	3	4
黄对赤增度	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
黄增积度	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
黄道累积度	$52\frac{3}{4}$	$56\frac{1}{4}$	$59\frac{1}{4}$	63	$66\frac{3}{4}$	$70\frac{1}{2}$	$73\frac{1}{4}$	77	$80\frac{3}{4}$	$84\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{4}$	91

四分历中列有二十八宿黄、赤道矩度数值表，在每宿赤道矩度数下附有进退度数。算得某宿的赤道数后，加减此数就变成了该宿的黄道度数。按李锐的研究，“进退度数”是由该宿距度端的黄、赤道总度差得到的。比如室宿距度端（在牛宿前 5 度）的赤道度总数 52 度，黄道度总数 49 度，赤道度比黄道度多 3 度，得“进三度”；若赤道度少于黄道度，得“退”某度。乾象历更给出了计算进退度数的方法：“起二分度后，率四度转增少。少每半者，三而转之。差满三止，历五度而减如初。”这段话可以这样翻译：从春分或秋分时起算，赤道度每历 4 度，黄道度比赤道度增加$\frac{1}{4}$度。每增至$\frac{1}{2}$度时，改历 3 度增$\frac{1}{4}$度。而后又历 4 度增$\frac{1}{4}$度。如此进行下去，增至 3 度后停止，改以同样的规律减少，仅初减时赤道历 5 度减$\frac{1}{4}$度，减到黄、赤同度为止。

乾象历原文中的“少”就是$\frac{1}{4}$，古时把1划分为4段，分别名为少、半、太、一。用今天的分数表示法为：$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$、1。由上表可知，乾象历只讲了自二分点到二至点（冬至点、夏至点），即在第一象限内黄、赤道度的变化情形。从二至点到二分点，即在第二象限内的情形与第一象限相仿，区别是黄对赤度先减少，减至3度而后增，增至黄、赤同度而毕。

按李锐的研究，乾象历的这种做法源于汉代张衡的《浑天仪注》，其中说，黄、赤道度每过一气增减1度。这是个实测数据，乾象历把它细化为4段，一气15日余或说是15度余，15度分为4段，各增减$\frac{1}{4}$度。4段的分法是4、4、3、4，显然，这仍是一个近似表达法。

4. 月行迟疾数推算法

《律历志》称“月行三道术”。首句是“月行迟疾，周进有恒”，而后面的“求月行迟疾”部分首句却是“月经四表，出入三道”，可见是标题颠倒了，这一节应是“求月行迟疾”，后面才是“月行三道术”。求月行迟疾数也就是推算月行定度数。

(1)重要参数。

推算月行迟疾的数据主要有两个参数、一副表格。其他参数大都由它们衍生而得。两个参数，一个是月行交点周期，乾象历称为历日数；一个是朔望月与交点月的差，乾象历称为朔行分，包括朔行大分和小分两项。表格在乾象历中不具名号，姑且取名为“月行迟疾表”。

乾象历给出的历日数的计算公式是：

$$\frac{\frac{(\text{会数}+\text{天地凡数})\times(\text{余率})^2}{\text{会数}}+\text{周天}}{\text{月周}}=\text{历日数} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.20)$$

其中：$(\text{会数}+\text{天地凡数})\times(\text{余率})^2=\text{过周分}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4.21)

会数＝47，已如前述；天地凡数＝55，出自《易经·系辞》，天数25，地数30，合为55；余率＝29，是1个朔望月的整数部分。代入(4.21)得：

$$\text{过周分}=\frac{(47+55)\times 29^2}{47}=\frac{102\times 841}{47}=\frac{85780}{47}=1825\frac{7}{47}$$

把此数代入(4.20)式：

$$历日数=\frac{1825\frac{7}{47}+215130}{7874}=27\frac{4357\frac{7}{47}}{7874}=27\frac{3303}{5969}=\frac{164466}{5969}$$

其中 3303 为周日分，5969 为周日法，164466 为历周。周日法与周日分的差（5969－3303＝2666）为周虚，周日分的$\frac{1}{3}$（$\frac{1}{3}\times 3303=1101$）为少大法，周日法与通数的乘积（5969×31＝185039）为通周。

下边考察（4.20）式的意义。把（4.21）式代入（4.20）式：

历日数＝$\frac{过周分+周天}{月周}$。其中周天等于每纪天数（周天＝岁实×纪法）；月周等于每纪的恒星月数，或者说是每纪月绕恒星天运行的周数（月周＝小周×$\frac{纪法}{章岁}$）。那么，$\frac{周天}{月周}$应是月绕恒星天一周所需的天数，叫做“恒星月”。$\frac{周天+过周分}{月周}$表示月行 1 周天多用了若干时分。即运转 1 周天的时间比 1 个恒星月大了，是月行迟疾 1 周的天数，即从最迟到最迟或从最速到最速所用天数叫做“交点月”。

乾象历给出的计算朔行分的公式是：

$$\frac{\frac{小周}{2}\times 通法}{通数}-历周=朔行分 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4.22)$$

其中小周＝254，通法＝43026，通数＝31，历周＝164466。代入上式得：

$$\frac{127\times 43026}{31}=164466=\frac{5464302}{31}-164466=11801\frac{25}{31}$$

其中 127 为半周（$\frac{小周}{2}$），11801 为朔行大分，25 为小分。

（4.22）式的意义可以这样理解，把朔望月与交点月的差扩大 5969 倍，即用周日法乘朔望月与交点月的差：

$$\begin{aligned}周日法\times(朔望月-交点月)&=5969\left(\frac{通法}{日法}-\frac{历周}{周日法}\right)\\&=47\times 127\times\left(\frac{通法}{31\times 47}-\frac{历周}{47\times 127}\right)\\&=\frac{127\times 通法}{31}-历周\end{aligned}$$

$$=\frac{\frac{小周}{2}\times 通法}{通数}-历周=朔行分$$

由此可见，朔行分是朔望月与交点月差的 5969 倍，或者说是在周日法朔望月中，合朔点向西移动的天度数。

表 4.2　月行迟疾表

日转度分	列衰	损益率	盈缩积	月行分
一日 14 度 10 分	1 退减	益 22	盈初	276
二日 14 度 9 分	2 退减	益 21	盈 22	275
三日 14 度 7 分	3 退减	益 19	盈 43	273
四日 14 度 4 分	4 退减	益 16	盈 62	270
五日 14 度	4 退减	益 12	盈 78	266
六日 13 度 15 分	4 退减	益 8	盈 90	262
七日 13 度 11 分	4 退减	益 4	盈 98	258
八日 13 度 7 分	4 退减	损	盈 102	254
九日 13 度 3 分	4 退加	损 4	盈 102	250
十日 12 度 18 分	3 退加	损 8	盈 98	246
十一日 12 度 15 分	4 退加	损 11	盈 90	243
十二日 12 度 11 分	3 退加	损 15	盈 79	239
十三日 12 度 8 分	2 退加	损 18	盈 64	236
十四日 12 度 6 分	1 退加	损 20	盈 46	234
十五日 12 度 5 分	1 进减	损 21	盈 26	233
十六日 12 度 6 分	2 进减	损 20 损不足，反减 5 为益盈有 5 谓益而损缩初 20，故不足。[①]	盈 5 缩初	234
十七日 12 度 8 分	3 进减	益 18	缩 15	236
十八日 12 度 11 分	4 进减	益 15	盈 23?(33)[②]	239

① 李锐校改为："损不足，反减五为益。谓盈有五而损二十。"如后文所释，损益率栏中"损"或"益"都是对盈缩积栏的数字而言，"反减五为益"的"益"应是"缩初"二字，余不变。

② 从上下行数字推证，"23"应为"33"。

续表

日转度分	列衰	损益率	盈缩积	月行分
十九日 12 度 15 分	3 进减	益 11	缩 48	243
二十日 12 度 18 分	4 进减	益 8	缩 59	246
二十一日 13 度 3 分	4 进减	益 4	缩 67	250
二十二日 13 度 7 分	4 进加	损	缩 71	254
二十三日 13 度 11 分	4 进加	损 4	缩 71	258
二十四日 13 度 15 分	4 进加	损 8	缩 67	262
二十五日 14 度	4 进加	损 12	缩 59	266
二十六日 14 度 4 分	3 进加	损 16	缩 47	270
二十七日 14 度 7 分	三历初进加 三大周日	损 19	缩 31	273
周日 14 度 9 分	少进加	损 21	缩 12	275

此表包括日转度分、列衰、损益率、盈缩积和月行分共五栏。日转度分栏所列是一至二十八日每天月亮的实行度分数。月行分栏所列是把日转度分栏中的“度”化为“分”后的数字，1 度等于 19 分。损益率栏中的数字表示日转度分与平行分之差，就是月亮的实行度分与平行度分(13 度 7 分/日)之差。谓之“益”或“损”是对盈缩积而言，凡使盈缩积栏中的数字(无论是“盈”或“缩”)增加者便是“益”，减少则为“损”。盈缩积栏所列是自月初以来实行分与平行分累积值的差：实行分的累积值多于平行分者为“盈”，少于平行分者为“缩”。列衰栏每行有三个字，第一个是数字，表示该行与下行“日转度分”数的差。若大于下行数，第二个字是“退”；小于下行数时第二个字是“进”。第三个字非“加”即“减”，都是对左、右两栏而言，“十四日”行以前的意义是日转度分“减”益、“加”损得平行分，“十五日”行以后的意义是平行分“减”益、“加”损得日转度分。

此外，表中还有几项数值须加说明，一是二十七日列衰，原文是“三历初进加三大周日”，意不可解。中华书局版“校勘记”说：“李注谓此文传写错误，依算数推之，当云‘二进加，历初大，周日’。”“错误”二字后不用句号，使人误认为下文“依算数”云云，也是“李注”的内容，其实不是。李注只说有误，并不认为“当云‘二进加’”等等，“依算数”以下是“校勘”者的意思。若果真“以算结论”，“二进加”是说不通的，应该是：“三，历初，进加；二大，周日。”意思是，当入历日数由二十七日增至“历初”(下

月一日)时,二十七日列衰为“三进加”;增至“周日”(当月二十八日)时,为“二大”进加。古字“大”与“太”通用,“太”是“大半”的意思,为约数。此处“二大”指周日与二十七日转度分差2分,余4093,少大分202。这在后面的算例中可见分晓。

二是“周日”一栏中“转度分”,李锐《汉乾象术注》引《景初历》、《元嘉历》、《正光历》等认为,原文“十四度九分”是省文,或者是漏掉了小分数:“余四千九十三,少大分二百二。”意思是认为周日转分为14度9分,余4093,少大分202(分母“少大法”已如前述为1101)。可以这样证明,表(4.2)中由于某日盈缩积加减该日损益率等于次日盈缩积,次日盈缩积应是次日初数,不包括次日的月行数。因此表中周日“缩积12”,只是该近点月的最后时日3303分内的损率数,不是周日全天的损率数(在一个近点月内,盈缩1度。即盈缩由月初的“0”开始,到月末回复为“0”。超过一个近点月就不再是“0”了)。在周日3303分的时间内损12分,由比例法可求全日(5969分)损数是 $3303:12=5969:x$,解得 $x=21\frac{755}{1101}$。即周日全天损率是21分并少大分755。而损率加平行度(254分)得转度分,所以周日转度分等于 $254+21\frac{755}{1101}=275\frac{755}{1101}=275\frac{755\times5969}{1101\times5969}=275\frac{4093\frac{202}{1101}}{5969}$。其中275分化为14度9分,所以知,周日转度分为14度9分,余4093,少大分202。

由上面的推算知周日栏中的“损率21”和月行分“275”下也都省却或漏掉了“余4093,少大分202”(即少大分755)数字。

三是周日列衰“少进加”中的“少”字,李锐以为是指“余八百三十七,少大分八百九十九”。这是不对的。前面已经说到,列衰等于相邻两日的转度分差。周日转度分既是“十四度九分,余四千九十三,少大分二百二”,历初转度分为“十四度十分”,二者之差 $14°10'-14°9'4093\frac{202}{1101}=1875\frac{899}{1101}$。即余1875,少大分899。这才是“少进加”中“少”所指的确切数值,它约略等于周日法(5969分)的三分之一,所以省称为“少”。由

以后算例可以证明，此数值是正确的。

(2)推合朔入历。

这一部分是推求某个朔望月的合朔点到前一个交点月朔之间的时距。由于合朔点的位置以往是按平朔(朔望月的平均值)推得的，只是近似值，而交点月朔的位置是真位置，因此，只要算出合朔点的入历数，以及在入历数期间月实行与平行的迟疾数，就能得到合朔点的真位置(即“定朔”)了。

寻求推算方法的思路是，由于每个交点月朔比朔望月朔提前1日余，只要算出自上元以来到该合朔点之间的朔望月总数，与交点月朔间的距离即为已知。《律历志》给出的计算公式是：

$$\frac{\text{上元积月}\times\text{朔行大分}\frac{\text{小分}}{\text{通数}}-n\cdot\text{历周}}{\text{周日法}}=\text{日数}\frac{\text{日余}}{\text{周日法}} \qquad (4.23)$$

其中 $n=0,1,2\cdots\cdots$；满足 $0\leqslant\text{上元积月}\times\text{朔行大分}\frac{\text{小分}}{\text{通数}}-n\ \text{历周}<\text{历周}$。上元积月＝上元积年×每年朔望月数＝上元积年×$\frac{\text{章月}}{\text{章法}}$。(4.22)式说到，朔行分的意义是：在周日法个朔望月(即5969个朔望月)中，由于“月有迟疾”，合朔点西移的度分数。那么，自上元以来，合朔点西移的度分数是：

$$\frac{\text{上元积月}}{\text{周日法}}\times\text{朔行大分}\frac{\text{小分}}{\text{通数}} \qquad (4.24)$$

图4.1 合朔入历图

图4.1中，O为太极上元，B为所求年天正朔日点，AB为西移度分。从中减去n个近点月：

$$n\frac{\text{历周}}{\text{周日法}} \qquad (4.25)$$

就是图中的 An 段，剩余的 nB 段长度就是所求“合朔入历”数，其中 BC 为日数，nC 为日余。把(4.25)式代入(4.24)式，就得到了(4.23)式。

以东吴景帝永安二年为例(东吴行乾象历)，上元己丑到永安元年戊寅共 7430 年，积月为：

$7430\times\frac{235}{19}=91897\,\frac{7}{19}$，其中 91897 为积月，7 为月余。把积月及其他参数值代入(4.23)式：

$$\frac{91897\times 11801\,\frac{25}{31}-n\cdot 164466}{5969}=\frac{1084550607\,\frac{15}{31}-164466n}{5969}$$

命 $n=6594$，得 $\frac{61803\,\frac{15}{31}}{5969}=10\,\frac{2113\,\frac{15}{31}}{5969}$。其中 10 为日数，2113 为日余，15 为小分。由日及余[①] 命算，算外，为永安二年天正朔入历数。

求下月入历数，由于每 5969 月朔日提前 $11801\,\frac{25}{31}$ 日，每日提前 $\frac{11801\,\frac{25}{31}}{5969}=1\,\frac{5832\,\frac{25}{31}}{5969}$ 日。已知头月的合朔入历数，求下月入历时，只要于此数上再加 $1\,\frac{5832\,\frac{25}{31}}{5969}$ 日即得。

(3)求弦望入历。

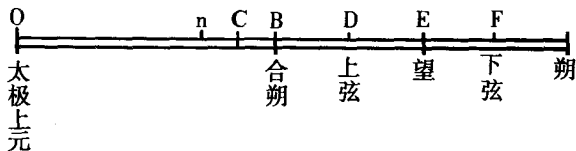



图 4.2　弦望入历图

如图 4.2，(4.23)式已求出合朔点 B 的入历数 nB，今求弦、望点

① 《律历志》谓“日余命算外”，“日余”之间脱“及”字。

D、E、F 的入历数 nD、nE、nF。已知 BD、DE、EF 都等于$\frac{1}{4}$个朔望月的长度，即都等于 $7\frac{557\frac{1}{2}}{1457}$日。将 nB 加此数得 nD，再加得 nE，三加得 nF。但 nB 长度的分母是周日法 5969，为能直接相加，须把 $7\frac{557\frac{1}{2}}{1457}$日的分母 1457 化为 5969，为此把分子、分母各乘$\frac{127}{31}$，得 $7\frac{557\frac{1}{2}\times\frac{127}{31}}{1457\times\frac{127}{31}}$ $=7\frac{2283\frac{29\frac{1}{2}}{31}}{5969}$日。乾象历说：求弦望"各加七日，日余二千二百八十三，小分二十九半，分各如法成日"。不过"入历"是指到前一个交点月朔的时距，加后得数若大于一个交点月的数值（$27\frac{3303}{5969}$日），应从其中减去 $27\frac{3303}{5969}$日，才是所求入历数。乾象历说是"日满二十七日去之，余如周分，不足除，减一日，加周虚"。先减 27 日，再从剩余数中减去分子（"如周分"是"除周分"的意思），若不足减，多减 1 日，加周虚，即减 28 日，加 2666 分。

（4）求朔、弦、望的定大、小余。

本章二节 1（5）求出了朔、弦、望大、小余，是由月亮平均速度算得的，可称为平大、小余。上面又算出了朔、弦、望距交点月朔的距离入历日分。交点月朔是月亮的真位置，要计算朔弦望的真位置，即要求朔弦望的定大余、定小余，可由平大、小余加减在"入历"日分的时间内，由于月行有迟疾产生的月亮行度差得到。月亮行度差的求法可借助表 4.2。

因入历日分包括日数、日余两部分，日数的月行差由表 4.2 中的盈缩积栏查得，比如日数是十，月行差是"盈 98 分"；日数十一，月行差是"盈 90 分"等。日余是不足 1 日的部分，它的月行差应由损益率栏算出，

比如第十日损益率是“损 8”，日余为半日的月行差就是“损 4”；$\frac{1}{4}$日的月行差是“损 2”等。写成公式是：

$$月行差=盈缩积\pm\frac{日余大分\frac{小分}{通数}}{周日法}\times损益率$$

$$=盈缩积\pm\frac{日余大分\times通数+小分}{通数\times周日法}\times损益率$$

其中“日余大分×通数＋小分”，乾象历总称为“日余分乘通数”。此外“±”号视盈缩积和损益率值决定：盈积则损减益加；缩积正相反，损加益减。上式可写为：

$$月行差=\frac{盈缩积\times通数\times周日法\pm日余分\times通数\times损益率}{通数\times周日法}$$

$$=\frac{盈缩积\times通周\pm日余分\times通数\times损益率}{通周} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.26)$$

式中分子乾象历称为“加时盈缩”，除通周后的单位是分，而且与表 4.2 采用的单位制相同：1 度＝19 分。为了能与按朔望月算出的朔、弦、望大、小余相加减，应把它除以月对日（地）的相对速度，化为日数。月对日的相对速度为：月速－日速＝月行分－19 分＝月行分－章岁。其中日速：1 度/日，1 度＝19 分，19 与章岁数同，因而表示为“月行分－章岁”，就意义而言，与章岁并无关系。

$$月行差=\frac{盈缩积\times通周\pm日余分\times通数\times损益率}{通周\times(月行分-章岁)}$$

$$=\frac{盈缩积\times通周\pm日余分\times通数\times损益率}{日法\times半周\times(月行分-章岁)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.27)$$

乾象历把分母中的“半周×（月行分－章岁）”叫做“差法”。上式可以写为：

$$月行差=\frac{加时盈缩}{日法\times差法}=\frac{加时盈缩/差法}{日法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.28)$$

与朔、弦、望大、小余相加减（盈减缩加），得所求定大、小余：

$$定大、小余=大、小余\mp\frac{加时盈缩/差法}{日法}$$

$$=大余\frac{小余}{日法}\mp\frac{加时盈缩/差法}{日法}$$

$$=\frac{\text{大余}\times\text{日法}+\text{小余}\mp\text{加时盈缩/差法}}{\text{日法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.29)$$

(4.29)式正是《律历志》给出的公式。计算时，若加时盈缩数是盈，月速大于平均速度，朔、弦、望都比平均数提前，(4.29)式中“加时”前用减号。反之为加号。

(5)求朔、弦、望时月所在定度。

只要把朔、弦、望时的月行差与由(4.10)式算得的月度数及余相加减即得。月行差由(4.28)式知分母是日法，而月度数由(4.11)式知，分母是纪法。为使二者相加减，需要通分：

$$\frac{\text{加时盈缩/差法}}{\text{日法}}=\frac{\text{加时盈缩/差法}}{\text{通数}\times\text{会数}}=\frac{\text{章岁}\times\text{加时盈缩/差法}}{\text{章岁}\times\text{通数}\times\text{会数}}$$

$$=\frac{\text{章岁}\times\text{加时盈缩/差法}}{\text{纪法}\times\text{会数}}$$

$$=\frac{\text{章岁}\times\text{加时盈缩/差法}\times\text{会数}}{\text{纪法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.30)$$

(4.30)式所得与月度数及余〔见本节1(8)〕相加减(盈减缩加)就是所求月亮定度：

$$\text{月度及余}\pm\frac{\text{章岁}\times\text{加时盈缩/差法}\times\text{会数}}{\text{纪法}}=\text{月定度分}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(4.31)$$

(6)推月行夜半入历。

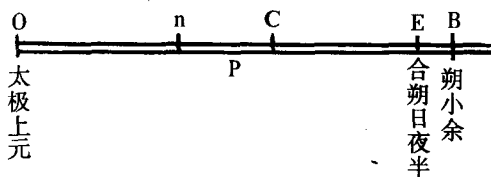



图 4.3 合朔夜半入历图

本节4(2)、(3)所推为朔、弦、望入历数。此处推算朔、弦、望所在日夜半时的入历数。即该日夜半入于迟疾历的时日数。如图4.3，B为合朔点，nB为合朔入历数，包括日数BC和日余nC。合朔日夜半为E，本节(2)已求出nB(包括BC及nC)值，今求nE值，就是合朔日夜半的入历数。显然$nE=nB-EB=$合朔入历数－朔小余。从图可见：

$$nE=BC+(nC-EB)=\text{入历日数}+(\text{入历日余}-\text{朔小余})\quad\cdots\cdots\quad(4.32)$$

或者 $nE=BC+nP$，$(PC=EB)$。可以把 nP 视为 E 点的入历日余。(4.32)式中入历日余分母为周日法(5969)，朔小余分母为日法(1467)，为使二者能直接相减，把朔小余分子、母同乘以 $\frac{127}{31}=\frac{周半}{通数}$，分母也成了 5969，与日余完全相同，不必再写入分母。这样上式成了

$$nE=平朔入历日数+(平朔入历日余-\frac{周半\times朔小余}{通数}) \quad \cdots\cdots (4.33)$$

后两项如不够减，从入历日数中借 1 日，化为 5969 分，入日余。乾象历叙述(4.33)式时，把"入历日数"叫做"周日"。

求弦、望夜半入历与此同，惟(4.33)式中"入历日数"为弦、望入历日数，"日余"为弦、望入历日余，"朔小余"改成弦、望小余。

求次日夜半入历数，与本节 4(3)求弦、望入历法相同。由合朔入历求弦、望入历是把合朔入历数加上合朔到弦、望的时距，此处由合朔夜半入历数求次日夜半入历数，则是由合朔夜半入历数加上次日夜半到合朔夜半的时距(1 日。逐日长短虽异，通谓之 1 日)。即(4.33)式中加 1 日得次日夜半入历数。不过，加后若入历日数达到 27，应考虑能否从中除去一个交点月数。倘若日余大于周日分，可直接从入历日数中减 27，日余减周日分，这种情况(即入历日数 26，日余大于周分)叫做"不直(值)周日"。倘若日余不满周日分，入历日数为 27 时仍不是一个交点月，须俟次日，入历日数增至 28 日，才能减去一个交点月。这时要从入历日数中取出 1 日，化为 5969 分，增入日余，然后从中减去周日分。也可直接把周虚(周日法 5969 与周日分 3303 的差 2666)加入"日余"。此种情形(即入历日数 27，日余小于周分)称为"直周日"。不直周日入历：$\frac{日余-周日分}{周法}$。直周日入历：$\frac{周日法+日余-周日分}{周法}=\frac{周虚+日余}{周法}$。

直周日、不直周日的意义见本节 4(10)。

(7)求月在某日夜半时的定度数。

本节 4(5)有推求朔、弦、望时月亮所在定度法，大要是把月亮的平行度数与由月行迟疾产生的月行差相加减而得。而月行差由两部分组成。一由入历日数产生，一由入历日余产生。前者由盈缩积计算，后者由损益率计算。此处模仿前法，也可由月亮在该日夜半时的平均行度及

由月行迟疾产生的月行差相加减得到。月行差也由两项产生：一项是由入历日数得到的盈缩积，另一项由入历日余及损益率算得的数值。《律历志》中给定的公式是：

$$夜半定度=夜半平行度及余\pm(盈缩积\pm\frac{入历日余\times损益率}{周法}) \quad \cdots\cdots (4.34)$$

“夜半平行度及余”的计算法见(4.10)和(4.11)式。(4.34)式括号内的二项合称“夜半盈缩”，是由所求日的入历数查表4.2得出的，入历数的推算法见本节4(6)。入历整日数(n)的盈缩积，从表4.2中第($n+1$)日栏下查得，不足1日的部分($\frac{入历日余}{周法}$)与($n+1$)日栏的损益率相乘得到日余时间内的月行差。两项相加减(缩与损、盈与益相加，盈与损、缩与益相减)得月行差。由于盈缩积的单位是分，后一项的单位分之外还有“余”，两项相减时，盈缩积需“破全为法损之”。即从盈缩积中取出1(“全”)，破为余的分母(“法”)一样大的数，与余相减。与夜半度及余的加减，视后两项的和而定，和为盈用加，为缩用减，就是《律历志》说的“盈加缩减”。此外，(4.34)式并不是一个完全的公式，“夜半度及余”的分母是纪法，单位是度；括号内的月行差分母是周法，单位是分。要把二者相加减，先应把括号内的得数除章法19化为度，再将分母化同(通分)。如《律历志》所说，夜半盈缩“满章岁为度”，度与度可以相加；除不尽的部分《律历志》叫做“分”，分中必包括分母为周法的“余”(形式是分$\frac{余}{周法}$)。为把“分”的分母“章岁”化为纪法，子、母各乘通数31：

$$\frac{分\frac{余}{周法}\times通数}{章岁\times通数}=\frac{分\frac{余}{周法}\times通数}{纪法} \quad \cdots\cdots (4.35)$$

就是《律历志》说的“通数乘分及余，余如周法从分，分满纪法从度”，就能与夜半“分”也“盈加缩减”了。这样(4.34)式变为：

$$夜半度及余\pm\frac{(盈缩积\times周法\pm入历日余\times损益率)\times通数}{周法\times纪法} \quad \cdots\cdots (4.36)$$

(8)求变衰(cuí，音崔)法

《律历志》的公式是：

$$\text{变衰}=\frac{\text{入历日余}\times\text{列衰}}{\text{周法}} \quad \cdots\cdots (4.37)$$

如入历 15 日，日余 21，“列衰”便是指表 4.2 中第十六日即日余所在日的列衰 2。前面说过，“列衰”的意义是相邻两日的月行度差；$\frac{\text{入历日余}}{\text{周法}}$是入历日数中的尾数，是不足 1 日的部分。因此知变衰的意义是在入历日数的末尾(不足 1 日的畸零数)时间内，月行度变化的数值。

(9)求次历变衰。

《律历志》的公式是：

$$\text{次历变衰}=\frac{\text{周虚}\times\text{列衰}}{\text{周法}}+\text{变衰}-\text{列衰} \quad \cdots\cdots (4.38)$$

其中第一项$\frac{\text{周虚}\times\text{列衰}}{\text{周法}}$《律历志》叫做“常数”。因为自某日起算，该日的入历日数既定，列衰也是确定的，乘周虚、除周法之后仍是常数。(4.38)式可做如下变换：

$$\begin{aligned}\text{次历变衰}&=\frac{(\text{周法}-\text{周分})\times\text{列衰}}{\text{周法}}+\text{变衰}-\text{列衰}\\&=\text{列衰}-\frac{\text{周分}\times\text{列衰}}{\text{周法}}+\frac{\text{日余}\times\text{列衰}}{\text{周法}}-\text{列衰}\\&=\frac{\text{日余}-\text{周分}}{\text{周法}}\times\text{列衰} \quad \cdots\cdots (4.39)\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\text{次历变衰}&=\frac{\text{周虚}\times\text{列衰}}{\text{周法}}+\frac{\text{日余}\times\text{列衰}}{\text{周法}}-\text{列衰}\\&=\frac{\text{周虚}+\text{日余}}{\text{周法}}\times\text{列衰}-\text{列衰} \quad \cdots\cdots (4.40)\end{aligned}$$

把(4.39)、(4.40)两式最右端的分式与本节 4(6)中求次日夜半入历的公式比较可知，分式各表示不直周日和直周日情形时次日夜半入历日余数，亦是入历数。分式意义既明，由本节 4(8)可知，(4.39)和(4.40)式分别表示的是：在这两种情况下，由某日日余推求次日变衰的方法。不过由于直周日时，日余小于周日分，周虚＋日余＜周法，$\frac{\text{周虚}+\text{日余}}{\text{周法}}\times\text{列衰}<\text{列衰}$。《律历志》说，只有当“满列衰”时，才减列衰，否则不减，(4.40)式应写成：

$$\text{次历变衰}=\frac{\text{周虚}+\text{日余}}{\text{周法}}\times\text{列衰} \quad \cdots\cdots (4.41)$$

不直周日用(4.39)式，直周日用(4.41)式，两种情形都必须是次日入历数。减1个交点月后，入历日数变成零，只有日余，且与头日余不等。否则，以后各日余都与头日相等，变衰等于列衰之比，无须另行推算。但每天增1日，总有一天增至26或27，便能分别用(4.39)式或(4.41)式推算了。《律历志》说"历竟，辄以加变衰"，"历竟"就是指的这种时候。

(10)求次日夜半定度。

可以按(4.34)式计算(要先求出月亮次日行度及入历日数)，这里给出了另一种由变衰推算的公式：

次日夜半定度分＝头日夜半定度分＋头日入历日余所在日的转度分
±由头日入历日余及其所在日的列衰算得的变衰
…………………………………………… (4.42)

其中"头日入历日余所在日"也就是次日入历日数中的最后一日。如头日入历日16，日余3527，次历日17，日余不变，那么头日入历日余所在日为第17日。

图 4.4　求次日夜半度图

(4.42)式可由图4.3和图4.4联合说明。在图4.4中，B_1 为合朔点，E_1 为甲日夜半点；B_2 为次日(乙日)点，E_2 为次日夜半点。由对图4.3的分析可知：$nE_1=CB_1+(nC-E_1B_1)$〔参见(4.32)式〕。它有两层含义：若把 nE_1 看做 E_1 点的入历数，那么 CB_1 为 E_1 的入历日数，$nC-E_1B_1$ 为它的入历日余数；若把 nE_1 看做夜半定度数，CB_1 和 $nC-E_1B_1$ 分别代表入历整日和日余的定度数。同样：$nE_2=CB_2+(nC-E_2B_2)$ 也有上述两层意义。

nE_1-nE_2 得：$nE_2-nE_1=(CB_2-CB_1)+(E_1B_1-E_2B_2)$ ……………… (4.43)

$nE_2=nE_1+B_1B_2-(E_2B_2-E_1B_1)$ …………………… (4.44)

今把 nE_1、nE_2 分别视为 E_1、E_2 的定度数，那么，B_1B_2 为其入历日数差所含的度数，即 E_2 入历日数中的末一日(此前各日所含度数都相同)的度数，等于次日的实行度，《律历志》说是"历日转分"。而 E_2B_2-

E_1B_1 是 E_2、E_1 两点日余所含的度数差。由本节4(8)所述变衰的意义可知，$E_2B_2-E_1B_1$ 其实就是头、次两日之间的变衰数。因此(4.42)和(4.44)两式等效。

为更加明确，(4.44)式的意义可以这样表述：次日夜半定度等于头日夜半定度与次日实行度之和，加减变衰数（进加退减）。也就是(4.42)式的含意。

下边把(4.42)式中各项的单位划同：由(4.37)式知，变衰的单位是分和余，余的分母是周日法；次日转度分由表4.2查得，单位有度有分，1度＝19分；头日夜半定度分由(4.36)式算得，也有度有分，1度＝589(纪法)分。三项单位表示如下：

$$\text{若干度}\frac{\text{分}}{\text{纪法}} \qquad \text{若干度}\frac{\text{分}}{\text{章岁}} \qquad \text{若干度}\frac{\text{分}\frac{\text{余}}{\text{周日法}}}{\text{章岁}}$$

（夜半定度）　（日转度分）　（变衰）

因后两项“分”的单位同度，都是19分＝1度，《律历志》先将这两项加减，所得分除以章岁19化为度：“以变衰进加退减历日转分，分盈不足，章岁出入度也。”“历日转分”就是(4.42)式中的“次日转度分”，可查表4.2得到。它与变衰之间的加或减，取决于变衰的进退，是“进”相加，是“退”则减。而变衰的进退是由计算变衰所用参数列衰得到的，列衰的进退载于表4.2。加减后所得“分”与章岁19相比，有“盈”有“不足”，除以章岁化为度，即所谓“章岁出入度也”。除不尽的部分是以章岁为分母，为了能与第一项中的“分”相加，子、母同乘以通数31，即：

$$\text{度}\frac{\text{分}\frac{\text{余}}{\text{周日法}}\times\text{通数}}{\text{章岁}\times\text{通数}}=\text{度}\frac{\text{分}\frac{\text{余}}{\text{周日法}}\times\text{通数}}{\text{纪法}}$$

《律历志》把这一步说成是“通数乘分及余”。然后就能与头日夜半定度相加了，《律历志》说是：“而日转加夜定度为次日也。”“日转”就是“次日转度分”，“夜定度”是指“头日夜半定度分”，“次日”则是指“次日夜半定度分”。“日转”中的“分”及“余”（“余”是加减变衰以后得到的）乘通数以后，就能与“夜定度”直接相加了。这样(4.42)式可以写成：

$$\text{次日夜半定度分}=\text{头日夜半定度分}+\text{次日转度}\frac{(\text{次日转分}\pm\text{变衰})\times\text{通数}}{\text{纪法}}$$

…………………………………………………… (4.45)

《律历志》又说："历竟不直周日，减余千三十八。"不直周日时，为何要减余1038？下边讨论此问题。先从实例入手；例1：

甲日，月平行13°7′，入历26日，余5332；次日（乙日），月平行26°14′，入历0，余2029。此种情形称为不直周日。

按本节4(7)中公式分别计算甲、乙日夜半定度，为了减少单位换算的麻烦，数值都取1度＝19分，余满5969为1分。由(4.34)式：

$$\text{①甲日夜半定度}=\text{甲日平行度}-\text{入历27日缩积}+\frac{\text{甲日余}\times 27\text{日损率}}{\text{周法}}$$

$$=13°7'-31'+\frac{5332\times 19}{5969}=12°11'5804$$

右端5804为余，分母5969略，后同。同样算得：

$$\text{②乙日夜半定度}=\text{乙日平行度}+\frac{\text{乙日余}\times\text{历初益率}}{\text{周法}}$$

$$=26°14'+\frac{2029\times 22}{5969}=27°2'2855$$

再按(4.42)式由变衰计算乙日夜半定度：

③乙日夜半定度＝甲日夜半定度＋27日转度分＋由甲日入历日余和27日列衰算得的变衰

$$=12°11'5804+14°7'+\frac{5332\times 3}{5969}$$

$$=27°2'3893$$

②、③两式的计算结果果然相差余1038。下边检查产生此差数的原因：

把①式代入③式：

$$\text{④乙日夜半定度}=\text{甲日平行度}-\text{入历27日缩积}$$

$$+\frac{\text{甲日余}\times 27\text{日损率}}{\text{周法}}+27\text{日转度分}$$

$$+\frac{\text{甲日余}\times 27\text{日列衰}}{\text{周法}}$$

$$=\text{甲日平行度}-\text{入历 27 日缩积}+\frac{\text{甲日余}\times(\text{27 日损率}+\text{27 日列衰})}{\text{周法}}+\text{27 日转度分}$$

由前面表 4.2 的介绍，损益率＋列衰＝次日损益率，而式中 27 日列衰用的是 3，“次日”已入历初，所以 27 日损率＋27 日列衰＝历初益率 22，又转度分＝损益率＋平行度，此例中 27 日转度分＝甲日平行度＋27 日损率 19。代入上式：

$$=2\times\text{甲日平行度}-\text{入历 27 日缩积}+\frac{\text{甲日余}\times\text{历初益率 22}}{\text{周法}}+\text{27 日损率 19}$$

$$=\text{乙日平行度}-\text{周日缩积}+\frac{(\text{乙日余}+\text{周日分})\times\text{历初益率 22}}{\text{周法}}$$

$$=\text{乙日平行度}+\frac{\text{乙日余}\times 22}{\text{周法}}+\frac{\text{周日分}\times 22}{\text{周法}}-\text{周日缩积}$$

与②式比较：

$$=\text{乙日夜半定度}+\frac{\text{周日分}\times\text{历初益率}}{\text{周法}}-\text{周日缩积}$$

$$=\text{乙日夜半定度}+\frac{3303\times 22}{5969}-12'=\text{乙日夜半定度}+\frac{1038}{5969}$$

由上面推算知，用变衰推次日夜半定度时，对于不直周日的情形，比用(4.34)式算得的结果多出了$\left(\frac{\text{周日分}\times\text{历初益率}}{\text{周法}}-\text{周日缩积}\right)$这样一个常数，其大小为$\frac{1038}{5969}$。

假若不是不直周日，甲、乙两日的日余相同，27 日列衰为 2，由④式可以看出：

$$\text{乙日夜半定度}=\text{甲日平行度}-\text{27 日缩积}+\frac{\text{甲日余}\times\text{周日损率}}{\text{周法}}+\text{27 日转度分}$$

$$=\text{甲日平行度}-\text{27 日缩积}+\frac{\text{乙日余}\times\text{周日损率}}{\text{周法}}+\text{平行度}+\text{27 日损率}$$

$$=\text{乙日平行度}-\text{周日缩积}+\frac{\text{乙日余}\times\text{周日损率}}{\text{周法}}$$

与①式比较可知，用变衰推算与用(4.34)式那种普通推算法所得结果完全相同。

为什么会出现这种情况？计算依据的是表4.2提供的数据，而不直周日的计算与通常计算的不同仅在于它使用了27日列衰3，从表4.2末尾直接跃到了表初(所谓“历初”)，问题就出在这里。仔细观察可见，表4.2中的数据首尾是不连续的，如按立表规矩，周日缩积12，减损率21，不够减，盈缩积由“缩”变为“盈初”，反减得历初(1日)的盈缩积为9。而表中实际数据为0。这是由于1个近点月日数27日余，表初时，近点月与日齐同(都自夜半始)，到下个近点月与日不可能再齐同，表4.2中的数据不得不中断。为弥补这个缺陷，乾象历采取的办法是，“列衰”栏在27日下给出两个数据：3和2。使用2时，不与表头相连，没有误差；使用了则回复到了表头位置，只有增减一个修正值把由此产生的误差改正过来。由前面推算知，误差由两项组成：一是由于“回复表头”舍弃的周日缩积12，二是由于在②式中当用乙日余2029，却在③式中用了甲日余5332，多出了$\frac{(5332-2029)\times 22}{5969}=\frac{3303\times 22}{5969}$。这才有了1038的修正值。

既然只要在运算中同时用了表头和表尾的数据，就会有误差，对于直周日的情形，由变衰求次日夜半定度也会有误差产生。《律历志》说，修正此误差须“加余八百三十七，又以少大分八百九十九，加次历变衰”。意思是须把计算结果加余八百三十七，少大分八百九十九。看了下面例子自然明了。

例2：

丙日平行度13°7′，入历26日，余2666；丁日平行度26°14′，入历27日，余2666；戊日平行40°2′，入历0，余5332。可知丁日为直周日。

仍然先按(4.34)式计算每日夜半定度：

$$⑤丙日夜半定度=丙日平行度-27日缩积+\frac{丙日余\times 27日损率}{周日法}$$

$$=13°7'-31'+\frac{2666\times 19}{5969}=13°7'-31'+8'2902$$

$$=12°3'2902$$

即：丙日夜半定度为 12 度 3 分余 2902。

⑥丁日夜半定度＝丁日平行度－周日缩积＋$\dfrac{\text{丁日余}\times\text{周日损率}}{\text{周日法}}$

$$=26°14'-12'+\frac{2666\times 21\dfrac{4093\dfrac{202}{1101}}{5969}}{5969}$$

$$=26°2'+9'4093\frac{202}{1101}=26°11'4093\frac{202}{1101}$$

即：丁日夜半定度为 26 度 11 分，余 4093，少大分 202。

⑦戊日夜半定度＝戊日平行度＋$\dfrac{\text{戊日余}\times\text{历初益率}}{\text{周日法}}$

$$=40°2'+\frac{5332\times 22}{5969}=40°2'+19'3893$$

$$=41°2'3893$$

再按(4.42)式由变衰计算：

⑧丁日夜半定度＝丙日夜半定度＋27 日转度分＋$\dfrac{\text{丙日余}\times 27\ \text{日列衰}}{\text{周日法}}$

$$=12°3'2902+14°7'+\frac{2666\times 21\dfrac{4093\dfrac{202}{1101}}{5969}}{5969}$$

$$=26°10'2902+\frac{7160\dfrac{202}{1101}}{5969}$$

$$=26°10'2902+1\frac{1191\dfrac{202}{1101}}{5969}$$

$$=26°10'2902+1'1191\frac{202}{1101}$$

$$=26°11'4093\frac{202}{1101}$$

这里列衰取周日与 27 日转度分的差 2 分余 4093，少大分 202，而不用 3 或 2，计算结果与⑥式相同。李锐用列衰 3，误。

⑨戊日夜半定度＝丁日夜半定度＋周日转度分＋$\dfrac{\text{丁日余}\times\text{周日列衰}}{\text{周日法}}$

$$=26°11'4093\,\frac{202}{1101}+14°9'4093\,\frac{202}{1101}$$

$$+\frac{2666\times\dfrac{1875\,\frac{899}{1101}}{5969}}{5969}$$

$$=41°2'2217\,\frac{404}{1101}+\frac{2666\times1875\,\frac{2666\times899}{1101}}{5969\times5969}$$

$$=41°2'2217\,\frac{404}{1101}+\frac{4998750\,\frac{2396734}{1101}}{5969\times5969}$$

$$=41°2'2217\,\frac{404}{1101}+\frac{5000926\,\frac{958}{1101}}{5969\times5969}$$

$$=41°2'2217\,\frac{404}{1101}+837\,\frac{899}{1101}$$

$$=41°2'3055\,\frac{202}{1101}$$

与⑦式算得的结果相差：$41°2'3893-41°2'3055\,\frac{202}{1101}=837\,\frac{899}{1101}$。因此，要把由变衰计算的结果（即⑨式的运算结果）加余 837，少大分 899，两式计算结果才得相同。

表 4.3　误差推算表

	周分损益率	周虚损益率	表列损益率值	实际损益率	误差
周日	12'	($9'4093\frac{202}{1101}$) ↑	$21'4093\frac{202}{1101}$	21'4931	$837\frac{899}{1101}$
历初	12'1038	9'4931 ↑	22'	21'3303	
二日	11'3704	9'2265	21'		

这仍然是由于表 4.3 中的数值首尾不连续造成的，如表 4.3，把周日、历初等日各分为周分部分(3303 分)、周虚(2666 分)二部分(每日共5969 分)，而周日的周分部分损率是 12 分，按照这个比率算得周虚部分损率为 9 分余 4093，少大分 202(算法已如前述)。由此得出表 4.2 所列的损率值 21 分，余 4093，少大分 202。用同样的算法算出历初和二日每天的周分和周虚损益率值各若干，列于表 4.3 之中。由于周日过3303 分以后，开始进入下一个近点月，周日中的周虚部分($9'4093\frac{202}{1101}$)其实是不存在的，应该等于历初中周虚部分的损益率($9'4931$)，周日的实际损益率是 $12'+9'4931=21'4931$，不是表 4.2 中列出的数值 $12'+9'4931\frac{202}{1101}=21'4093\frac{202}{1101}$。实际数值和表 4.2 所列数值相差：$21'4931-21'4093\frac{202}{1101}=837\frac{899}{1101}$。在表 4.2 中每日的转度分、损益率、盈缩积、月行分是可以互相推导的，周日损益率的误差是 $837\frac{899}{1101}$，其他各项的误差也是如此。因此，只要发生自周日向历初的"跳跃"，如直周日这种情形，在运算中运用上述周日的任何一项参数，都有 $837\frac{899}{1101}$ 的误差。须要在运算结果中"加余 837，少大分 899"。

(11)求次日夜半盈缩。

是由头日夜半盈缩值直接推算次日夜半盈缩值的方法。所谓"夜半盈缩"是指夜半定度与平行度的差，大于平行度者为盈，小于平行度者为缩。例如本节 4(10)例 1 中求出甲日夜半定度为 $12°11'5804$，平行度 $13°7'$，夜半定度小于平行度 $13°7'-12°11'5804=14'165$，即甲日夜半盈缩值为"缩 14 分，余 165"；同样由算出的乙日夜半定度和平行度知，乙日夜半盈缩值为"盈 7 分，余 2855"。下面是不计算乙日夜半定度，直接由甲日夜半盈缩值以及变衰、损益率等参数推算出乙日夜半的盈缩值。

《律历志》给定的公式是：

$$\begin{aligned}\text{次日夜半盈缩值}=&\text{头日变衰}\mp\text{头日入历日余所在日的损益率}\\&\pm\text{头日夜半盈缩值}\pm\text{修正值}\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4.46)$$

此式可做这样的直观理解：次日夜半盈缩值既然等于次日夜半定行与

平行差，应该能够拆作两项，一项是头日夜半的盈缩值〔即(4.46)式右端第三项〕，另一项是在第二天(次日)一天之内实行和平行差。(4.46)式右端第一项是头日及次日两日入历日余行度的变化差，第二项是入历末日实行平行差，这两项相加减正好是次日一天之内的实行、平行差。《律历志》称为"变损益率"。与第三项相加就是所求次日夜半盈缩值。右端第四项"修正值"在通常情形下等于0；不直周日时要减余1038；直周日时加余837，少大分899，理由与本节4(10)中所述完全相同。

例1：本节4(10)例1中已求得甲日夜半定度12°11′5804，平行度13°7′，因知甲日夜半盈缩值为缩14′165，求乙日夜半盈缩。

解：甲日变衰$=\dfrac{\text{甲日余}\times\text{列衰}}{\text{周日法}}=\dfrac{5332\times3}{5969}=2'4058$

27日损益率：损19′。

变损益率：19′+2′4058=21′4058。

又知甲日夜半盈缩值为缩14′165，修正值为1038，代入(4.46)式得：

$$\begin{aligned}\text{乙日夜半盈缩值}&=21'4058-14'165-1038\\&=7'3893-1038=7'2855\end{aligned}$$

即乙日夜半盈缩值为盈7分，余2855。

例2：在本节4(10)例2的⑤式中算出的丙日夜半定度为12°3′2902，平行度13°7′，因知丙日夜半盈缩值为缩1°3′3067。求丁、戊日夜半盈缩值。

$$\text{解：丙日变衰}=\frac{\text{丙日余}\times\text{列衰}}{\text{周日法}}=\frac{2666\times2\dfrac{4093\dfrac{202}{1101}}{5969}}{5969}$$

$$=1'1191\frac{202}{1101}$$

27日损益率：损19′。

变损益率：$19'+1'1191\dfrac{202}{1101}=1°1'1191\dfrac{202}{1101}$。

又知丙日夜半盈缩为缩1°3′3067，比例中修正值为0，代入

(4.46)式得：

$$\text{丁日夜半盈缩值}=1°3'3067-1°1'1191\frac{202}{1101}=2'1875\frac{899}{1101}$$即丁日夜半盈缩值为缩 2 分，余 1875，少大分 899。

检验：本节 4(10)例 2 中的⑥式算得丁日夜半定度为 $26°11'4093\frac{202}{1101}$，平行度为 $26°14'$，二者差为：

$26°14'-26°11'4093\frac{202}{1101}=2'1875\frac{899}{1101}$。与按(4.46)式计算的结果相同。

$$\begin{aligned}\text{同样，戊日夜半盈缩}&=\frac{2666\times\dfrac{1875\frac{899}{1101}}{5969}}{5969}+21'4093\frac{202}{1101}\\&\quad-2'1875\frac{899}{1101}+837\frac{899}{1101}\\&=837\frac{899}{1101}+21'4093\frac{202}{1101}\\&\quad-2'1875\frac{899}{1101}+837\frac{899}{1101}\\&=19'3893=1°3893\end{aligned}$$

其中修正值为 $837\frac{899}{1101}$，计算结果为盈 1 度余 3893。

检验：本节 4(10)例 2 中的⑦式算得的戊日夜半定度为 $41°2'3893$，平行度为 $40°2'$，夜半盈缩值为 $41°2'3893-40°2'=1°3893$，定行大于平行为盈。与以上计算结果相同。

(12)求昏明月度。

这一部分是推算某日黄昏或黎明时的月行定度。本节 1(12)所求为昏明时月行的平均度，二者道理完全相同。

先从表 4.2 查出所求日的月行分，再从四分历所列漏刻表查出与该日相近节气的夜漏数，单位是刻。由于昼夜分为百刻，夜半到黎明(或黄昏)的月行定分就是 $\frac{\text{月行分}}{100}\times\frac{\text{夜漏数}}{2}=\frac{\text{月行分}\times\text{夜漏数}}{200}$，乾象历称

此数为明分。把“月行分－明分”叫做“昏分”。显然某日月行夜半定度加明分为次日黎明月行定分，加昏分等于次日黄昏月行定分。由于月行分的单位制是 1 度＝19 分，除章法得度，除不尽的余数乘通数 31 后，单位制变成了 1 度＝19×31＝589 分，就与本节 4(7)中推出的月行夜半定度所用单位制统一了。设：$\frac{明分}{章法}=L\frac{A}{章法}$，$\frac{昏分}{章法}=P\frac{C}{章法}$，以上所述可用下式表示：

$$月行夜半定度+L\frac{A\cdot 通数}{纪法}=月明定度 \qquad (4.47)$$

$$月行夜半定度+P\frac{C\cdot 通数}{纪法}=月昏定度 \qquad (4.48)$$

两式中 L、P 的单位是度，$A\cdot$通数及 $C\cdot$通数的单位都是分，单位制是 1 度＝589 分。《律历志》又说“余分半法以上成，不满废之”。李锐校注说“成”字之下脱一字。由于“余分”和“法”都不是确指以上两式中的某一项（因两式中的“法”是纪法或章法，若不满半法则废之，误差太大），只能以意解之，是说以上两式算出的分数化度以后剩余的部分比半分大，则保留下来，不足半分舍去之。因此，“余分”不是以上两式中化度以后剩下来的“分数之余”，而是指不足 1 分的剩余部分；“法”则是指“分”下的单位，在“月行分”中“分”下单位是“余”，所以“法”是指周日法 5969。这样“成”字下不必有字，原文并无脱漏。

5. 月行三道术

此处标题与本节 4 的标题“求月行迟疾”颠倒，已如前述。所谓“月行三道术”就是对月亮在白道不同阶段（即“三道”）上运行情形的推算法。开篇说：“月经四表，出入三道。”四表、三道都是对黄道而言：黄道东西南北，称为“四表”；黄道以南、以北的白道以及黄白交汇处的月道，合为“三道”。月在黄道以南运行的日历称为“阳历”，月道为外道；在黄道以北运行的日历称为“阴历”，月道为内道；在黄道上为中道。

(1)计算所需的诸参数和表格。

《律历志》这一部分的第一段文字介绍的参数包括历日、朔合分、退分、日进分、差率等，解释如下：

①历日。

“交错分天，以月率(周)除之，为历之日”(引号内为《律历志》原文，以下同，不另注)，即：

$$历日=\frac{周天}{2}\div月周=\frac{215130}{2\times7874}=13\frac{5203}{7874} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.49)$$

周天是每纪(589 年)日数，月周是每纪月行周数，半周天除月周等于太阴出入黄道半周的日数。由于黄白相交，交点以南、以北分别为阳、阴历，阳、阴历各占天周之半，所以(4.49)式所求得的历日数其实是月行阳历一周或阴历一周所经日数。不足 1 日的部分(5203)，《律历志》称为“分日”。

②朔合分。

“周天乘朔望合，如会月而一，朔合分也”，即：

$$朔合分=\frac{周天\times朔望合数}{会月}=\frac{215130\times941}{11045}=18328\frac{914}{2209} \quad\cdots\cdots (4.50)$$

以后的计算只把 18328 叫做“朔合分”，另称 914 为“微分”，2209 为“微分法”。由于朔望合数等于会率的一半，朔合分$=\frac{周天\cdot会率}{2\cdot会月}=\frac{周天}{2}\times$食数/月。每周二食，每食过半周天。每月食数乘半周天就是每月交食对应的天度分数。既是每月交食对应的天度分数，也可以说是自某月朔到下月朔之间交食对应的天度分数，因此名为朔合分。$\frac{朔合分}{纪法}=\frac{18328\frac{914}{2209}}{589}=31\frac{69\frac{914}{2209}}{589}$日，大于朔望月日数。这是由于推算朔望月的月行速度是月对地速度，小于推算月食所用的月行速度的缘故。

③退分。

“通数乘合数余，如会数而一，退分也”，即：

$$\begin{aligned}退分&=\frac{通数\times(朔望合数-会岁)}{会数}\\&=\frac{31\times(941-893)}{47}\\&=\frac{31\times48}{47}=31\frac{31}{47} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.51)\end{aligned}$$

其中(朔望合数－会岁)叫做“合数余”(中华书局标点本《晋书·律历

志》把“余”字断入下句，误)。朔望合数的意义是一会之中的日交周数，会岁是一会日行周数。二者相减是一会之中日交周与日行周的差。会数是一会之年包含的章数，通数是一纪之年所含章数。所以，一会之中的日交周与日行周差除以会数，得每章差，再乘通数就成了每纪差。即，除会数、乘通数以后由会变纪，原来的每会日交周与日行周差，变成了每纪日交周与日行周差。这样，可以把日行交周理解为日行周和日行过周之和，交周与日行周的差等于日行过周，对于日行周而言是超过的周数，称为过周。而对交周而言，是退行了若干周，自然也可称为日行退周。每纪退行周数就是每日退行分数(将周化为分，纪化为日即得)。所以(4.51)式的得数又称“退分”。退分就是每日日交对日行而言退行的分数。

①日进分。

(4.51)式可以写为：退分＝日交分－日行分。或者：日交分＝退分＋日行分。此式对于月行也是正确的，即有：月交分＝退分＋月行分。不过乾象历把月交分称做“日进分”。意义是：“(退分)以从月周，为日进分。”表示为：

$$\text{日进分}=\text{退分}+\text{月周} \cdots\cdots \quad (4.52)$$

月周是每纪月行周数，或每日月行分数。可见与上式相同。

“日进分”是每日进分的意思，并不是日行进分。把月交分称为“进”分是对月行分而言的，比月行分又多行了若干分，所以称为“进”分。

把已知数值代入(4.52)式，得：

日进分$=31\dfrac{31}{47}+7874=7905\dfrac{31}{47}$。此数如前所述，为每纪月行交周数，也是每天月交分数。

月交周－月行周＝日交周－日行周，都等于退分，原因何在呢？

1会893年，日交941周(会率的一半)，交比行多出941－893＝48周。可以算出1纪589年交比行多出：$893:48=589:x, x=\dfrac{48\times589}{893}=31\dfrac{31}{47}$周，与(4.51)式计算结果相同。现在考虑为何日交会比日行多

出 48 周(每会岁之中)? 日行周数是日对地运行周数,而日交周却是由日、月、地三者相对位置决定的,只要三者在同一直线上就是一交,二交就是一交周。由于月行比日行速度快,无须日绕地一周,日月才交会一周。日从上一个交会点还没有行过一周天,回复到原交会点的位置,月亮已追及日,使日、月、地在同一直线上而发生交食。所以,日交周比日行周多出的周数其实是多出的日月交会周数。在一会时间内,无论按会岁计算日交周,还是按会月计算月交周,多出的日月交会的数目总是相同的,“日交周减日行周”与“月交周减月行周”所得数都是指的这种日月交会数,所以,两者不可能不相同。

⑤差率。

“(日进分)会数(乘之,通数)而一,为差率也”,“乘之,通数”四字系据李锐《汉乾象术》卷上补。上面的话可以表示为:

$$差率=\frac{日进分\times会数}{通数}=\frac{7905\frac{31}{47}\times47}{31}=11986 \quad\cdots\cdots\quad (4.53)$$

可以看出 11986=11045+941,即:

$$差率=会月+朔望合数 \quad\cdots\cdots\quad (4.54)$$

此外,在(4.51)式中,把某数(每会退周)乘通数、除会数,此式却是把某数(日进分)乘会数、除通数,是(4.51)式的逆运算。(4.51)式是“变会为纪”,此处则是“变纪为会”:“日进分”是每纪月交周,乘会数、除通数以后,变成了每会月交周。这就是说,差率的意义其实是指每会月交周数。同是月交周,一名“进分”,一名“差率”,“进”与“差”换一种说法而已。

(4.53)式还提供了一个差率与日进分互求的关系式,(4.53)式是由日进分求差率,它的逆运算就是由差率求日进分的公式:

$$日进分=\frac{差率\times通数}{会数} \quad\cdots\cdots\quad (4.55)$$

⑥少大法。

还有一个参数叫做“少大法”,是运算中产生的中间数,等于分日(5203)的十一分之一。即:

$$少大法=\frac{分日}{11}=\frac{5203}{11}=473$$

乾象历提供的计算表格无题名,按表意姑且称之为“黄、白道相去

度分表”。

表 4.4 黄、白道相去度分表

阴 阳 历	衰	损 益 率	兼数
一日	1 减	益 17	初
二日(限余 1290,微分 457,此为前限)	1 减	益 16	17
三日	3 减	益 15	33
四日	4 减	益 12	48
五日	4 减	益 8	60
六日	3 减	益 4	68
七日	3 减(减不足,反损为加。谓益为 1,当减 3,为不足)	益 1	72
八日	4 加	损2(过极损之。谓月行半周度已过极,则当损之)	73
九日	4 加	损 6	71
十日	3 加	损 10	65
十一日	2 加	损 13	55
十二日	1 加	损 15	42
十三日(限余 3912,微分 1752,此为后限)	1 加(历初;大,分日)	损 16	27
分日(5203)	少加少者	损 16 大	11

此表逐日记录了在阴(阳)历一周($13\frac{5203}{7874}$日)的时期内,黄、白道相去度分值,表中把此数值称为兼数,单位为分(1 度=12 分)。另一栏“损益率”中的数值表示的是相邻两日的兼数差。次日兼数与头日相比增加若干,称为“益”若干,记在头日相应栏内;否则称为“损”若干。还有一栏名为“衰”,记录了“损益率”栏中数值的变动情形,次日损益率数大于头日数,记为“加”,否则称为减。而不论是损是益,“加”则损或益数都增加,“减”则损、益数都减少。第一栏“阴阳历”列出的是逐日日序数。

表中的小字注笔者都加了括号,“阴阳历”栏中有三项:最后一项

“分日”后的数字，是阴(阳)历一周日数($13\frac{5203}{7874}$日)中的畸零数。其余两项为“前限”、“后限”，“限”就是日月食的界限，数值计算法如下：首先把日交一周分数的一半定为限分，即：限分$=\frac{朔合分}{2}=\frac{18328\frac{914}{2209}}{2}=$ $9164\frac{457}{2209}$(分)。它其实是两食之间(日食到月食或朔到望)的日分数。日月同时从某交会点(食点)出发到下一交会点，月亮最先到达，历时：

$$\frac{限分}{每日月行分}=\frac{限分}{月周}=\frac{朔合分}{2\times 月周}=\frac{9164\frac{457}{2209}}{7874}=1\frac{1290\frac{457}{2209}}{7874}日$$

科技史研究所的陈美东先生将此数乘月速($\frac{小周}{章岁}$)，再把它换算为食年长度(食年长度，除回归年长度)，得 14°55，指出这是乾象历采用的不偏食限[①]，称为前限。还有后限，它距初交的天数为：

$$历日-前限=13\frac{5203}{7874}-1\frac{1290\frac{457}{2209}}{7874}=12\frac{3912\frac{1752}{2209}}{7874}日$$

由于历日－后限＝前限，显然，后限是到后交点的不偏食限。即在阴(或阳)历一周内，大于前限，小于后限的时期内，不可能发生月偏食。前限在第二日开始后的 $1290\frac{457}{2209}$分处，后限在第十三日开始后的 $3912\frac{1752}{2209}$分处。与表注相同。

日衰“3 减”下注文是根据李锐注改，原文“有”字下漏“一”，“当”字下衍“加”字。

八月下“损 2”注：“过极损之”，“极”是指黄白道相距的最远点，过此点以后，损益率由益变损，即黄、白道间距由增大变为逐日减少。由表列兼数值，知此点处黄、白道相去 6 度余($\frac{73}{12}=6\frac{1}{12}$度)。

---

① 见陈美东《中国古代的月食食限及食分计算法》，《自然科学史研究》1991 第 4 期，第 298～299 页。

“分日”损益率“损 16 大”,“大”是约数,准确值可仿照表 4.2 中计算周日列衰的方法算出。因分日完了时,兼数 11 应回复为 0,亦分日中 5203 分(全日 7874 分)的损率是 11,全日损率应是:

$5203:11=7874:x,x=\frac{7874\times 11}{5203}=16\frac{306}{473}$。即分日损率“16 大”中的大字准确数是$\frac{306}{473}$分,分母 473 为少大法,分子 306 为少大分。

13 日损益率是“损 16”,分日损益率是损 $16\frac{306}{473}$,那么,13 日衰应是“$\frac{306}{473}$加”,或者称为“大加”,实际却是“1 加”,注文解释说“历初;大,分日”。意思是计算过程中由十三日“跃入到历初时,衰取为“1 加”;到分日则取为“大”。这样,分日损率“损 16 大”和历初(一日)益率“益 17”都能解释得通。中华书局 1987 年版《晋书·律历志》标点为“历初大,分日”,那就毫无意义了。

分日衰“少加少者”中的“少者”疑是小字注误入正文者,且“者”字后有脱文。该日损益率为“损 16 大”,“少加”之后变为历初益率“益 17”,“少”字值也是确定的:$17-16$ 大$=17-16\frac{306}{473}=\frac{163}{473}$。即“少”指少大分 163。

(2)推朔入阴阳历。

从上元以来的积月之中除去交食周期会月,剩余不满一会月的部分乘以每月日行交周分数(朔合分和微分),把月化为分。再从中除去周天分,剩下的不满一周天的分数,若不满历周(半周天)入阳历,满历周入阴历。最后除以月周(每日分数)化为日 。《律历志》所给公式分三步:

$$\text{第一步:}\frac{\text{上元积月}}{\text{会月}}=m\,\frac{\text{会余}}{\text{会月}}\quad\cdots\cdots\quad(4.56)$$

其中 m 为自然数,且满足:0≤会余<会月。

$$\text{第二步:}\frac{\text{会余}\times(\text{朔合分}+\frac{\text{微分}}{\text{微分法}})}{\text{周天}}=n\,\frac{\text{朔合余}}{\text{周天}}\quad\cdots\cdots\quad(4.57)$$

其中 n 也是自然数,且能满足 0≤朔合余<周天。若朔合余<历周,入

阳历；朔合余＞历周，减去历周后的余数入阴历。原因是上元是从阳历起始的。

$$\text{第三步：}\frac{\text{朔合余或除去历周后余数}}{\text{月周}}=\text{入阴阳历日数}\frac{\text{日余}}{\text{月周}} \quad \cdots\cdots (4.58)$$

入历日数算外为所求月合朔入历日。

例：求建安十一年八月朔的入阴阳历日数。上元己丑至建安十一年丙戌积岁 7378 年，算外 7377 年。到建安十一年八月以前的积月是：

$$\frac{\text{上元积年}\times\text{章月}}{\text{章法}}+\text{当年月数}=\frac{7377\times 235}{19}+\text{当年月数}$$

$$=91241\frac{16}{19}+\text{当年月数}$$

由于月余 16＞12，建安十一年有闰。每月有闰分$\frac{7}{12}$，积够 3 分即可置闰，因此估计闰月在第 6 月（$3\div\frac{7}{12}=5\frac{1}{7}$）。该年八月以前的月数为十（不包括八月，自头年阴历十一月起），代入上式得：

上元以来积月 $91241+10=91251$

代入(4.56)式：$\frac{\text{上元积月}}{\text{会月}}=\frac{91251}{11045}=8\frac{2891}{11045}$

再把会余 2891 代入(4.57)式：

$$\frac{2891\times 18328\frac{914}{2209}}{215130}=246\frac{65464\frac{410}{2209}}{215130}$$

$65464\frac{410}{2209}$为朔合余，小于历周 107565，八月朔入阳历。代入(4.58)式：$\frac{65464\frac{410}{2209}}{7874}=8\frac{2472\frac{410}{2209}}{7874}$。因知八月朔入阳历第九日（入历日八，日余 $2472\frac{410}{2209}$）。

(3)求次月朔入历。

本可从头月天数中除去阴阳历二周，剩余的天数加入头月朔入历日数中，就是次月朔入历日了。但头月天数是 29 天还是 30 天难以确

定，故不用此法。仍从本节5(2)中的三个分式推导。由(4.56)式知，次月比头月上元积月数多1，用(4.56)式推算次月时，比头月会余多1月；再用(4.57)式计算，由于会余多1，算得的朔合余比头月多(朔合分$+\frac{微分}{微分法}$)；代入(4.58)式后，次月朔入历比头月朔入历多出：

$$\frac{朔合分+\frac{微分}{微分法}}{月周}日=\frac{18328\frac{914}{2209}}{7874}=2\frac{2580\frac{914}{2209}}{7874}日 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.59)$$

所以，《律历志》说，求次月朔入历，只要在前面算得的头月入历日数中"加二日，日余二千五百八十，微分九百一十四"。加得的结果中，微分满2209化为1，入日余；日余满7874，化为1日。入历日数积满阴(阳)历一周，除去之。即从中减去$13\frac{5203}{7874}$日(日减13，日余减5203)，由余数从历初重新起始计入历日，就是《律历志》说的"阴阳历竟互入端"，阳历竟(终了)余数入阴历端，阴历竟余数入阳历端。

《律历志》又说"入历在前限余前、后限余后者，月行中道也"。由表4.4可以算得，前限余前、后限余后黄白道相距最大约19分余，不足2度，近似认为是"月行中道"。专门指出此点的原因是，乾象历认为只有月行中道才可能发生日、月食，否则虽交不食。

前例建安十一年八月朔入历八日余，既不在前限之前，也不在后限之后，八月朔没有日食。今求次月(九月)朔入历数：

$$8\frac{2472\frac{410}{2209}}{7874}=2\frac{2580\frac{914}{2209}}{7874}=10\frac{5052\frac{1324}{2209}}{7874}日$$

九月朔入阳历十日，日余5052，微分1324。也不在中道，无食。

(4)求朔望定数。

这一部分是计算在定朔或定望时，黄、白道之间的定度分数，或者说是月与黄道的距离。由表4.4算得平朔望入阴阳历的日分数之后，求其相应兼数，是为平朔望时的黄、白距定度分数，要求定朔望时的黄、白距定度，须首先求定朔望入阴阳历日分数(整日和定日余)，它等于平朔望入迟疾历(表4.2)的盈缩数与平朔望二者入阴阳历的日分数之和(代数和)。表示如下：

平朔望入阴阳历日数及日余干 平朔望(在迟疾历中)的盈缩数入阴阳

历的大分和小分＝定朔望入阴阳历的定日数和定日余 …… (4.60)

与定日数对应的兼数从表 4.4 直接查得，与定日余对应的兼数是：$\frac{定日余}{月周}$×损益率(损益率也由表 4.4 查得)，它等于定日余所在日全天兼数的部分值。这样就得到《律历志》所给公式：

$$朔望定数=兼数\pm\frac{定日余\times损益率}{月周} \quad\cdots\cdots (4.61)$$

应用(4.61)式的难点在于定日余的求法，从(4.60)式可以看出，须解决两个问题，一是求入迟疾历的盈缩数；二是推算盈缩数入阴阳历的大、小分。前者由本节 4(4)求得；后者可由本节 4(4)中的(4.28)式算得的结果乘以日进分($7905\frac{31}{47}$)得出，所得大分可直接并入由平朔入阴阳历的日余分中；小分分母(47)与平朔入阴阳历日余中的微分分母(2209)不同，须将小分乘 47(会数)后才能并入。所谓“并入”是指加或减：入迟疾历为盈，月速大于平均速度，所求定朔大小余小于平朔大小余，入阴阳历数也是定朔小于平朔。因此迟疾历盈缩数入阴阳历并入平朔入阴阳历时是“盈减缩加”。

由以上所述知《律历志》所说：“各置入迟疾历盈缩大小分，会数乘小分为微分，盈减缩加阴阳日余。”首句应是“各置迟疾历盈缩入阴阳历大、小分”；末句“阴阳”后脱“历”字，前脱“平朔入”三字。

例：求建安十一年八月朔日定数。本节 5(2)已求得建安十一年八月朔入于阳历第 9 日，日余 2472，微分 410。

由积月 91251 求入迟疾历盈缩数：先由(4.23)式推算平朔入迟疾历数：

$$\frac{上元积月\times朔行大分\frac{小分}{通数}-n\cdot历周}{周日法}$$

$$=\frac{91251\times11801\frac{25}{31}-164466n}{5969}$$

$$=\frac{1076926640\frac{16}{31}-164466n}{5969}$$

命 $n=6548$，上式 $=\frac{3272\frac{16}{31}}{5969}$。

由此知，八月朔入于迟疾历的历初，查表得损益率为“益 22”，盈积为：$\frac{3272\frac{16}{31}\times 22}{5969}=12\frac{367\frac{11}{31}}{5969}$。即盈 12 分，余 367，小分 11。为求盈积入阴阳历数，先把盈积除章岁、乘纪法化为周天分，再除月周后化为日，与日进分相乘即得：

$$\frac{12\frac{367\frac{11}{31}}{5969}\times 589}{19\times 7874}\times 7905\frac{31}{47}=375\frac{19\frac{1964\frac{8}{127}}{5969}}{47}$$

大分 375，小分 $19\frac{1964\frac{8}{127}}{5969}$。

把小分乘会数 47，变为微分，得 $908\frac{7501}{16129}$。迟疾数为盈，应分别与朔入阴阳历的日余、微分相减得：日余 $2472-375=2097$，微分 $410-908\frac{7501}{16129}$，不够减，自日余中借 1 算，化为微分 2209，增入微分 410 中。然后减得：$2209+410-908\frac{7501}{16129}=1710\frac{8628}{16129}$。八月朔入阴阳历，定日余为 $2096\frac{1710\frac{8628}{16129}}{2209}$。按(4.59)式求朔日定数：

$$71-\frac{2096\frac{1710\frac{8628}{16129}}{2209}\times 6}{7874}=71-1\frac{4706\frac{1427\frac{3381}{16129}}{2209}}{7874}\text{分}$$

$$=5\text{度}\,9\,\frac{3167\,\frac{781\,\frac{12748}{16129}}{2209}}{7874}\text{分}$$

建安十一年八月定朔，月距黄道 5 度 9 分余（1 度＝12 分），月在黄道南。

（5）推夜半入阴阳历数。

本节 5(2)给出了推算合朔入阴阳历的公式。如图 4.5*OP* 为时间轴，其中一个时段 *MN* 为阴（阳）历 1 周，合朔点 *A* 入历数为 *AM*，求夜半时 *B* 的入历数 *BM*。显然，*BM*＝*AM*－*AB*。*AM* 是合朔入历数，已由本节 5(2)算出，*AB* 是朔小余（不足 1 日的部分，分母为日法）的入历数。

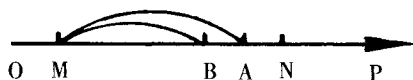



图 4.5　夜半入历图

前面介绍过一个参数日进分，是每天的月行交分数，就是每日的入历分数。因此，朔小余的入历分数（设为 x）可由比例法求得：

$$1:\text{日进分}=\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}:x$$

为了与《律历志》所给公式相合，“日进分”由差率表达〔参见(4.53)式〕，上式写为：

$$1:\frac{\text{差率}\times\text{通数}}{\text{会数}}=\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}:x$$

$$x=\frac{\text{差率}\times\text{通数}}{\text{会数}}\times\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}=\frac{\text{差率}\times\text{通数}}{\text{会数}}\times\frac{\text{朔小余}}{\text{通数}\times\text{会数}}$$

$$=\frac{\text{差率}\times\text{朔小余}}{[\text{会数}]^2}=\frac{\text{差率}\times\text{朔小余}}{\text{微分法}}$$

由此得：

$$\text{夜半入历}=\text{合朔入历日及余}-\frac{\text{差率}\times\text{朔小余}}{\text{微分法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4.62)$$

合朔入历日余不够减，则从入历整日中取出 1 日化为分，加到日余之

中，再减。由(4.58)式知入历日余的分母等于月周，1日所化分数也等于月周。取出1日后，入历日数须减1日。所以，《律历志》说："减入历日余，不足，加月周而减之，却一日"。"却一日"就是入历日数减1日的意思。

(4.62)式右端第二项的单位是分，分满月周为1日，不满月周的余分为日余，日余下为小分(分母为会数47)。

例：求建安十一年八月朔日夜半入阴阳历数。已知八月朔以前积月91251，八月朔日小余为：

积月$\times\frac{\text{通法}}{\text{日法}}=91251\times\frac{43026}{1457}=2694691\frac{739}{1457}$。其中739为朔小余。

八月朔的入历日和余前面已经算出为$8\frac{2472\frac{410}{2209}}{7874}$日，把入历日余$2472\frac{410}{2209}$和朔小余一起代入(4.60)式：

$2472\frac{410}{2209}-\frac{11986\times739}{2209}=2472\frac{410}{2209}-4009\frac{1773}{2209}$。不够减，从入历整日8中取出1日，化为7874分，增入被减数$2472\frac{410}{2209}$之中，$2472\frac{410}{2209}+7874=10346\frac{410}{2209}$。再减：$10346\frac{410}{2209}-4009\frac{1773}{2209}=6336\frac{846}{2209}=6336\frac{18}{47}$，得建安十一年八月朔日夜半入阴阳历七日，日余6336，小分18。小分满会数47入日余，日余满月周7874为整日。

(6)求次日夜半入历。

由于1日入历数等于日进分，次日比头日入历数应多日进分。所以：

$$\text{次日夜半入历}=\text{头日夜半入历}+\text{日进分} \quad\cdots\cdots\quad (4.63)$$

把日进分〔$7905\frac{31}{47}$，参见(4.52)式〕除以月周(7874)化为日，不尽为日余：

$\frac{7905\frac{31}{47}}{7874}=1\frac{31\frac{31}{47}}{7874}$日。代入(4.63)式：

$$\text{次日夜半入历}=\text{头日夜半入历}+1\frac{31\frac{31}{47}}{7874}\text{日} \qquad (4.64)$$

就是《律历志》说的"求次日，加一日，日余三十一，小分三十一。小分如会数(47)从余，余满月周(7874)去之，又加一日"。当入历整日满13，日余满分日(5203分)积满1周，把13日5203分除去后，剩余的部分转入次历。若整日满13日，日余不满分日，不足1周。这时要再延1日才能入次历。延1日，入历数又增日进分 $7905\frac{31}{47}$，从中减去分日5203分，余 $2702\frac{31}{47}$，连同头日的日余一起转入次历。就是把头日日余加上 $2702\frac{31}{47}$ 以后，作为入下周的日分数。

例：前(3)求得建安十一年九月朔入历 $10\frac{5052\frac{1324}{2209}}{7874}$ 日，次日(初二日)入历：

$$10\frac{5052\frac{1324}{2209}}{7874}+1\frac{31\frac{31}{47}}{7874}=11\frac{5084\frac{572}{2209}}{7874}$$

同样求得初四日入历为：

$$11\frac{5084\frac{572}{2209}}{7874}+\left(1\frac{31\frac{31}{47}}{7874}\times2\right)=13\frac{5147\frac{1277}{2209}}{7874}\text{日}$$

整日13，日余5147小于分日5203，仍在原历之中。复求次之，即初五日入历数，这时只需在日余5147之上加2702，得7849；微分1271先变为小分：$\frac{1277}{47}=27\frac{8}{47}$，小分加31得 $58\frac{8}{47}$。知初五日入历在下周历初7849分，小分为 $58\frac{8}{47}$。

(7)求夜半定日。

推求在夜半定度时，月与黄道间距。可分三步进行：先求出夜半定度，可按(4.34)式计算；再由夜半定度求入阴阳历数；最后由夜半定度入阴阳历数和表4.4求出对应的兼数，即月与黄道间距。

从(4.34)式可见，夜半定度由两部分组成，一是“夜半平行度及余”，一是它们入迟疾历的盈缩数。那么，第二步计算入阴阳历数也应分两部分：一是求夜半平行度及余的入阴阳历数，可按(4.60)式推算，得到入历日及日余二项数据。二是求迟疾历盈缩数入阴阳历的数据。把以上两组得数合并，得到入阴阳历日数和日余。日数不必论，日余包括夜半平行度及余的入阴阳历日余和迟疾历盈缩数入阴阳历日余。在求后一项日余时，由于迟疾历盈缩数的单位制是 1 度＝19 分，而表 4.4 所列阴阳历的单位制与周天分相同，1 度＝589 分＝19×31 分，须将盈缩分乘通数(31)，而后才能合并(盈加缩减)。由日数查表 4.4 得兼数，由日余查得损益率。算出相应兼数，两者相加(减)就是所求数。表示为：

$$\text{夜半定日}=\text{兼数}\pm\frac{\left(\frac{\text{平朔夜半度及余}}{\text{入阴阳历日余}}\pm\frac{\text{夜半迟疾盈缩数}}{\text{入阴阳历日余}}\times\text{通数}\right)\times\text{损益率}}{\text{月周}} \quad \cdots\cdots(4.65)$$

其中兼数后的加减号由式中的损益率判定，损减益加；第二个加减号由迟疾盈缩数判定，盈加缩减。此外，所谓“日余”是不满月周的分数，(4.65)式分子中括号内第一项日余是由本节 5(2)中的公式推得，由于曾经与朔合分及微分相乘，所得日余也有分和微分两部分，微分分母是微分法 2209。第二项日余则不同，迟疾盈缩数不满 1 日，写为$\frac{\text{余}\frac{\text{小分}}{\text{通数}}}{\text{周法}}$，它的入阴阳历数是与日进分 $7905\frac{31}{47}$ 相乘而得，得数包含大分、小分两部分，为运算方便，大、小分保持日进分的结构形式，小分分母固定为 47。于是得数应进行如下变换：$\frac{\text{与日进分乘积}}{\text{周法}}=\text{大分}\frac{\text{余}}{\text{周半}\times\text{会数}}=\text{大分}\frac{\text{余}/\text{周半}}{\text{会数}}$。所以，《律历志》说“余满周半为小分”。

与(4.65)式对照，《律历志》说的“入迟疾历夜半盈缩及余”应该是“迟疾历夜半盈缩入阴阳历日及余”，而下文中的“以盈加缩减入阴阳日余”应该是“以盈加缩减平朔入阴阳历日余”。

例：求建安十一年八月朔夜半定数。

本节 5(5)例已算出建安十一年八月平朔夜半入阴阳历七日，日余 6336，小分 18。下边求夜半入迟疾历数，由本节 4(6)中的(4.33)式：

$$夜半入迟疾历数=平朔入历日数+平朔入历日余-\frac{周半\times朔小余}{通数}$$

$$=0+3272\frac{16}{31}[1]-\frac{127\times739[2]}{31}$$

$$=3272\frac{16}{31}-3027\frac{16}{31}$$

$$=245分$$

入于迟疾历初，大分 245。盈缩数为：

$$\frac{245\times22}{5969}=\frac{5390}{5969}(盈)$$

把此数除以章法(19)，乘纪法(589)[3]化为周天分后，除以月周，再乘日进分($7905\frac{31}{47}$)，得到夜半入迟疾盈缩数的入阴阳历数：

$$\frac{5390\times589\times7905\frac{31}{47}}{19\times5969\times7874}=28\frac{4\frac{727210}{758063}}{47}分$$

其中 28 为日余，$4\frac{727210}{758063}$为小分，可以与朔日夜半入阴阳历小分同步。

《律历志》说“余满周半为小分”，只需将 $4\frac{727210}{758063}$写成 $4\frac{121\frac{4961}{5969}}{127}$即可，$121\frac{4961}{5969}$名为余，4 为小分。

查表 4.4，定日 7 兼数 73 分(在表 4.4 阴阳历栏八日之下兼数)；损益率 2 分，代入(4.65)式：

① 八月平朔入迟疾历日及余的计算见本节 5(4)例。

② 朔小余的计算见本节 5(5)例。

③ 就是(4.65)式中的“×通数”，$\frac{纪法}{章法}=\frac{589}{19}=31$。

$$夜半定日=73-\frac{(6336+28)+\frac{18+4\frac{727210}{758063}}{47}}{7874}\times 2$$

$$=73-1\frac{4854\frac{45\frac{696357}{758063}}{47}}{7874}$$

$$=71\frac{3091\frac{1\frac{30853}{758063}}{47}}{7874}$$

除以 12 化为定度得 5 度 11 分余。建安十一年八月朔日夜半定度时，月在黄道南 5 度 11 分余。

(8)求昏明数。

推黄昏、黎明时，月距黄道度分数。《律历志》所给公式共四个：

$$明时数=\frac{所近节气夜漏数\times 损益率}{200} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.66)$$

$$昏时数=损益率-\frac{所近节气夜漏数\times 损益率}{200} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.67)$$

$$明定数=夜半数\pm明时数=夜半数\pm\frac{所近节气夜漏数\times 损益率}{200} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.68)$$

$$昏定数=夜半数\pm(损益率-\frac{所近节气夜漏数\times 损益率}{200}) \quad\cdots\cdots \quad (4.69)$$

显然(4.66)、(4.67)两公式是(4.68)、(4.69)两个公式的中介式。所谓“明时数”、“昏时数”、“明定数”、“昏定数”中的“数”，都是指月距黄道度分数。所谓“定数”则是指月定度距黄道度分数。前两式与是否定度无关，故不称“定数”，只称数。

如图 4.6，O_2、O_1 为相邻两日夜半点，A、B，C、D 各为两日昏、明点，把 O_1O_2 分为 100 刻，AB、CD 是相邻节气的夜漏数，那么：

$O_1O_2=1$ 日 $=100$ 刻

AB 或 $CD=\frac{夜漏刻}{100}$ 日

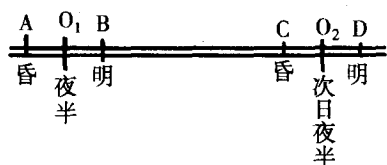



图 4.6　昏明定数图

AO_1 或 O_1B、CO_2、$O_2D=\dfrac{\text{夜漏刻}}{200}$日

损益率是全日兼数的变化值（或损或益），所以：

$$\text{明时数}=\frac{O_1B}{O_1O_2}\text{损益率}=\frac{\text{夜漏刻}\times\text{损益率}}{200}$$

$$\text{昏时数}=\text{损益率}-\frac{CO_2}{O_1O_2}=\text{损益率}-\frac{\text{夜漏刻}\times\text{损益率}}{200}$$

以上两式就是(4.66)、(4.67)式。而要确切知道某日黎明或黄昏定度时月距黄道度分数，只要知道该日夜半时月距黄道度数（明定数或昏定数）加减以上数字则可。即：

明定数（B 时月与黄道距度数）$=O_1$ 点时距度 $\pm O_1B$ 之间的变化度

$=$夜半数$\pm$明时数

昏定数（C 点时数）$=O_1$ 点数$\pm$（O_1O_2 间变化数$-CO_2$ 变化数）

$=$夜半数$\pm$（损益率$-$明时数）

这两个式子其实就是(4.68)、(4.69)式。不再举例。

(9)求月去极度。

本节 5(4)、(7)、(8)都是求月到黄道间度分。加减黄道去极度数，就是所求月去极度数。阳历月在黄道南，用加号；阴历月在黄道北，用减号。从《律历志》可查二十四节气黄道去极度数[1]，若所求非二十四气所在日，可选择相近节气的去极度数。显然，这里算得的只是去极度的近似值。西法传入以前，中国没有黄赤道换算的精确方法，所推都是近似值。

《律历志》“求月去极度”的文字还有两点须说明，一是关于四分小

① 见《后汉书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 3077～3079 页。

数的名称,《律历志》说"置加时若昏明定数,以十二除之为度,其余三而一为少,不尽一为强,二少弱也",第一句是说,"取加时定数,比如取前面算得的昏明定数(当然取"夜半定数"或"朔望定数"皆可)。第二句说,用 12 除之化为度。因为"昏明定数"等都是"兼数"值,它的单位制是 12 分为 1 度,所以,除 12 就变成了度。第三句说,除不尽的部分每 3 分取为 1 个单位,名为少。12 分为度,3 分等于 1 度的$\frac{1}{4}$,名为少。按传统分法$\frac{1}{4}$为少,$\frac{1}{2}$为半,$\frac{3}{4}$为太。这里只讲$\frac{1}{4}$为少,其余不言而喻,采用的是传统分法。第四句说,这名为"少"的 3 分之中,只余 1 分名为强,余 2 分名为少弱,3 分皆俱才叫做少。与《后汉书》所载四分历的名称相同,参见图 3.10。

二是其中讲了正负数加减法运算法:"强正弱负,强弱相并,同名相从,异名相消。其相减也,同名相消,异名相从。无对互之,二强进少而弱。"这是把《九章算术》中正负数计算法引入了历法计算,以强为正,以弱为负。强弱相加减就变成了正负数的加减。文中"并"、"从"都是相加的意思,"消"是相减。同是正数或同是负数称为"同名",一正一负为"异名"。"无对互之"是指相减的两个数中,只有减数有强或弱,被减数没有。减得的结果是:减弱得强,减强得弱。"二强进少而弱"是指二强相加得少弱,即两个$\frac{1}{3}$相加得$\frac{2}{3}$。

(10)纪首岁名表。

自上元己丑以来到建安十一年丙戌,积 7378 年(包括建安十一年在内)。第一纪年名己丑,589 年以后,即第 590 年年名的求法:$\frac{589}{60}=9$甲子,余 49 年。在甲子表中己丑年之后,第 50 位戊寅为第二纪首年名。同样戊寅之后第 50 位丁卯为第三纪首年名……以次类推得表 4.5。建安十一年丙戌所入纪:

$\frac{\text{上元以来积年}}{\text{纪法}}=\frac{7377}{589}=12$,余 309。即入于第 13 纪第 310 年,纪首岁名丁丑。

表 4.5　纪首岁名表

上元以来纪序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
纪首岁名	己丑	戊寅	丁卯	丙辰	乙巳	甲午	癸未	壬申	辛酉	庚戌	己亥	戊子	丁丑	丙寅	乙卯	甲辰

6. 推五星

(1)五星参数。

为了计算便利，把五星参数列入下表：

表 4.6　《乾象历》五星参数表

	木	火	土	金	水
周　率	6722	3407	3529	9022	11561
日　率	7341	7271	3653	7213	1834
合月数	13	26	12	9	1
月　余	64801	25627	53843	152293	211331
合月法	127718	64733	67051	171418	219659
朔虚分	150	300	923	328	684
朔大余	23	47	54	25	29
朔小余	1307	1157	534	1129	773
入月日	15	12	24	27	28
日　余	3484646	973013	166272	56954	6410967
日度法	3959258	2006723	2078581	5313958	6809429
斗　分	974690	494015	511705	1308190	1676345
度　数	33	48	12	292	57
度　余	2509956	1991706	1733148	56954	6410967

(2)推算距所求年最近一次星合所在年。

已知星每合所需年数：$\frac{\text{日率}}{\text{周率}}$，自上元以来的星合总数(积合)：

$$\text{上元以来积年} \div \frac{\text{日率}}{\text{周率}} = \frac{\text{上元以来积年} \times \text{周率}}{\text{日率}} = A \cdot \frac{\text{合余}}{\text{日率}} \quad \cdots\cdots \quad (4.70)$$

式中上元积年包括所求年在内，A 为积合，是自然数，且满足 $0 \leqslant$ 合余 $<$ 日率。那么，末次星合到所求年底的时距为：

$$\frac{\text{合余}}{\text{日率}} \times \text{年数/每合} = \frac{\text{合余}}{\text{日率}} \times \frac{\text{日率}}{\text{周率}} = \frac{\text{合余}}{\text{周率}} \quad \cdots\cdots \quad (4.71)$$

得数小于 1，末合在所求年；大于 1，在所求年前一年；大于 2，在前二

年，余类推。

把上二式合为一式，由(4.70)式得：

合余＝上元以来积年×周率－A・日率

代入(4.70)式得：

$$末合距所求年底时距＝上元以来积年－A\cdot\frac{日率}{周率}\cdots\cdots\quad(4.72)$$

显然，上元以来积年－A・$\frac{日率}{周率}\geqslant 0$。即：上元以来积年$\geqslant A$・$\frac{日率}{周率}$；A为自然数。

《律历志》还以周率－合余＝度分。从(4.71)式可以看出，所谓度分，就是把1年划分作周率分，末合发生时差几分不足1年。如图4.7。

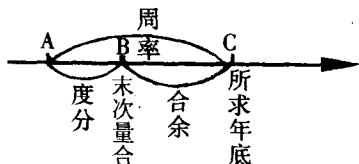



图4.7　度分图

《律历志》还说："金、水积合，奇为晨，偶为夕。"这是由于金、水二星都有晨合和夕合，而且是相间发生。上元之始第一次星合是晨合，此后便永远如此，第奇数次为晨合，第偶数次为夕合。

(3)推末次星合所在月。

《律历志》所给公式分四步。第一步，由积合求积月：

$$积合\times每合月数=\frac{(合月数+月余)\times积合}{合月法}=积月\frac{积月余}{合月法}\cdots\cdots\quad(4.73)$$

第二步，从积月中除去纪月的整数倍，以剩余的不足纪月的部分为入纪月：

$$\frac{积月}{纪月}=B\cdot\frac{入纪月}{纪月}(B为自然数，且使入纪月<纪月)\cdots\cdots\quad(4.74)$$

第三步，求出入纪月内所含闰月数，已知每个章月(235月)中有7个闰月，所求闰月数为：

$$闰月数=\frac{入纪月\times章闰}{章月}\cdots\cdots\quad(4.75)$$

第四步，从入纪月中减去闰月总数，剩余的是不包括闰月在内的月数，每12个月(等于岁中)为1年，满1年则除去之，剩余不满12个月的部分名为中余：

$$\frac{\text{入纪月}-\text{闰月数}}{\text{岁中}}=C\cdot\frac{\text{中余}}{\text{岁中}} \quad\cdots\cdots (4.76)$$

式中C为自然数，且使中余<岁中。自天正月数起，中余算外的月份就是末次星合所在月。如中余为8，自天正月以后，算外第九月为该年〔本节6(2)中求出的星合年〕的七月份。这一月若是闰月，当名为闰六月。是否闰月，要与本节1(4)的运算结果联合判定：该月朔落在前月中气后第一日，该月无中气，为闰月，否则不闰。就是《律历志》说的“其在闰交际，以朔御之”。

(4)推算末合所在日。

由积月定星合所在月，积月余便可定星合所在日。

从(4.73)式可知，积月余是上元以来到所求年之间积月以外的畸零部分，可以换算为日。此外，积月化为积日后，所得不足1日的部分，叫做“积日朔小余”，这两部分畸零数都应归入下月(积月数外月)，算外就是星末合所在日。因此得：

$$\begin{aligned}&\frac{\text{积月余}}{\text{合月法}}\times\text{每月日数}+\frac{\text{积日朔小余}}{\text{日法}}\\&=\frac{\text{积月余}}{\text{周率}\times\text{章岁}}\times\frac{\text{通法}}{\text{日法}}+\frac{\text{积日朔小余}}{\text{日法}}\\&=\frac{\text{积月余}\times\text{通法}}{\text{周率}\times\text{章岁}\times\text{通数}\times\text{会数}}+\frac{\text{积日朔小余}\times\text{合月法}}{\text{合月法}\times\text{日法}}\\&=\frac{\text{积月余}\times\text{通法}}{\text{日度法}\times\text{会数}}+\frac{\text{积日朔小余}\times\text{合月法}}{\text{日度法}\times\text{会数}}\\&=\frac{\text{积月余}\times\text{通法}+\text{积日朔小余}\times\text{合月法}}{\text{日度法}\times\text{会数}}\\&=\text{星合入日}\frac{\text{积日余}}{\text{日度法}\times\text{会数}} \quad\cdots\cdots (4.77)\end{aligned}$$

星合入日自月朔起算，算外为所入日日名。

《律历志》所给公式是：

$$\frac{\text{月余}\times\text{通法}+\text{朔小余}\times\text{合月法}}{\text{日度法}\times\text{会数}}\text{星合入日}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}\times\text{会数}} \quad\cdots\cdots (4.78)$$

与(4.77)式比较可知，(4.77)式中的积月余、积日朔小余、积日余，在

(4.78)式中称为月余、朔小余和日余。月余、朔小余、日余的名称已列入表 4.6 中，含意分别是每合积月余分、每合积日朔小余和日余。把它们代入(4.78)式是不能算出星合所入日的。因此，有理由认为(4.78)式中的月余、朔小余和日余所指就是(4.77)式中的积月余、积日朔小余和积日余，而与表 4.6 中的积月、朔小余、日余不同。

(5)推星合所在度。

《律历志》所给公式是：

$$\frac{\text{周天}\times\text{度分}}{\text{日度法}}=\text{所求度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.79)$$

(4.79)式可以这样推证：本节 6(2)说度分的含意是：把 1 年划分为周率分，末合发生时差几分不足 1 年。而合余是末合到所求年底的时距，度分＝周率－合余，度分就应是末合到所求年初的时距(参见图 4.7)。因此，求末合所在度就是求度分的长度，只要把它由用周率表示换算成用度表示就可以了。由于 1 周天$=365\frac{145}{589}$度$=\frac{\text{周天}}{\text{纪法}}$，与日数相同，设末合所在度为 x，有如下比例式：

周率：周天度＝度分：x

$$x=\frac{\text{周天度}\times\text{度分}}{\text{周率}}=\frac{\text{周天}\times\text{度分}}{\text{纪法}\times\text{周率}}=\frac{\text{周天}\times\text{度分}}{\text{日度法}}$$

这就是《律历志》所给公式。

(6)求后合所在月。

是预测星末合以后，下次再合当在几月？显然，最简便的计算法是在本节 6(3)中算得的末合所在月的基础上，加上表 4.6 中所给每合月数(合月数和月余)即得。

$$\frac{\text{中余}+\text{合月数}+\dfrac{\text{积月余}+\text{月余}}{\text{合月法}}}{\text{岁中}}=D+\frac{\text{后合月}}{\text{岁中}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.80)$$

式中“中余”为末合入月数，见(4.76)式。合月数是星每合所历月数，见一节 3(1)。积月余是所求年以前到上元之间的积月畸零数，见(4.73)式。月余为每合月数的畸零部分，处与合月数同。D 是自然数或零，且使：后合月＜岁中。当 $D=0$ 时，再合与末合在同一年中；$D=1$，在下年；$D=2$，在下下年，余类推。

还有一点须考虑的是，末合与再合之间是否有闰月。如果有，用(4.80)式中的后合月确定月序数时应减去1月，否则不减。判定有无闰月的方法可采用(4.75)式，在该式的“入纪月”中加上再合月数后，所得闰数比不加时多1，则有闰。

对金、水二星，末合是晨合，再合必是夕合；末合是夕合，则再合为晨合。理由已在本节6(2)之中说明。

《律历志》叙述(4.80)式时说：“以月数加月数；以月余加月余，满合月法得一月。不满岁中，即合其年。”其中二个“月数”、二个“月余”的含意已在(4.80)式后说明，不赘述。而“满合月法得一月”是对“月余”而言；“不满岁中”是对“月数”和“月余”的全体而言，中华书局标点本在以上引文各句后一概用逗号，就把相互关系搞混了。

(7)推后合所在月朔日名。

与四分历推法相同〔参见第三章二节4(7)以及图3.6〕，后合点以前的积月数求法，可以这样理解，它包括末合以前的积月数和月余〔在本章本节6(3)中已经求出〕，从末合到后合之间的月数和月余(即每合月数和月余，为已知参数，列入表4.6中)。若末合所在月朔是已知的，末合以前的积月数可以不必计入，只计三项：

$$\text{末合前月余}+\text{每合月数}+\text{每合月余}=\text{后合前积月}+\text{后合前月余} \quad \cdots\cdots (4.81)$$

若(4.81)式左端1、3两项相加不足1月，后合前积月等于每合月数，其大小余也相等。自末合所在月朔起算，于后合前积月大余数算外日名就是后合月朔日名。若1、3两项相加大于1个月，后合前积月比每合月数多1个月，在每合月数大余上加29，小余加773分，才是后合前积月大小余。每合月数大小余就是“合月大小余”。这是自末合朔起算，若自纪首起算，还须加上末合朔大小余。

《律历志》叙述说：“以朔大小余加合月大小余。”“朔大小余”就是末合朔大、小余，“合月大小余”就是每合积月大、小余，如前述，得再合大、小余：

$$\text{朔大、小余}+\text{合月大、小余}=(\text{朔大余}+\text{合月大余})+\frac{\text{朔小余}+\text{合月小余}}{\text{日法}}$$

$$=\text{后合朔大余}\frac{\text{小余}}{\text{日法}}$$

《律历志》又说："上成月者，又加大余二十九，小余七百七十三。小余满日法从大余，命如前。"所谓"上成月者"，如在四分历、乾象历中指出的，是指末合的入月日数与每合入月日及日余相加所得的和超过 1 月日之数 $29\frac{773}{1457}$ 日，在"每合月数"上加大余 29，小余 773。小余满 1 日入大余。倘若，自末合所在月的朔日甲子起算，还要再加末合大、小余。大余算外，就是所求后合所在月的朔日日名。总之，可以用下面二式概括：

$$\left.\begin{aligned}&\text{若每合入月及余}+\text{末合入月及余}<1\text{ 个月的日数，}\\&(\text{末合朔大余}+\text{每合朔大余})+\frac{\text{末合朔小余}+\text{每合朔小余}}{\text{日法}}\\&=\text{后合朔大余}\frac{\text{小余}}{\text{日法}}\\&\text{若每合入月及余}+\text{末合入月及余}\geqslant 1\text{ 个月的日数，上式右端，}\\&\text{后合朔大余}+29+\frac{\text{小余}+773}{\text{日法}}=\text{后合大余}\frac{\text{日余}}{\text{日法}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots \quad (4.82)$$

若其中小余＋773＞日法，化为整日大余，从后合大余中除去 60 的整数倍，所余不足 60 日的部分为真大余，数从所入纪首起算，算外为后合朔日名。

(8)求后合入月日术。

本节 6(6)是求后合入于某月，这里是进一步推算后合入于某月第几日。参见第三章二节 4(8)及图 3.7。求后合入月日也应该与四分历中的(3.69)式相同：

$$\text{后合入月日及余}=\text{末合入月日及日余}+\text{每合入月日及日余}\cdots\cdots \quad (4.83)$$

按《律历志》的说法是"以入月日、日余，加合入月日及余，余满日度法得 1 日"。这里"合入月日及余"是表 4.6 中列出的参数，与(4.83)式中"每合入月日及日余"相同；而"入月日、日余"则是(4.83)式中的"末合入月日及日余"，是(4.78)〔或(4.77)〕式的计算结果，包括两项数据之和：末合以前积月余化为日后得到的日和日余，积月化日后得的不满 1 日的

部分：朔小余〔同样，在参数“合入月日及余”中也包括月余化日及朔小余两部分，参见本章一节3(1)中的“入月日数”式〕。把(4.76)式及一节3(1)中“入月日数”式代入(4.81)式，得(4.82)式为更完整的表达式：

$$\text{后合入月日及余}=\frac{\text{积月余}\times\text{通法}}{\text{日度法}\times\text{会数}}+\frac{\text{积日朔小余}}{\text{日法}}+\frac{\text{月余}\times\text{通法}}{\text{合月法}\times\text{日法}}+\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

$$=\text{末合入月日}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}\times\text{会数}}+\text{每合入月日}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

$$=(\text{末合入月日}+\text{每合入月日})\frac{\text{末合日余}+\text{每合日余}\times\text{会数}}{\text{日度法}\times\text{会数}}\quad\cdots\cdots\text{③}$$

$$=\text{入日总}\frac{\text{后合日余}}{\text{合月法}\times\text{日法}}\quad\cdots\cdots\text{④}$$

（当入日总>1个月日数时）

$$=(\text{入日总}-1\text{个月日数})\frac{\text{后合日余}}{\text{合月法}\times\text{日法}}$$

$$=\text{后合入月日数}\frac{\text{后合日余}}{\text{日法}}\quad\cdots\cdots(4.84)$$

如图4.8，AB为末合入月日，BC为日余；EF为后合入月日，FG为日余。CF为每合月数(木星为13)。在E左方取$DE=AC$，则$DG=AC+EG$，就是所求的“后合入月日及余”。由于$AD=CE$，CE为整月，AD也是整月，D为月朔点。

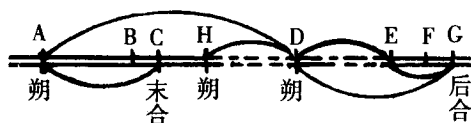



图4.8 后合入月日数图

为了叙述方便，把(4.84)式的中间运算步骤分别编号①、②、③、④，若第③步中的末合日余+每合日余×会数≥日度法×会数，从不等式左端中减去右端，化为1日，加入“末合入月日+每合入月日”中，为“入日总”。

《律历志》把C点称为前合。在图4.8中，设A后的第一个合朔点

为 H，若 A 处朔小余(即"前合朔小余")满虚分(对于木星，等于 150)，AH 间设大月(30 日)。不满虚分则设小月(29 日)。即是说，在 AD 之间所设的合月数之中，在前一种情形下，大、小月相间，先大后小；后一种情况则先小后大。前一种情形时的 AD 比后一种情形多 1 日，DG 则少 1 日。所以，《律历志》说"其前合朔小余满其虚分者，减一日"。

在(4.84)式中，从"入日总"中减去的"1 个月日数"是大月或者小月，则从①式中的"后合日余"来判定。《律历志》说："后小余(即后合日余)满七百七十三以上者，去二十九日；不满，去三十日。"可以这样理解：由于后合入月数(DG)超过了一个月，设 $DG=x\frac{y}{\text{日法}}+29\frac{773}{\text{日法}}=(x+29)\frac{y+773}{\text{日法}}$，若从入日总中减去的是大月(30 日)，须满足：$y+773>\text{日法}$。

那么，$DG=(x+29+1)\frac{y+773-\text{日法}}{\text{日法}}$。显然，后合日余$=y+773-\text{日法}=y-684$。由于 $y<\text{日法}(1457)$，后合日余$<1457-684=773$，即后合日余必小于 773。若从入日总中减去的是小月(29 日)，则：$y+773<\text{日法}$。而，后合日余$=y+773$。由于 $y>0$，后合日余>773。

以上证明了：若入日总所减是 30 日，后合日余必小于 773 分；所减是 29 日，后合日余必大于 773 分。反之也成立：后合日余小余 773 分，从入日总中去 30 日；大于 773 分，去 30 日。此正是《律历志》的结论。

《律历志》此段文字末句"其余则后合，入月日也"，中间逗号衍。

(9)求后合所在天度。

《律历志》所给公式是："以度加度，度余加度余，满日度法得一度。"

所谓"以度加度，度余加度余"，前一个"度"和"度余"是指本节 6(5)"推星合所在度"法中算得的末合所在天度和度余〔参见(4.79)式〕。后一个"度"和"度余"则是表 4.6 列出的参数"度数"和"度余"，后者是每合星所行天度和度余，与末合时的天度、度余相加，当然得星再合时的天度和度余。由于末合度余与每合度余的分母都是日度法，所以说，度余相加"满日度法得一度"。

(10)五星历步术。

推求五星逐日运行天度的方法。先列出五星运行的基本数据，见表4.7。

表 4.7　五星伏见表

		伏行日	伏行度	见行日	见行度	逆行度	定行度
木星		32 日 3484646 分	5 度 2509956 分	366 日	40 度	12 度	28 度
火星		143 日 973013 分	110 度 478998 分	636 日	320 度	17 度	303 度
土星		33 日 166272 分	3 度 1733148 分	345 日	15 度	6 度	9 度
金星	晨	东 82 日 113908 分	100 度 113908 分	(西)246 日	(252 度)	6 度	246 度
	夕	10 日	－8 度(退)	(东)246 日	(252 度)	6 度	246 度
水星	晨	33 日 6012505 分	65 度 6012505 分	(西)32 日	(33 度)	1 度	32 度
	夕	18 日	－14 度(退)	(东)32 日	(33 度)	1 度	32 度

又附有五星运行明细：

①木(岁)星。

晨与日合而伏					日行	星行	日星积距
	顺		16日1742323分	行度2度3234607分	16度余	2度余	13度余
晨见东方	顺疾	$\frac{11}{58}$度/日	58日	行度11度	58度	11度	60度余
	顺迟	$\frac{9}{58}$度/日	58日	行度9度	58度	9度	109度余
	留		25日		25度		134度余
	逆	$\frac{1}{7}$度/日	84日	行度－12度	84度	－12度	230度余
	留		25日		25度		255度余
	顺	$\frac{9}{58}$度/日	58日	行度9度	58度	9度	304度余
	顺疾	$\frac{11}{58}$度/日	58日	行度11度	58度	11度	351度余
			16日1742323分	行度2度3234607分	16度余	2度余	0度
+)			398日3484646分	行度33度2509956分①			

由右边“日星积距”栏可见，木星自晨合16日余，日星相距13度余，星始见，日居星前(东)。此后，日星距逐渐增加，183日后，日星距达二象限，日、星如衡。此后，星居日前，星夕见，直到日追及星，二者再合。

① 《律历志》载行度43度2509956分，误。由以上数据相加应是33度2509956分。

②火（荧惑）星。

└→东

		日行	星行	日星积距	☼日 ○星
晨与日合而伏					
	顺 71 日 1489868 分　行度 55 度 1242860.5 分	71 度	55 度	16 度余	○—☼
晨见东方	顺 $\frac{14}{23}$度/日 行 184 日 行度 112 度	184 度	112 度	88 度余	
	顺迟 $\frac{12}{23}$度/日 行 92 日 行度 48 度	92 度	48 度	132 度余	
	留 11 日	11 度		143 度余	
	逆 $\frac{17}{62}$度/日 行 62 日 行度 −17 度	62 度	−17 度	222 度余	☼—○
	留 11 日	11 度		233 度余	
	顺 $\frac{12}{23}$度/日 行 92 日 行度 48 度	92 度	48 度	277 度余	
	顺疾 $\frac{14}{23}$度/日 行 184 日 行度 112 度	184 度	112 度	349 度余	
在日前，夕伏	行 71 日 1489868 行度 55 度 1242860.5 分	71 度余	55 度余	0 度	○ ☼
+）	历时 779 日 973013 分 行度 414 度 478998 分				

由右边“日星积距”栏数据可知，火星自晨合71日余，日在星前，相距达16度多，星晨始见。此后，日星距逐渐增加，历319日后，日星如衡。再往后，星反居日前，日渐追及星。

③土（填）星。

↑→东

				日行	星行	日星积距	
晨与日合而伏							☼日 ○星 合
	顺16日1122426.5分		行度1度1905864.5分①	16度余	1度余	14度余	○—☼
晨见东方	顺 $\frac{3}{35}$度/日	行87.5日	行度7.5度	87.5度	7.5度	94度余	
	留	34日		34度		128度余	
	逆 $\frac{1}{17}$度/日	行102日	行度−6度	102度	−6度	236度余	
							☼—○
	留	34日		34度		270度余	
	顺 $\frac{3}{35}$度/日	行87日②	行度7.5度	87度(5)	7.5度	350度余	
星在日前	16日1122426.5分		行度1度1905864.5分	16度余	1度余	0度	○ ☼
+)	378日166272分		行度12度1733148分				

由右边“日星积距”栏知，土星自晨合，历16日余，日超星前14度余，星晨始见。此后，日星距渐远，自星始见历172.5日，日星如衡。相距二象限。再往后日反在星后，渐追及星。

① 原文1995864.5分，据李锐校改。

② 原文87日，据李锐校改。

④金(太白)星。

└→东

晨与日合而伏				日行	星行	日星积距	☼日 ○星 合
	逆	行 5 日	行度 −4 度	5 度余	−4 度	9 度	○—☼
晨见东方	逆 $\frac{3}{5}$度/日	行 10 日	行度 −6 度	10 度	−6 度	25 度	
	留	8 日		8 度		33 度	
	顺 $\frac{33}{46}$度/日	行 46 日	行度 33 度	46 度	33 度	46 度	
	$1\frac{15}{91}$度/日	行 91 日	行度 106 度	91 度	106 度	31 度	
	$1\frac{22}{91}$度/日	行 91 日	行度 113 度	91 度	113 度	9 度	
晨伏东方	顺	行 41 日 56954 分	行度 50 度 56954 分	41 度余	50 度余	0 度	☼ ○
+)		292 日 56954 分	行度 292 度 56954 分				

			日行	星行	日星积距 ○星 ☼日
夕与日合而伏					
	顺 41 日 56954 分	行度 50 度 56954 分[①]	41 度余	50 度余	9 度 ☼—○
夕见西方	顺 $1\frac{22}{91}$度/日 行 91 日	行度 113 度	91 度	113 度	31 度
	$1\frac{15}{91}$度/日 行 91 日	行度 106 度	91 度	106 度	46 度
	$\frac{33}{46}$度/日 行 46 日	行度 33 度	46 度	33 度	33 度
	留 8 日		8 度		25 度
	逆 $\frac{3}{5}$度/日 行 10 日	行度 −6 度	10 度	−6 度	9 度
夕伏西方	逆 $\left(\frac{4}{5}度/日\right)$ 行 5 日	行度 −4 度	5 度	−4 度	0 度余
+)	行 584 日 113908 分	行度 584 度 113908 分			

由以上"日星积距"栏可知，金星自晨合 5 日后，日在星前 9 度，星始见。此后日星距渐增，但最远不过 46 度，此时距星始见 64 日。过此日星距减小，182 日后星伏东方，又 41 日日星合。合后 41 日星始见西方，星在日前 9 度。后日星距增，至 46 度而复减，减至 9 度而伏于西方，5 日后日星复合。日星相距始终不超过 46 度。

① 原文 59954 分，误。

⑤水(辰)星。

↑→东

晨与日合而伏			日行	星行	日星积距	☼日 ○星 合
	逆　行 9 日	行度−7 度	9 度	−7 度	16 度	○—☼
晨见东方	逆　行 1 日	行度−1 度	1 度	−1 度	18 度	
	留　2 日		2 度		20 度	
	顺 $\frac{8}{9}$度/日 行 9 日	行度 8 度	9 度	8 度	21 度	
	$1\frac{1}{4}$度/日 行 20 日	行度 25 度	20 度	25 度	16 度	
晨伏东方	顺　16 日 6410967 分	行度 32 度 6410967 分	16 度余	32 度余	0 度	☼ / ○
+)	57 日 6410967 分	行度 57 度 6410967 分				

夕与日合而伏						
	顺 16 日 6410967 分	行度 32 度 6410961 分	16 度余	32 度余	16 度	☼—○
夕见西方	顺疾 $1\frac{1}{4}$度/日 行 20 日	行度 25 度	20 度	25 度	21 度	
	顺迟 $\frac{8}{9}$度/日 行 9 日	行度 8 度	9 度	8 度	20 度	
	留　2 日		2 度		18 度	
	逆　行 1 日	行度−1 度	1 度	−1 度	16 度	
夕伏西方	逆　行 9 日	行度−7 度	9 度	−7 度	0 度	○ / ☼
+)	57 日 6410967 分	行度 57 度 6410967 分				
+) 再合	115 日 6012505 分	行度 115 度 6012505 分				

由右边“日星积距”栏可见，水星由晨合伏不见，9 日后日行过星 16 度余，星始晨见东方。此后日星距渐增，至 21 度而止，递减为 0 度，而后星超日前 16 度余，星夕见于西方，星日距差渐增至 21 度又止，递减为 0。一合 57 日余，再合 115 日余，日星更迭超前，最大不过 21 度。即水星不离日前后 21 度。

⑥按以上表 4.7 和“五星运行明细”(以下简称“明细”)寻求计算五

星在任一时刻的所在度分公式，四分历分三步计算，乾象历分二步：

第一步，由星合求星见日及度：本节 6(5)已求出星合时日度及分，表 4.7 和“明细”中又给出了自星合而伏到星始见所历日分及行度，那么：

$$星见日及度=星合日(度)、余+伏日(度)、余 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.85)$$

(4.85)式中的余和度单位制都是 1 度=日度法分。所以，《律历志》说“余满日度法得一”，余分积满日度法化为 1 度。以理而论，(4.85)式右端“度”后脱“余”字。

第二步，由星见求星再合之间任一日分，星所在度分。

$$所求日度分=星见日度余\pm\sum日行分\times日数 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.86)$$

得出星在所求日的度分之后，按四分历给出的二十八宿星度逐一推求星所在宿度，与四分历法完全相同。

问题在于进行(4.86)式计算之前和之中有许多中间步骤；首先是把(4.86)式右端二项的单位划同。(4.85)式所得星见日度每度等于日度法分，(4.86)式中的日行分的分母各不相同，如明细所说，木星顺行母 58，逆行母 7；火星顺行母 23，逆行母 62 等。把分母日度法换算成日行分的分母，《律历志》的公式是“以星行分母乘见度余[①]，如日度法得一。分不尽，半法以上亦得一”。即：

$$\frac{星见度余\times星行分母}{日度法}=以日行分母为母的星见度余 \quad\cdots\cdots\cdots \quad (4.87)$$

所谓“分不尽，半法以上亦得一”，是对(4.87)右端的运算结果中分以下小数实行四舍五入的意思。

其次，(4.86)式中“日数”范围内，若既有顺行，也有逆行，“日行分”的分母也不相同，需要划同。《律历志》的方法是把“故母”化为“当行母”。在前为“故母”，在后为“当行母”。如星见后，星顺行，先按(4.87)式把星见度余化为以顺行母为分母的度分。把顺行度分加入星见度分。此后，星又逆行，则把逆行分母作“故母”，逆行分母作“当行母”，把以“故母”为分母的星见和顺行度分都化为以“当行母”为分母的度分，

---

① 《晋书·律历志》，中华书局 1987 年版把“余”字点人下句，误。

以便与逆行度分相加减。故母化当行母的方法与(4.87)式相类,《律历志》说:"逆顺母不同,以当行之母乘故分,如故母而一,当行分也。"即:

$$当行分=\frac{故分\times当行母}{故母} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.88)$$

故分与当行分分别与故母、当行母对应。在上例中星见分与顺行分之和为故分,化为以逆行分母为分母以后,就是当行分了。

(4.86)式右端加减号的判定法,《律历志》说是:顺行相加,"留者承前,逆则减之,伏不尽度"。"顺行相加",是由前文"日行所行分"补叙;"留者承前"是说星留期间,行度"承前"不变;"逆则减之"逆行度应从星行度中减去;"伏不尽度"是说星虽伏,行度仍在,并不随形隐而尽没。李锐注本以"尽"为"书",说"伏不书度"与乾象历的实际不符,恐是形近而误。

《律历志》又说"经斗除分,以行母为率",把星行度化为所在宿度时,须按四分历提供的二十八宿矩度表逐次递减,减至斗宿时,除了减斗宿的整度之外,还要减零分。乾象历以周天为 $365\frac{145}{589}$度,分入二十八宿,各宿所得皆整度,只有斗宿有零分。不过,零分的分母不一定是589,要换算为行母,以便可与星行度相减。下一句是"分有损益,前后相御",是说加减零分时,一定注意前后是否相同,二者是有制约关系的,从上述(4.88)式可知,所谓"前后相御",其实是"以后御前"。或者说是以当行分御故分。

《律历志》此段文字最后四句是"凡言如盈约满,皆求实之除也;去及除之,取尽之除也"。从"五星历步术"整段文字看,"凡言如盈约满"只讲了"如"和"满",如"如日、度法得一","如故母而一","余满日度法得一","分满其母得一度"。"盈"、"约",以及下句中的"去"及"除之"都没有出现。可知这四句话不是"五星历步术"中的文字,再从《乾象历》全部算法而言,如二节1(1)"推入纪年"中,原文有"以乾法除之","以纪法除之","满法去之";1(2)中有"以六旬去积日"等,是"去"和"除之"的用法;5(5)"推夜半入历"中有"以会数约微分为小分";6(4)"推入月日"中有"并以会数约之"等是"约"字的用法,却无以"盈"作除的事例。说明上述四句既非专对"五星历步术"而言,也不是专对乾象历而言,只是泛论

历书中“如”、“盈”、“约”、“满”四字的用法，与“去”及“除之”不同，虽都是表述除法，前者是“求实之除”，后者则是“取尽之除”。“求实之除”就是求实实在在商数的除法。这里的“实”字与传统数学把被除数叫做“实”的用法不同；“取尽之除”意思是从被除数中除去、除掉除数，而且一直除下去，直到不能再除(被除数小于除数)为止。如前边说的“以六旬去积日”，是说从积日中除去六旬(60 日)，余数大于六旬，再除……直到余数小于六旬为止。这种除法就是所谓取尽之除。这种泛论历书的话，所言超出了乾象历的范围，自然不可能是乾象历中的文字。李锐以为是“旧注膝文”，于义近之。

“五星历步术”这段文字，中华书局 1987 年版《晋书·律历志》标点多有错误或不妥处，较正确的点法是：

“以法：伏日度及余加星合日度余，余满日度法得一。从全命之如前，得星见日及度也。以星行分母乘见度余，如日度法得一。分不尽，半法以上亦得一。而日加所行分，满其母得一度。逆顺母不同，以当行之母乘故分，如故母而一，当行分也。留者承前，逆则减之，伏不尽度。经斗除分，以行母为率。分有损益，前后相御。

凡言‘如’、‘盈’、‘约’、‘满’，皆求实之除也；‘去’及‘除之’，取尽之除也。”

以上文字的位置似应依景初历置于五星运行明细之后为妥。

第五章　乾象历系统的历法之一
——杨伟景初历

杨伟景初历载于《晋书·律历下》，曹魏明帝时尚书郎杨伟制订，施行及于晋和南朝刘宋初年。何承天评论说，汉魏之间，善历者不过三人：邓平制太初历能"修旧制新"；刘洪制乾象历，始减斗分，又定月行迟疾法步月行；杨伟的贡献则是"斟酌两端，以立多少之衷；因朔积分设差，以推合朔月蚀"。大意是说，景初历的贡献有两条：一是刘洪乾象历减斗分太过，曹魏黄初年间，太史丞韩翊制黄初历减斗分太少，景初历能斟酌二者之中，选择一个更合适的斗分数字（按：其实不然）；二是由朔积分差推合朔月食。乾象历虽定月行迟疾法和三道术，推月食仍按传统公式，杨伟首次把刘洪的创造用到推月食之中。

对景初历的短处，何承天认为是推五星法"大乖于后代"，与后世所见五星运行的实践相去太多。究其原因，何承天认为是由于杨伟"拘于同出上元壬辰故也"。景初历虽有长短，就大的方面而言，如以迟疾历算月行进退，阴阳历算交食等，都保留了乾象历的方法，所以，基本可以说景初历是一部乾象系统的历法。

一、运算参数

1. 历始

(1)太极上元年名壬辰，距景初元年(237年)丁巳岁4046年(包括景初元年)。

(2)每元初始，夜半甲子朔旦冬至。即年初冬至点、天正月初(合朔点)以及一日之初(日旦)都在甲子日夜半子时。且以建子之月(以十二辰配十二月所得月名)或谓之黄钟之月(以十二律配十二月的月名。与

建子之月同指壬辰年前的十一月，)为岁正月。

表 5.1　十二月与辰次、律名配合表

十二月	十一	十二	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
十二辰	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
十二律	黄钟	大吕	太蔟	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
月　建	牵牛	虚	营室	奎、娄	胃	毕	东井	张	翼	亢	房	尾

2. 气、朔、闰等参数

(1)景初历每个朔望月天数为 $29\frac{2419}{4559}=\frac{134630}{4559}$日。其中 134630 为通数，4559 为日法。

(2)景初历每个回归平天数为 $365\frac{455}{1843}=\frac{673150}{1843}$日。其中 673150 为周天，1843 为纪法，455 为斗分。

(3)从 1 个回归年天数中除去 6 甲子(360 日)，余 $5\frac{455}{1843}=\frac{9670}{1843}$日，为 1 没。其中 9670 为余数，1 个回归年已含的没数是：$365\frac{455}{1843}\div5\frac{455}{1843}=\frac{67315}{967}$。其中 67315 为没分，967 为没法。

(4)1 个回归年包含的朔望月数是：$365\frac{455}{1843}\div29\frac{2419}{4559}=\frac{235}{19}=12\frac{7}{19}$。那么，19 年包含 235 月。每年 12 个月之外，剩余$\frac{7}{19}$置为闰月，19 年共置 7 个闰月。所以，把设置闰月的最小周期 19 年称为 1 章。1 章有 7 个闰月，7 称为章闰。19 年共 235 个月，235 称为章月。每章年、月齐同。即每过 19 年，年、月又从同一点开始。

不设闰月的年份(平年)有 12 个月，每月置 1 个节气、1 个中气。每年有 12 个节气、12 个中气，共二十四节气。对于中气而言，12 名为岁中；对节气而言，12 名为气法。

(5)1 个回归年天数不是整数，具有整数日的最少年份是 1843 年，

1843 名为纪法。每过 1843 年，年、日齐同。而 1843 年又是 1 章之年(19)的整数倍(1843÷19=97)，每纪的朔望月数(22795)也是整数。所以，1 纪之年，年、月也齐同。即每纪年、月、日三者齐同，三者重新从同一点开始。22795 名为纪月。

但是，1 纪之年所含日数(673150 日)不是 1 甲子(60 日)的公倍数，每过 1 纪之年，日名不能重复出现。为此，求 1 纪日数与 60 的公倍数，得 673150×6=4038900(日)=1843×6(年)=11058 年。11058 称为元法。显然，1 元=6 纪，每隔 1 元，年、月、日、甲子日名重复出现。但 11058 不能被 60 整除，因此，每隔 1 元，甲子年名不能重复出现。

(6)每年月行$\frac{254}{19}$周，每纪月行$\frac{254}{19}\times 1843=254\times 97=24638$ 周。24638 名为月周，是每纪月行天周数。第四章中已经证明：每纪月行周数就是每日月行分数(1 周天=673150 分)。

又日法 4559=97×47，47 称为通法。

(7)交会周期为 $5\frac{116960}{134630}=\frac{790110}{134630}$月。其中 790110 为会通，134630 在乾象历中名为会率。不过，景初历不立会率之名，用通数代之。仍把$\frac{会章}{2}=\frac{通数}{2}=67315$，叫做“朔望合数”。会通与朔望合数的差(790110-67315=722795)叫做“入交限数”。

(8)景初历的交点月数取为 $27\frac{2528}{4559}=\frac{125621}{4559}$。其中 125621 为通周；4559 已如前述，名为日法；2528 为周日日余，日法一周日日余=4559-2528=2031，名为周虚。

3. 差率

(1)一元六纪差率。

分二种：由交会周期与朔望月算得的交会差率，由交点月与朔望月算得的迟疾差率。两种差率的纪差算法以后叙述，先把《律历志》所给差率数值列如下表。

表 5.2　六纪月位、差率表

	甲子纪 第一	甲戌纪 第二	甲申纪 第三	甲午纪 第四	甲辰纪 第五	甲寅纪 第六
纪首合朔 月位	日道里	日道里	日道里	日道里	日道里 （表）	日道里 （表）
交会差率	412919	516529	620139	723749	37249	140859
迟疾差率	103947	73767	43587	13407	108848	78668

表中"甲子纪第一"、"甲戌纪第二"等中的干支名是该纪纪首日名。如前所述，景初历每元初始日名"甲子"，也是该元第一纪纪首日名。每纪日数是 673150 日（回归年日数×纪法），除去 60 甲子的整数倍，余 10 日。自甲子后数 10 日，算外第 11 日甲戌便是第二纪纪首日名。自甲戌后数第 11 日甲申为第三纪纪首日名……如此就得到每纪纪首日名。景初历每元日名一复，年名不复，所以用纪首日名作纪名，不用纪首年名作纪名。

每纪交会差率递增 103610，迟疾差率递减 30180，可以此检验逐栏数据正误。

(2)交会纪差。

含义详见后文。计算式为：

$$交会纪差=纪月\times通数-n\cdot会通 \quad\cdots\cdots (5.1)$$

式中 n 是自然数，且满足 $0\leqslant纪月\times通数-n\cdot会通<会通$。

代入各项数值得：$22795\times134630-790110\cdot n=103610(n=3884)$。

(5.1)式中，通数是 1 个朔望月的日分数，乘以纪月，得每纪朔望月的日分总数；会通是每个交食周期的月分数，乘 n 后得 n 个交食周期的月分数。月分数的分母恰恰等于通数，这样把头一项纪月乘通数的意义理解成每月化为通数分后，每纪月数的总分数（不再理解为日分数），二项就能直接相减了。在每纪月分中，满交食周期的月分数除去之，剩余不足 1 个交食周期的月分数，就是"交会纪差"。概括说来，所谓交会纪差，就是从每纪月分中减去若干交会周期后，剩余的不足 1 周期的部分。或者说是 1 纪所含月分与交周分的差。

每纪有交会差 103610 分，前纪交会差率加此数得后纪，再加得后后纪。《律历志》说，只要所得交会差率未满会通，纪首岁天正月合朔时，月在日道里；满，去之，则月在日道表；又满，又去之，月又回到了日道里……这是由于会通是出入黄道一度的周期（每周期出入一次），上一周在里，下一周必在表，下下周又入黄道里，是势之必然。初未满会通月在黄道里而不在表，只是由于上元入纪时如此，以后便不得不如此，并无其他道理可言。由此检查表 5.1 中的月位，知第五、六纪应在“日道表”，原文“日道里”，误。

(3)迟疾纪差。

含义详见后文，计算公式为：

$$\text{迟疾纪差}=\text{通周}-(\text{纪月}\times\text{通数}-n\cdot\text{通周}) \quad (5.2)$$

式中 n 为自然数，且满足：$0\leqslant\text{纪月}\times\text{通数}-n\cdot\text{通周}<\text{通周}$。

代入各项数值得：

迟疾纪差 $=125621-(22795\times134630-n\cdot125621)$

$=125621-(3068890850-n\cdot125621)$

命 $n=24429$，$=125621-95441$

$=30180$

(5.2)式括号中的数据表示的是每纪朔望月与交点月的日分差，是朔望月多于交点月的部分。用通周减此数，表示每纪朔望月比交点月多出的日分，还差多少就能积成 1 分交点月的日分。(5.2)既表示每纪差数 A，设前纪以前的差数是通周$-B$，即差 B 不够 1 个通周。那么，1 纪之后，所差增 A，为 $B+A$，即与通周之差变为通周$-(B+A)=$(通周$-B)-A$；又过 1 纪，得(通周$-B-A)-A$……《律历志》说是“以之〔按：指(5.2)式算得的迟疾纪差 A〕转减前纪，则得后纪”。若不足减，即前纪所余不足 A，可以加通周后再减。即《律历志》所谓“不足减者，加通周”。这样做的依据可这样理解，根据迟疾差的定义，前纪以前的迟疾差 M 可变通(5.2)式求得：

$$M=\text{通周}-(\text{前纪以前积月}\times\text{通数}-n\cdot\text{通周}) \quad (5.3)$$

由于 $M<A$，求下纪差时，可将上式 n 增 1：

迟疾差 $M'=$通周$-$〔前纪以前积月$\times$通数$-(n+1)\cdot$通周〕

$$= 通周 - (前纪以前积月 \times 通数 - n \cdot 通周) + 通周$$
$$= M + 通周$$

(5.3)式中的 n，本是一个待定的自然数，取 n 或 $n+1$ 皆无不可，完全视题设要求决定。在(5.2)式中，朔望月与通周的积差不应该是负数，也不应大于通周，因此规定 $0 \leqslant 纪月 \times 通数 - n \cdot 通周 < 通周$。如今由前纪求下纪，为了使得数不是负数，取 n 值比原数增 1，是正当的。

同样，求次元各纪的迟疾差率，比如先求次元首纪：甲子纪的差率，可由前元末纪，甲寅纪差率减去迟疾纪差(30180)得到；求第二纪：甲戌纪差率，再减 30180；如此进行下去，得各纪差率。

(5.1)和(5.2)式解释了表 5.2 中由前栏数据求次栏数据的方法，第一栏(甲子纪)数据是怎样得到的呢？

先看甲子纪交会差率的求法，就像(5.3)式一样，按交会差的意义把(5.1)式变化为求任何时期交会差的公式：

$$交会差 = 积月 \times 通数 - n \cdot 会通 \quad \cdots\cdots (5.4)$$

代入第一栏数值，求积月：

$$积月 = \frac{412919 + n \cdot 790110}{134630}$$

可以看出，$n = 0, 1, 2, 3 \cdots\cdots$ 中任何值，积月都不是整数，表明入算之始到甲子纪首之间的积月不是整数。按照历理，入算之始(入元或入纪)到甲子纪首之间的积月必是整数。因而，只有一种解释：入算之始交会差不是零。不可能是由计算得来，必是出自实测。即交会差率的第一栏数据 412919 是由实测得到的。

同样把表 5.2 第一栏中的迟疾差率(103947)代入(5.3)式，求“前纪(甲子纪)以前积月”，也可判定第一栏的迟疾差率是实测值，不是计算值。

(4)求次元纪差率。

《律历志》所给公式是：“转减前元甲寅纪差率，余则次元甲子纪差率也。求次纪，如上法也。”

“转减”二字最妙，意思是按表 5.2 列出的数据递变规律，转相减损，得到次元差率。如交会差率的递变规律是一元六纪之中，自后而前，

每纪减纪差103610，得前纪：第二纪甲戌纪减103610得第一甲子纪；第三甲申纪减103610得第二甲戌纪……如此下去，第六纪甲寅纪之后是次元第一甲子纪，照例该是：

次元第一甲子纪－103610＝前元第六甲寅纪

或者　次元第一甲子纪－前元第六甲寅纪＝103610 ……………… (5.5)

对于迟疾差率则是：

前元第六甲寅纪－30180＝次元第一甲子 …………………… (5.6)

(5.5)、(5.6)两式都是《律历志》说的“转减前元甲寅纪差率”。既得甲子纪，余按表5.2法依次可求。

二、推算法

1. 推气朔

(1)推所求年天正月朔以前的积月数。

第一步，求入纪年：

$$\text{壬辰元以来列所求年之间年数(不包括所求年)} \div \text{纪法} = M\,\frac{N}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots (5.7)$$

其中M、N都是自然数，且$N<$纪法。由M知所入纪(如$M=1$，入第二纪等)，N为入纪年。

第二步，求积月：

$$\text{积月数} = \text{入纪年} \times \text{每年月数} = \frac{\text{入纪年} \times \text{章月}}{\text{章岁}} = P\,\frac{Q}{\text{章岁}} \quad \cdots\cdots (5.8)$$

其中P、Q都是自然数，且$Q<$章岁。P为积月，Q为闰余。与前述三统历、四分历等历法一样，当$Q\geqslant 12$时所求年有闰月，闰月位置最终由有无中气判定，无中气者置为闰月。

(2)推所求年天正月朔日名。

先由积月求积日：

$$\text{积月数} \times \text{每月日数} = \frac{\text{积月数} \times \text{通数}}{\text{日法}} = \frac{\text{朔积分}}{\text{日法}} = \text{积日}\,\frac{\text{小余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (5.9)$$

其中积日是整数，小余＜日法。

再从积日中除去甲子周60的若干倍：

$$积日-60\cdot n=大余 \quad\cdots\cdots (5.10)$$

其中 n 为自然数，大余<60。

最后由所入纪首日名和大余数，查甲子表，大余数外为所求年天正月朔日名。

(3)求次月朔日名。

算出次月朔前大、小余，次月朔日名便可由甲子表查出，由于景初历每月 $29\frac{2419}{4559}$ 日：

$$次月大余=头月大余+29 \quad\cdots\cdots (5.11)$$

$$次月小余=头月小余+2419 \quad\cdots\cdots (5.12)$$

(5.12)式得数满日法 4559，则化为 1 整日，入大余。由于每月小余 2419 分，差 2140 分不足 1 日，次月朔前小余满 2140 分以上，次月是大月，否则是小月。

(4)已知朔日大、小余，推弦、望日名。

四分之一朔策得：$29\frac{2419}{4559}\div 4=7\frac{1744\frac{1}{2}}{4559}$ 日。朔前大小余加四分之一朔策得上弦，再加得望。望加四分之一朔策得下弦，再加得下月朔。

$$朔前大余+7=上弦大余 \quad\cdots\cdots (5.13)$$

$$朔前小余+1744\frac{1}{2}=小余 \quad\cdots\cdots (5.14)$$

小余满日法化为 1 整日入大余，大余满 1 甲子 60 日则除去之，剩余不满 60 日的部分为上弦大余，算外得上弦日名。

同样，得望、下弦和后月朔。

由大余得日，由小余可算出弦、望时刻。乾象历以前的算法都是把弦、望所近节气的夜漏数与由小余算得的刻数相比较，不足夜漏之半者入头日，大于夜漏之半者入来日。这种算法的毛病是“所近节气”不是个确定概念，而且在两节气之间时，与前节气夜漏相比还是与后节气夜漏相比，取决于计算者一念之间，误差太大。景初历做了改进，把四分历表列的二十四节气夜漏刻数之半换算为日分数，取名为限数，换算法：$限数=\frac{夜漏刻数}{2}\times 日分数/刻=\frac{夜漏刻数\times 日法}{200}$。又把前后两节气限

数的平均数作为前一个节气的间限数。并规定所求弦、望在某节气前后 4 日之内者，与该节气的限数相比较；在 5 日之上者与间限相比较。如右图 5.1，在前一个节气 A 前后各 4 日之内，与前节气的限数相比较；在后一个节气 B 前后各 4 日之内，与 B 的限数相比较；在前后节气各 4 日之外的 DE 范围之内，则用 A、B 两节气的限数的平均数，即用节气 A 的间限数。显然，限数的采用，免除了部分运算的烦琐；间限的采用，减小了运算的误差量[1]。

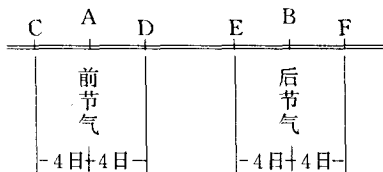



图 5.1　限数、间限图

此外，景初历还加了一条限制：所求弦望必须是真弦望。否则，由弦、望小余算得的时刻数没有多大意义。乾象历以前只说算时刻要用弦、望的“定小余”，不易引人注意。景初历除了用“定小余”入算，还指出是对“其月蚀望者”而言，月蚀于望，所得弦、望便可当做真弦望。其他情形下只推平弦、望，不计算小余时刻。

《律历志》中反映以上内容的文字有错误，重新标点如下：

“其月食望者，定小余如在(中节者，定小余如)所近中、节间限数、限数以下者，算上为日：望在中、节前后各四日以近者，视限数；望在中、节前后各五日以上者，视间限。”

括号内的文字是衍文。

(5)推二十四气日名。

先由(5.7)式算得的入纪年 N 求积日：

$$\text{入纪年}\times 1\text{ 个回归年除去 6 甲子后的余日}$$

$$=\frac{(\text{入纪年}-1)\times\text{余数}}{\text{纪法}}=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{纪法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (5.15)$$

其中大余为整数，小余<纪法。

大余若大于 1 甲子 60 日，则除去之：

$$\text{大余}-60\cdot n=P \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (5.16)$$

---

① 限数、间限数见《晋书・律历志》，中华书局 1987 年版，第 541～543 页。

其中 $n=0、1、2\cdots\cdots，P<60$。查甲子表，自纪首日名后数，第 $P+1$ 号甲子名就是所求年天正月冬至日名。

由于景初历每气 $365\dfrac{455}{1843}\div24=15\dfrac{402\frac{11}{12}}{1843}$日。由冬至大、小余求其余各气大、小余时，只要在冬至大小余之上依次加大余 15，小余 $402\dfrac{11}{12}$即得。《律历志》称 402 为小余，11 为小分，12 为气法。小分满气法入小余，小余满纪法（1843）入大余，大余算外为下一个节气日名。

2. 杂推

（1）推闰月法。

$$闰月序数=\frac{(章岁-闰余)\times岁中}{章闰}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5.17)$$

四分历、乾象历都是如此。有两点须再三说明，一是按（5.17）式算出的闰月序数是自天正月数起，即自头年冬至所在的十一月数起。如（5.17）式算得的序数是 7，那么，自十一月起算，十一至五共七个月，闰月为五月，不是七月。二是（5.17）式计算结果取四舍五入法，就是《律历志》说的“余满半法以上，亦得一月”。因为每月含闰分$\dfrac{7}{12}$，若得半法，即得 0.5 个闰月，加上$\dfrac{7}{12}$大于 1，必闰。但闰在上月还是下月，要由中气所在位置酌定，以无中气者为闰月。就是《律历志》说的“闰有进退，以无中气御之”。

（2）二十四气限数、间限数表。

乾象历有“推漏刻”法，把小余（天度分）化为漏刻数，然后查二十四节气漏刻表，由大余定出加时在某节气附近，再由该节气的昼夜漏刻数和小余化成的漏刻数相比较，定出加时在该日（大余算外）昼夜漏几刻几点。这种算法有两个缺点：一是由小余化漏刻，计算烦琐，二是由大余定在某节气“附近”，误差太大。为此，景初历制定了二十四气限数、间限数表，把漏刻数化为天度分，并规定在某节气前后 4 日之内者，昼夜漏刻数与该节气同，4 日之外与前后两节气的平均数同。某节气前后 4 日之内的夜漏之半化成的天度分数叫做该节气的限数，前后相邻的两个

节气夜漏平均数之半化成的天度分数作为前节气的间限数，即：

$$限数=\frac{夜漏数}{2}\times\frac{日法}{100}=\frac{夜漏数\times日法}{200} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.18)$$

$$前间限=\frac{前限数+后限数}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.19)$$

那么，由四分历中的“二十四气漏刻表”可得二十四气限数、间限表。

表 5.3 二十四气限数、间限数表

节气	限数	间限数	节气	限数	间限数
大雪	1242	1248	芒种	800	799
冬至	1254	1245	夏至	798	801
小寒	1235	1224	小暑	805	815
大寒	1213	1192	大暑	825	842
立春	1172	1147	立秋	859	883
雨水	1122	1093	处暑	907	935
惊蛰	1065	1036	白露	962	992
春分	1008	979	秋分	1021	1051
清明	951	925	寒露	1080	1107
谷雨	900	879	霜降	1133	1157
立夏	851	840	立冬	1181	1198
小满	823	812	小雪	1215	1229

把算得的大小余数与表中数据比较，可直接得知加时度分若干。

(3)推没灭术。

第三章中说过，1 个回归年天数除去 6 甲子 360 日后，剩余的部分为 1 年没数。对于景初历，$365\frac{455}{1843}-360=5\frac{455}{1843}$，$5\frac{455}{1843}$为没数，表示每年有 $5\frac{455}{1843}$没。那么，每没的日数是：$365\frac{455}{1843}\div5\frac{455}{1843}=\frac{67315}{967}=69\frac{592}{967}$日。每过 $69\frac{592}{967}$日为 1 没，其中 67315 为没分，967 为没法。所谓“推没灭”，就是推算每没始点所在日的日名。传统的方法是，先计算所求年天正月以前共有多少没，方法很简单，每年有 $5\frac{455}{1843}$没，用入纪年

（所求年不包括在内）乘此数即得。乾象历给出的公式是：$\frac{(\text{入纪年}-1)\times\text{余数}}{\text{纪法}}=\text{积没}\frac{\text{没余}}{\text{纪法}}$〔见第四章(4.6)式〕。景初历的计算公式与此完全相同。不过此式的左端与计算冬至日名的公式完全相同〔参见(5.15)式〕，所得结果不称积没、没余，称为冬至积日大余、小余。景初历不另立公式，直接采用求冬至积日的公式和称谓，也把积没、没余叫做冬至积日大余，冬至积日小余。

推没灭术的第二步是由没余推算再过多少日积够1没，这1天就是所求年天正月朔以后第1没的没日。这也很容易算：

$$\frac{\text{纪法}-\text{没余}}{\text{纪法}}\times\frac{\text{没分}}{\text{没法}}=\text{日数}\frac{\text{日余}}{\text{纪法}\times\text{没法}}=\text{日数}\frac{\text{日余}/\text{纪法}}{\text{没法}}$$

$$=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{没法}}$$

左边第一个因子$\frac{\text{纪法}-\text{没余}}{\text{纪法}}$表示差多少分不够1没，第二个因子是每没日数。二者相乘表示差多少日不够1没。也就是入所求年天正月后再过几日为没日。

求得第一没所在，以后各没的求法是，每加$69\frac{592}{967}$日得1没。

这样，得景初历求没灭术三式：

第一式是利用(5.15)推冬至积日的公式求积没：

$$\frac{(\text{入纪年}-1)\times\text{余数}}{\text{纪法}}=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{纪法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (5.20)$$

由于其中的$\frac{\text{余数}}{\text{纪法}}$也是每年没数，所得大余也是所求年冬至前的积没数。

第二式是求冬至后1没的大、小余：

$$(\text{大余}+1)\times\frac{\text{没分}}{\text{没法}}=\text{后没大余}\frac{\text{小余}}{\text{没法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (5.21)$$

《律历志》把“大余＋1”叫做“积日有小余者加积一”。“积日”就是(5.20)式中的大余，显然，若无小余，大余不须加1，冬至日就是所求灭日。(5.21)中，后没大余满60日(1甲子)除去之，剩余的部分，由所入纪首日起算(“命以纪”)，算外日名就是冬至后的第一个没日。

第三式是求次没，由(5.21)式的计算结果加每没日数：

$$后没大余\frac{小余}{没法}+69\frac{592}{967}日=(大余+69)\frac{小余+592}{没法} \cdots\cdots\cdots\cdots (5.22)$$

(5.22)式右端就是《律历志》说的“加大余六十九，小余五百九十二，小余满没法得一，从大余”，而后“命如前”。“命如前”的意思有二层：一是像前面求初没那样，大余满60则除去之；二是由剩余的不足60的部分，按甲子表查出次没日名。

小余为零的没日，叫做“灭日”。

(4)推五行用事日。

景初历五行各得 $365\frac{455}{1843}\div 5=73\frac{91}{1843}$ 日，而每季实有 $365\frac{455}{1843}\div 4=91\frac{574\frac{1}{2}}{1843}$ 日，若以五行中的木、火、金、水分王四季，每季倘余 $91\frac{574\frac{1}{2}}{1843}-73\frac{91}{1843}=18\frac{483\frac{1}{2}}{1843}$ 日，算做土王日。合四季土王日：$18\frac{483\frac{1}{2}}{1843}\times 4=73\frac{91}{1843}$ 日，其余四行相同。因此，景初历“五行用事日”的分配法是：立春、立夏、立秋、立冬四季之首，分别为木、火、金、水四行“始用事日”，以每季日数($91\frac{574\frac{1}{2}}{1843}$日)中，“各减其大余十八，小余四百八十三，小分六”。小分的分母是气法12，小余的分母是纪法(1843)，所以，从每季减去的数目其实是 $18\frac{483\frac{1}{2}}{1843}$ 日，减后余日(四立之后各 $73\frac{91}{1843}$ 日)为四行用事日，所减之日(四立之前各 $18\frac{483\frac{1}{2}}{1843}$ 日)为土行用事日。

(5)推卦用事日。

与乾象历一样，把这段原文增二“始”字，以与僧一行、李锐等的解释相符合：

“因冬至大余，六其小余，即坎卦(始)用事日也。加小余万九十一，

满元法从大余。即中孚(始)用事日也。""求次卦，各加大余六，小余九百六十七。其四正各因其中日，六其小余。"

如此，坎、震、离、兑四卦分别自冬至、春分、夏至、秋分始各得$\frac{10091}{11058}$日；晋、井、大畜、颐四卦(各在以上二至、二分日前)各得$5\frac{1934}{11058}$日，其合中孚以下五十六卦皆得$6\frac{967}{11058}$日。

其中$\frac{10091}{11058}+5\frac{1934}{11058}=6\frac{967}{11058}$日，坎、震等四正卦与晋、井等四卦合得4个$6\frac{967}{11058}$日。再与其余五十六卦所得合为60个$6\frac{967}{11058}$日，总计：

$6\frac{967}{11058}\times 60=365\frac{2730}{11058}=365\frac{455}{1843}$日，为一个回归年天数。

此外，$\frac{10091}{11058}\approx\frac{73}{80}$，$5\frac{1934}{11058}\approx 5\frac{14}{80}$，$6\frac{967}{11058}\approx 6\frac{7}{80}$。可知与京房卦气说相同。

3. 推日、月行度

(1)推所求年天正月朔日夜半，日所在星度。

以朔前积日化为度分〔每日1843(纪法)分，每1843日合673150(周天)分〕，满周天分则除去之，所余不满周天分的部分为日所在天度分。除纪法化为度，最后从牛宿前5度减起，依次减各宿度数，至所余不足某宿度数时，为入该宿度。即：

$$\frac{\text{朔积日}\times\text{纪法}-n\cdot\text{周天}}{\text{纪法}}=\text{天度}\frac{\text{日分}}{\text{纪法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5.23)$$

其中"朔积日"为本章"推天正月朔日名"中的(5.9)式的计算结果；n为自然数，且满足$0\leqslant$朔积日×纪法$-n\cdot$周天$<$周天。各宿度数[①]从牛前5度(即斗22度)起算。历减各星宿度，至不可减，得所求年天正朔日夜半，日所在宿度。

加1，得次日宿度，日分不变。过斗宿时，须知斗有26度之外，还有

① 见《晋书·律历志》，中华书局1987年版，第549页。

455 分，不可忽略。

(2)推所求年天正朔，月所在宿度。

月每日行 $13\frac{7}{19}=\frac{254}{19}$度，把(5.23)式中的朔积日乘此数化为月行度，其余算法不变：

$$\frac{\text{朔积日}\times\frac{254}{19}\times\text{纪法}-n\cdot\text{周天}}{\text{纪法}}=\frac{\text{朔积日}\times\text{月周}-n\cdot\text{周天}}{\text{纪法}}$$

$$=\text{天度}\frac{\text{分}}{\text{纪法}}\quad\cdots\cdots\quad(5.24)$$

同样，n 是自然数，满足 $0\leqslant$ 朔积日 $\times$ 月周 $-n\cdot$ 周天 $<$ 周天。所得天度数从牛前 5 度历减各宿矩度，至不能再减(余数不足某星矩度)，余数为入该宿度数。

求下月。由于月有大小，小月 29 日，大月 30 日。只要把(5.24)式算得的结果(度、分)加上这一月中月所行度数即得，照例，加后满周天分则除去之。29 日内月亮行分为：

$29\times$月周$=29\times24638=714502$ 分。

除去 1 周天：$714502-673150=41352$ 分，化为度(不尽为分)：$\frac{41350}{\text{纪法}}=\frac{41350}{1843}=22\frac{806}{1843}$度，即 22 度 806 分(1 度＝1843 分)。

所以，《律历志》说，求次月，小月加度 22，分 806。

月每日行 $13\frac{7}{19}$度$=13\frac{679}{1843}$度。若遇大月，加 22 度 806 分之外，再加 13 度 679 分。

(3)推所求年天正月含朔时日月所在度。

合朔时，日月同度，日月所在度等于日所在度。

(5.23)式算得的是朔积日折合的天度数，加上朔小余折合的天度分数，就是所求合朔时的日度数。朔小余化为分：

$$\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}\times\text{纪法}=\frac{\text{朔小余}\times\text{章法}}{\text{通法}}=\text{大分}\frac{\text{小分}}{\text{通法}}\quad\cdots\cdots\quad(5.25)$$

与(5.23)式求得的日分数相加，除纪法得度数

$$\frac{日分+大分}{纪法}=度\frac{余分}{纪法} \qquad (5.26)$$

(5.26)式得到的度数与(5.23)所得度相加，得合朔时日所在天度，余分为所在分。由天度历减诸宿矩度如前法，得合朔时日月所在宿度。

求次月合朔度：

$$每月日行\ 29\frac{2419}{4559}度=29\frac{朔小余\times纪法}{日法\times纪法}=29\frac{朔小余\times章法}{通法\times纪法}$$

$$=29\frac{977\frac{42}{47}}{纪法} \qquad (5.27)$$

上月合朔度分加此数即为所求。《律历志》说是，上月合朔度分"加度二十九，大分九百七十七，小分四十二。小分满通法(47)从大分，大分满纪法从度"。把所得度分和从牛前5度，历减诸星矩度。过斗宿时，减角毕，另减455分，最后至某宿不足减，便是次月合朔入该宿度数。

(4)推弦、望时，日所在宿度。

每月日行度除4得：

$$29\frac{977\frac{42}{47}}{1843}\div4=7\frac{705\frac{10\frac{1}{2}}{47}}{1843} \qquad (5.28)$$

其中705为大分，10为小分，1为微分。合朔度分加$\frac{1}{4}$月的日行度得上弦时度分，再加得望，三加得下弦。《律历志》说是，合朔度分加"度七，大分七百零五，小分十，微分一。微分满二从小分，小分满通法(47)从大分，大分满纪法(1843)从度"。从所得度分中历减诸宿矩度如前，得所求。

(5)推弦、望时月所在宿度。

把$\frac{1}{4}$月的日行度$7\frac{705\frac{10\frac{1}{2}}{47}}{1843}$度化为月行度(乘$13\frac{7}{19}$即得)，得到$\frac{1}{4}$月的月行度。自合朔度〔本节3(3)中已算得〕加此数得上弦时月度，再加得望，三加得下弦。$\frac{1}{4}$月的行度：

$$7\frac{705\frac{10\frac{1}{2}}{47}}{1843}\times 13\frac{7}{19}=\frac{\frac{639492\frac{1}{2}}{47}}{1843}\times\frac{254}{19}$$

$$=\frac{181893\frac{34}{47}}{1843}=98\frac{1279\frac{34}{47}}{1843}\text{度} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.29)$$

所以,《律历志》说,求上弦时月所在度,以合朔时日月所在天度分,加"度九十八,大分一千二百七十九,小分三十四"。小分满通法入大分,大分满纪法入度。所得结果历减诸宿度如前,得上弦时月所在宿度。

(6)推日、月于昏、明时所在度分。

由本节3(1)和(2)能算出任何一日夜半时,日或月的所在度分,设日所在度分为P,月所在度分为Q。查出该日所近节气的夜漏数A,半夜漏刻$\frac{A}{2}$,在此时间内日、月行度分别是$B_{日}$、$B_{月}$,那么:$P+B_{日}$、$Q+B_{月}$分别是黎明时日和月所在度,因而,《律历志》称$B_{日}$、$B_{月}$为明分。日行每日1度,合1843(纪法)分;月行每日$13\frac{7}{19}=\frac{254}{19}$度,合$1843\times\frac{254}{19}=$ 24638月周。所以:

$$B_{日}=\frac{A}{2}\cdot\frac{\text{纪法}}{100}=\frac{A\cdot\text{纪法}}{200} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.30)$$

$$B_{月}=\frac{A}{2}\cdot\frac{\text{月周}}{100}=\frac{A\cdot\text{月周}}{200} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.31)$$

《律历志》说"日以纪法,月以月周,乘所近节气夜漏(A),二百而一,为明分"。就是以上两式。

日、月的1日行分,减去明分(日、月的半夜行分),得昏时行分$C_{日}$、$C_{月}$,称为昏分:

$$C_{日}=\text{纪法}-B_{日} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.32)$$

$$C_{月}=\text{月周}-B_{月} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.33)$$

夜半行度分加昏分得昏时度分,加明分得黎明时度分。设P、Q分别是日、月夜半时所在度分,则:

$$P+B_{日}=\text{日明度分} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.34)$$

$$P+C_{日}=\text{日昏度分} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.35)$$

$$Q+B_{月}=\text{月明度分} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5.36)$$

$$Q+C_{月}=月昏度分 \cdots\cdots \quad (5.37)$$

《律历志》说是“各以分(明分及昏分)加夜半(所在度分),(分)如法为度”。

4. 推月蚀术

(1)求日月交会与月蚀法。

《律历志》所给公式是:

天正十一月合朔时去交度分

$$=(所求年入纪朔积分+纪下交会差率)-m\cdot会通 \cdots \quad (5.38)$$

$$次月合朔去交度分=头月去交度分+通数-m\cdot会通 \cdots\cdots \quad (5.39)$$

$$某月望去交度分=该月合朔去交度分+朔望合数-n\cdot会通 \cdots\cdots \quad (5.40)$$

(5.38)式中,m、n 是自然数或零,且使所求去交度分满足:$0\leqslant$去交度分$<$会通。

《律历志》又说,以上三式求得的去交分(朔或望去交分)小于朔望合数或大于入交限数,对于朔去交分表示日月交会;对于望去交分,则表示月蚀。即当以上三式所得去交度分满足:去交度分$\leqslant$67315(朔望合数),或:去交度分$\geqslant$722795(入交限),则有日月交会或月蚀。

(5.38)式可以这样理解,前面说过,某纪下的交会差率等于该纪首以前的朔望月积分(积月乘通数),减去若干个交会周期($n\cdot$会通)以后剩余的不足一个交会周期的部分。那么,要求该纪中某年与交会点之间的度分数,只要把该年天正月朔以前的入纪朔积分数加上交会差率,再与会通相比较即得,大于会通数就是距交会点的度分数。如图 5.2,B 为所求年入纪的纪首,A 为距纪首最近的交会点。B 左为纪首以前的朔望月积分数,A 左为交会周期的积分数(会通的整数倍),AB 就是该纪下的交会差率(即纪首交会差率)。D 点为所求年天正月朔,BD 便是所求年入于该纪的朔积分。假若 $AB+BD>$会通,在 AD 之间还有一个交会点 C,$AC=n\cdot$会通,即等于 n 个交会周期的分数,CD 就是所求年天正月朔距交会点的度分数,名为去交度分。$CD=AB+BD-AC$,就是(5.38)式。

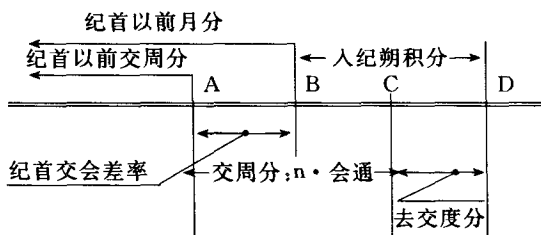
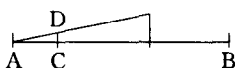



图 5.2　去交度分图

(5.39)式可由以上推知，不必再释。(5.40)式中的朔望合数恰等于通数(1 个朔望月分数)的一半，即等于从朔到望之间的日分数，那么(5.39)式所得为月朔的去交度分，而(5.40)式所得为月望去交度分，也就很容易理解了。

图 5.3　黄、白交角

下面解释为何去交度分小于朔望合数或大于入交限数就会有月蚀或交会。前文说过，入交限等于会通减朔望合数。图 5.3 为示意图，AB 等于会通，为日月交会一次相距的度分数，AC 等于朔望合数。显然，$BC=AB-AC=$会通－朔望合数，为入交限数。去交度分小于朔望合数(AC)，朔望点落在 AC 之中；大于入交限数，落在靠近 B 的一端，距离 B 点小于 AC。把它移到 A 端论述：不论去交度分小于朔望合数，还是大于入交限数，朔望点都落在 AC 之间。假设 AB 与黄道合，AD 与白道合，前面说过，黄白相去最大距离是 6 度，自交点到最大距凡七日，月行$\frac{254}{19}\times 7\approx 93^{\circ}.6$。黄、白交角的正切值$\frac{6}{93.6}$。今知 $AC=\frac{\text{朔望合数}}{\text{日法}}=\frac{67315}{4559}\approx 14^{\circ}.7$，得比例式$\frac{CD}{14.7}=\frac{6}{93.6}$，$CD\approx 0.9^{\circ}$。由此知，在去交度分小于朔望合数或大于入交限的范围内，日、月相距不足 1 度，小于日、月经度和，也小于日、地经度和，彼此必然互相遮掩，因此可以认为日月交会或月蚀。

例，甘露元年(256 年)，距上元壬辰 4064 年(不包括甘露元年)。除以纪法：

$\frac{4064}{1843}=2\cdots\cdots$余 378 年，知甘露元年入于甲申（第三纪）纪第 379 年。求积月：

$\frac{378\times 235}{19}=4675\frac{5}{19}$，积月 4675；月余 5，小于 12，甘露元年无闰月。求入纪朔积分：

4675 × 134630 = 629395250。代入（5.38）式（取 $n=797$）：629395250＋620139－797×790110＝297719，此为天正月合朔时的去交度分，由于大于朔望合数(67315)，小于入交限(722795)，日月不交，亦不食。由(5.39)式，加通数得下月去交度分，再加得下下月，三加得天正四月（夏历二月）朔的去交度分。由(5.40)式再加朔望合数得四月望去交度分：297719＋134630×3＋67315＝768924，大于入交限，知二月望月蚀。三月朔去交度分为 46129，小于朔望合数，日月交会。

(2)求合朔交会或月蚀时，月在日道表里术。

《律历志》所给公式是：

$$\text{入纪朔积分}+\text{所入纪下交会差率}-2n\cdot\text{会通}=\text{余} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.41)$$

若 0＜余＜会通，天正朔日，月位与纪首同；若会通＜余＜2·会通，(5.41)式改为：

$$\text{入纪朔积分}+\text{所入纪下交会差率}-(2n+1)\text{会通}=\text{余} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.42)$$

此时，天正朔日，月位与纪首异。

(5.41)、(5.42)二式左端前两项“入纪朔积分＋所入纪下交会差率”表示上元以来朔积分与入纪前会通数的差。第三项是表示入纪后继续减会通数。即继续计算朔积分与通数的差。前面介绍参数时说过，会通的意义是交会周期化成的日分数。由于采用通数（一个朔望月的日分数）作分母，没有引入会率的概念，会通的意义仅仅表示在一个交会周期（五个多月）内的日分数，所以它表示的只是相邻两个交会点间的日分数。而月行 1 周，要两次过交会点：自前交会点起始，穿过后交会点，再回到前交会点。即月行 1 周，要经两个会通的日分数，日、月的相对位置才能回复旧观。原来的月位在日道里，经过两个会通后的月位也在日道里；原来月位在日道表，两个会通后也在日道表。这就是(5.41)式左端第三项减去两个会通的原因。同样若只过了一个会通（引申为奇数个

会通），日、月只从前一个交会点到达第二个交会点，虽然日、月重又交会，却日、月易位，月位原在日道里转到了日道表，原在日道表转到了日道里，这就是(5.42)式左端第三项减去$(2n+1)$个会通的原因。

还可与乾象历推算入阴阳历的方法相比较，加深理解上两式减偶数或奇数会通的原因。

乾象历的区别是设立了“历周”的概念。历周等于半周天，满历周则阴历入阳历，阳历入阴历。满二倍历周(1周天)则阴阳不变。历周的作用与景初历的会通相似。为什么呢？乾象历的“推朔入阴阳历”法与景初历的“推合朔交会月蚀月在日道表里”意义是相同的，算法的区别是景初历直接求朔前的积日分，而乾象历是由积月乘朔合分得到朔前积日分。朔合分的意义是“每月食数对应的日分数”，计算朔合分的大小时用到一个基本概念是每食的日分数为半周天。再看景初历中会通的意义，前面说它是交食周期化成的日分数：$5\frac{116960}{134630}=\frac{\text{会通}}{\text{通数}}$，其中通数是一个朔望月的日分数。这个等式的左端单位可以写为月/食，代入以上等式得：$\text{会通}=\text{通数}\times\frac{\text{月}}{\text{食}}$。此式右端的意义是：每食对应的日分数。按照前面说的那个基本概念：每食对应的日分数恰是半周天。所以，景初历中的会通就是半周天，每过半周天阴阳历对倒，极易理解，过会通月位里表对倒是完全相同的。

例如，在前甘露元年例中，天正月朔的去交度分为：

纪下交会差率＋入纪朔积分－m·会通

$=620139+629395-797\times790110$

$=297719$

其中$m=797$，命$m=2n+1$，代入得$n=398$，适合(5.42)式，所求天正朔与入纪时的月位相反。查前表5.2，纪首月位在日道里，甘露元年天正朔的月位应在日道表。

(3)求次月合朔时，月位在日道表里。

显然，应用(5.41)或(5.42)式算出的结果，加上一个月的朔积分，得到次月的朔积分。此数若小于会通，次月与头月朔的月位相同；若大于会通，减会通后得到次月余，月位与头月朔相反。《律历志》表示为：

余＋通数－n・会通＝$余_{次}$ …………………………………… (5.43)

其中 $n=0$ 或 1，条件满足：$0\leqslant 余_{次}<$会通。

当 $n=0$ 时，次月与头月朔月位表里同；

当 $n=1$ 时，次月与头月朔月位表里相反。

求次月朔的月位表里至此而毕。术文的第二层意思是判定朔、望月位表里的关系，原文说："先交会后月蚀者，朔在表则望在表，朔在里则望在里。""先交会后月蚀"是指先朔后望，在同一个月相周期内。设朔时的入交度分为$余_{朔}$（$0<余_{朔}<$会通）。加朔望合数得望时入交度分$余_{望}$。已知望时有蚀，$余_{望}$必在限内：会通$>余_{望}>$入交限。把这些参数和运算式写在下面加以比较：

$0<余_{朔}<$会通

$余_{朔}+$朔望合数$=余_{望}$

会通$>余_{望}>$入交限

相参看来，$余_{朔}$小于会通，加朔望合数后得$余_{望}$，仍小于会通，所以，朔和望的月位相同，朔在表则望在表，朔在里望亦在里。

再一种情况是"先月蚀后交会者，看蚀月朔在里则望在表，朔在表则望在里"。"先月蚀后交会"是指在相邻的两个月相周期内，自头月望到次月朔。望时月蚀，入交度分小于朔望合数，或者大于入交限数、小于会通，即：

①$余_{望}<$朔望合数

②入交限数$<余_{望}<$会通

③$余_{望}+$朔望合数$=余_{朔}$（$余_{朔}$为次月朔）

比较以上三式知，①式必不成立（①代入③，得$余_{朔}<$通数，非交会点，与已知不合），②式两端同加朔望合数，并代入③式：

入交限数＋朔望合数$<余_{望}+$朔望合数$<$会通＋朔望合数

会通$<余_{朔}<$会通＋朔望合数

次月朔的入交度分既大于会通，它与蚀月望的月位必相反。去掉会通后得：

④$0<余_{朔}<$朔望合数

知次月朔在前限内，是交会点。

用同样的方法，把④式两端同加朔望合数得次月望，它与次月朔的月位相同。把②式两端同减朔望合数，得蚀月朔，它与蚀月望的月位相同。这样，就月位而言：

蚀月朔＝蚀月望

次月朔＝次月望

而　蚀月望≠次月朔

因得　蚀月朔≠次月望

《律历志》说是“蚀月朔在里则望在表，朔在表则望在里”。由以上分析知，第一句中的“望”字前脱“次月”二字。若只论蚀月，朔和望月位是相同的。

《律历志》第三层意思是对先后交会的判定法。原文说：“交会月蚀如朔望合数以下，则前交后会；如入交限数以下，则前会后交。”“前交后会”就是前边说的“先月蚀后交会”(先望后朔)，“前会后交”就是“先交会后月蚀”(先朔后望)。循着前边的思路：

若⑤0＜月蚀入交度分＜朔望合数

两边各加朔望合数，得：

朔望合数＜次朔入交度分＜通数

次朔不是交会点。不符合题给“前交后会”的条件。将上面不等式⑤的两端各减朔望合数，因不够减，破会通 1，增入入交分数而后再减，得：

⑥入交限数＜蚀月朔入交分＜会通

蚀月朔为交会点，“蚀月朔入交分”就是“交会入交分”。

朔日交会、望时月蚀，就是所谓“前会后交”。合⑤、⑥式可以看出，自朔而论当交会入交度分大于入交限数时，为“前会后交”。自望而论，当月蚀小于朔望合数时，不合题设。

若⑦0＜交会入交分＜朔望合数

不等式两边各加朔望合数，得：

朔望合数＜望日入交度分＜通数

望日不蚀，不符合题给“前交后会”或“前会后交”的条件。将不等式⑦两端各减朔望合数，不足减则取会通 1，增入入交分数，而后再减，得：

⑧入交限数＜前月望入交分＜0

在限内，有月蚀。合⑦、⑧式可知：就望而论，交会入交分小于朔望合数者，为前交后会。就朔而论，不合题设。

自⑤～⑧式也可以这样概括，对朔而言，若朔时交会，只有当交会入交分在入交限数以上，当月望才有月蚀，属于“前会后交”的情形；若入交分在朔望合数以下，则头月望有蚀，为前交后会。

对望日而言，若望日有蚀，当入交度分在入交限数以上，次月朔交会，为前交后会；当入交度分在朔望合数以下，蚀月朔交会，为前会后交。

“对望而言”与“对朔而言”，结果正好相反。与《律历志》原文对照，可知《律历志》所言指的是前一种情形，所谓“如朔望合数以下”、“如入交限数以上”，都是对朔而言，指的是交会入交度分的大小。原文中的“交会月蚀”如何如何，“月蚀”二字是衍文，宜删。

《律历志》此段文字的第四层意思是：“其前交后会近于限数者，则豫伺之；前会后交近于限数者，则后伺之。”按上文所说，所谓前交后会，指头月望蚀，次月朔交会，朔时入交分小于朔望合朔。所谓前会后交，指朔时交会，且入交度分大于入交限数，当月望时有蚀。因此，原文可这样翻译：对于前交后会的情形（头月望蚀，次月朔交会），若知朔日入交分近于限数，却不能断定是否入限，当从审察头月望日的月蚀入交分入手，头月望日入交分若大于入交限数，月朔必入前限（朔望合数）之中。对于前会后交的情形（朔日交会，望时月蚀），若知朔日入交分近限，而不能判定是否入限，则应从审察朔后的望时（当月望）的入交限入手，只要望时入交限小于朔望合数，就可判定当朔交会时的入交分在限（后限）中。

《律历志》的“校勘记”说，在“豫伺之”后应补“前月”二字，在“后伺之”之后应补“后月”二字。由以上译文可知，既然“前交后会”、“前会后交”都是对朔而言，“豫伺之”当然是指“前月”，此二字补与不补，于意无伤。而“后伺之”中的“后”是指与朔同月的望日，若补“后月”二字，反而于意有损了。单凭《宋书》为据，不论算法，是很容易出错的。

(4)推算去交度。

由本节4(1)求出去交(度)分后，除以日法化为度，就得到了去交度。所得度数有可能大于1周天(当去交分大于通数时)，这是应该避免的。按以往传统的方法：满1周天则除去之。《景初历》则是满会通除去之。对于“前交后会”的情形，朔时的去交度分小于朔望合数(二分之一周天)，其去交度可直接由它的去交分除以日法得到：

$$\frac{\text{今去交度分}}{\text{日法}}=\text{却去交度(分)}\frac{\text{分}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.44)$$

其中的“今去交度分”就是(5.38)、(5.39)式算出的合朔去交分，前交后会或前会后交都是对朔而言，所以知道是指朔去交度分；算法前面已经揭出，当做已知数，因称今去交度分。“却去交度分”，“却”字指“后”，是“退却”二字的引申意，是对“前交”而言。朔前一月的望日有蚀，称为前交。

对于“前会后交”的情形，已知的朔日去交分大于入交限，度数必大于1周天，所以，不直接除日法得到距前交点的去交度，改而求距后交点的度分数。相对于“后会”点而言，因称前去交度。两交会点之间的度分数等于会通，所以得：

$$\frac{\text{会通}-\text{去交度分}}{\text{日法}}=\text{前去交度}\frac{\text{分}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.45)$$

无论前去交度还是却出交度都是对月朔而言，对于前交后会的情形，朔相对于上月望日的月蚀而言，因称却去交度；对于前会后交的情形，朔是相对于当月的望日而言的，因称前去交度。

从(5.44)、(5.45)两式还可看出，当交会点在前交点附近，去交分小于朔望合数时，利用(5.44)式求去交度；交会点在后交点附近，去交分大于入交限，则用(5.45)式求去交度。

去交度与蚀的关系，《律历志》说：“去交度十五以上，虽交不蚀也；十以下是蚀；十以上，亏蚀微少，光晷相及而已。亏之多少，以十五为法。”意思是：

去交度$>15°$，虽交不蚀，$15°$是不偏食限；

去交度$<10°$，为蚀，$10°$是必偏食限；

$10°<$去交度$<15°$，亏蚀微少，或见或不见。

由今天的天文学知识，蚀分计算法是：

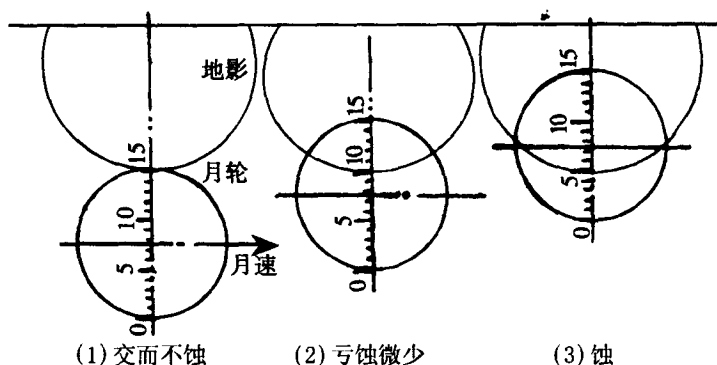



图 5.4 交蚀图

$$g=\frac{n}{m}\cdot e$$

其中 m、n 分别是月轮直径与亏蚀部分的比例数，e 为月轮直径的度分值。《律历志》说："亏之多少，以十五为法。"是指定 $m=15$，即以月轮直径的比例为 15 分。还指定入蚀 10 分以下（$n>5$ 分）为蚀，15 分以上（$n=0$）不蚀，10～15 分之间（$0<n<5$）之间为微蚀。以月轮直径为 15 分，以所蚀部分占的比例数确定食分多少，这是景初历的贡献。

（5）推日月蚀起始方位。

《律历志》叫做"求日蚀亏起角术"。分四种情形叙述：月在外道时先交后会与先会后交，月在内道时先交后会与先会后交。一般而言，月行速，日行迟，日月同是自西向东行，月自后追及日或地影，从而发生日、月蚀，所以月蚀起始方位必在东半边，日蚀起始方位总是在西半边。若月在外道离开交点时，自西北向东南行，月蚀起自东南角，蚀向西北角；向交点运行时，是自西南向东北行，月蚀起迄方位是自东北向西南。月在内道时，离开交点是西南—东北行，月蚀是自东北—西南；月向交点运行时，是自西北向东南，月蚀是自东南向西北。日蚀与此相反。这似乎是一定不易之规。其实，也有特例，月行接近交点时，月道与日道近于垂直，日蚀也有自东半边起始，月蚀自西半边

起始之时，参见图 5.5(1)。

《律历志》说："月在外道，先交后会者，亏蚀西南角起；先会后交者，亏蚀东南角起。""先交后会"、"先会后交"的区别在于：对于前者，朔、望分居交点两旁，而望在前，朔在后；后者却是朔在前，望在后。见图 5.5(2)。

图 5.5　亏蚀起角图

月在外道时，只有去交分极时才可能发生日蚀，图中月在外道沿 QN 段自西南向东北方向接近交点 N，在 N 附近追及日，掩日而蚀。日被掩自然是从西南角始。《律历志》说是"亏蚀西南角起"。

对于先会后交的情形，月在外道是指沿 DM 段自西南向东北运行，在交点 M 附近追及日掩日而蚀。与前不同的是朔在交点前，月不可能在日的中心线左方(西半边)追及日，而是在日右半边斜向上与日"擦肩"而过，因此，日蚀自东南角始。

月在内道，先交后会，是月沿 PN 段自西北向东南运行，在交点 N 附近与日交会而蚀，日被月掩的方位自是从西北始。

若先会后交，月沿 CM 段运行，同样由于朔在交点左方，月从日右半边追及日，日蚀起始方位是东北角。

蚀分的计量法与在"求去交度术"中介绍的相同，也是以日径为 15 分，15 分不蚀，10 分以下蚀，10～15 分之间微蚀。若交蚀点在日心，生日全蚀。

月蚀方法与日蚀相反。原因是月蚀时，月位与日相冲(分居地两旁，成一直线)，入地影而蚀。地影日照所生，方位与日相同。而月与地影相对运动产生月蚀，两者靠近的方位必相反。因此，月蚀与日蚀方位相反。

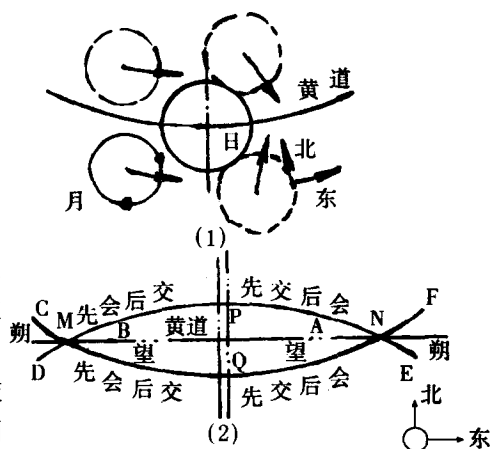
(6)推合朔交会月蚀入迟疾历术。

迟疾历就是按近点月日数排定的一月之中逐日月行速度表，一般称为“月行迟疾表”。仅仅由于它是按日排列，如同历表，名为迟疾历。见表 5.4，与乾象历的月行迟疾表相似，分为四栏。其中“月行迟疾度”栏

表 5.4 景初历月行迟疾表

日序	月行迟疾度	损益率	盈缩积分	月行分
一	14°14′	益 26	盈初	280
二	14°11′	益 23	盈积分 118534	277
三	14°8′	益 20	盈积分 223391	274
四	14°5′	益 17	盈积分 314571	271
五	14°1′	益 13	盈积分 392074	267
六	13°14′	益 7	盈积分 451341	261
七	13°7′	损	盈积分 483254	254
八	13°1′	损 6	盈积分 483254	248
九	12°16′	损 10	盈积分 455900	244
十	12°13′	损 13	盈积分 410310	241
十一	12°11′	损 15	盈积分 351043	239
十二	12°8′	损 18	盈积分 282658	236
十三	12°5′	损 21	盈积分 200596	233
十四	12°3′	损 23	盈积分 104857	231
十五	12°5′	益 21	缩初	233
十六	12°7′	益 19	缩积分 95739	235
十七	12°9′	益 17	缩积分 182360	237
十八	12°12′	益 14	缩积分 259863	240
十九	12°15′	益 11	缩积分 323689	243
二十	12°18′	益 8	缩积分 373838	246
二十一	13°3′	益 4	缩积分 410310	250
二十二	13°7′	损	缩积分 428546	254
二十三	13°12′	损 5	缩积分 428546	259
二十四	13°18′	损 11	缩积分 405751	265
二十五	14°5′	损 17	缩积分 355602	271
二十六	14°11′	损 23	缩积分 278099	277
二十七	14°12′	损 24	缩积分 173242	278
周日	14°13′又小分 626	损 25 小分 626	缩积分 63826	279 又小分 626

所列是一个近点月内逐日的月行度分数，乾象历名为“日转度分”；“损益率”栏所列包括两部分内容：数字表示的是月亮实行与平行相比的增减分数；数字前标有“损”或“益”字。十四日以前，“损”表示比平均行度少若干分，“益”表示多行若干分。十五日以后适相反，“损”表示减若干就成了平行分，“益”表示增若干才达到平行分。第三栏是“盈缩积分”，与乾象历“月行迟疾表”中的盈缩积一样，也是第二栏“损益率”中所列损益数的累积值，区别在于它把“损益率”栏中的“分”化成了更小的单位，前者 1 度＝19 分，此处取 1 度＝4559×19＝86621 分（即为日法与章法的公倍数）。因此，把“损益率”栏的累积数乘以 4559，就得到了“盈缩积分”栏的数据。称“盈积”表示是比平均行度多出的数目，“缩积”是减少的数目，一盈一缩，总计代数和应是零，表中只列出了二十七日以前的盈缩积，不包括二十八日（即周日）的损益数，所以不是零。第四栏“月行分”，也与乾象历表相同，都是当日月实行分数，即把第一栏中的度分数都化为分（1 度＝19 分）。

应注意的是表中二十七日以前月行分合计已达 360°4′，差 5°余满 1 周天，而二十八日行度为 14 度余，总计比 1 周天多出 9°余。这表示，表中列出了 28 天月行情形，不是月亮的一个运行周期。按表计算，当运行日数大于 28 天，回复到表头查寻数字时，有的会发生重叠，须把重叠的部分减去，才是真实数字，这与乾象历表的情形相同。

下面计算所求年天正十一月朔入迟疾历的日数，显然按朔望月算得的积日总数，与按近点月算出的积日总数之差，就是所求入迟疾历日数。但前面介绍过一个参数：迟疾差率，某纪首的迟疾差率表示的是该纪首以前的朔积分与近点月的日积分差，还差多少不够一个近点月周期（通周）。利用这个参数计算天正月的入迟疾历数就方便多了，《律历志》所给公式是：

$$\frac{\text{入纪朔积分}+\text{所入纪下迟疾差率}-n\cdot\text{通周}}{\text{日　法}}=\text{入历日数}\frac{\text{日余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (5.46)$$

“入历日数”算外为天正十一月合朔所入历日。

(7)求次月合朔所入历日。

可在(5.46)式分子上加一月朔积分（通数），同时，也应多减一个通

周。设(5.46)式左端为 A,则次月入历数为

$$A+\frac{\text{通数}-\text{通周}}{\text{日法}}=A+\frac{134630-125621}{4559}$$

$$=A+1\frac{4450}{4559}=(\text{入历日数}+1)\frac{\text{日余}+4450}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (5.47)$$

就是《律历志》说的,"求次月,(上月入历日数)加一日,日余(加)四千四百五十"。

若求望日的入历日数,应在(5.46)式左端加入半个朔望月($\frac{\text{朔望合数}}{\text{日法}}=14\frac{3489}{\text{日法}}$),即在"入历日数"中加 14 日,日余加 3489,加后日余满日法化整日入入历日数,余为日余。写为:

$$\text{望日入历日数}=(\text{入历日数}+14)\frac{\text{日余}+3489}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (5.48)$$

当加后入历日数大于 27 日,即所得结果大于一个近点月日数时,应从中减去一个近点月〔在(5.46)式分子中多减一个通周〕,即入历日数减 27,日余减周日余(2528)。若日余不够减,从入历日数中多减 1 日,加周虚。

(8)推合朔交会或月蚀时的定大、小余。

参见第四章(4.26)～(4.29)式。由月行迟疾产生的误差,等于入迟疾历以来月实行与平行之差,它由两部分构成:入历日数决定的盈缩积分及入历日余决定的损益数(为使单位制相同,盈缩积分应除以日法),即等于:

$$\frac{\text{盈缩积分}}{\text{日法}}\pm\frac{\text{入历日余}}{\text{日法}}\times\text{损益率} \quad \cdots\cdots (5.49)$$

入历日(设为 n)和日余已由(5.46)或(5.47)式算得,盈缩积分和损益率可由表 5.4 中第"$n+1$"日栏中查得。(5.49)式的单位是分,单位制 1 度=19 分。

将(5.49)式算得的月行差除以入历最后一天月相对日的实行分(月行分一章岁),把月行差化为日。再与朔大、小余相加减,就得到了定大、小余。即:

$$\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{日法}}\pm\frac{\frac{\text{盈缩积分}}{\text{日法}}\pm\frac{\text{入历日余}}{\text{日法}}\times\text{损益率}}{\text{月行分}-\text{章岁}} \quad \cdots\cdots (5.50)$$

(5.50)式中的第二项不大可能超过1日，所以第一项中的大余可以不计，只与第一项中的分数部分相加减。所得若大于1日，大余增1日，交会、月蚀在朔或望后1日；若第一项分数小于第二项，两项之间取减号时，在朔或望前1日。否则在同日。(5.50)式改为：

$$\frac{\text{小余}}{\text{日法}}\pm\frac{\dfrac{\text{盈缩积分}}{\text{日法}}\pm\dfrac{\text{入历日余}}{\text{日法}}\times\text{损益率}}{\text{月行分}-\text{章岁}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.51)$$

为了与《律历志》的叙述吻合，把上式的形式改写为：

$$\frac{\text{小余}\pm\dfrac{\text{盈缩积分}\pm\text{入历日余}\times\text{损益率}}{\text{月行分}-\text{章岁}}}{\text{日　法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.52)$$

其中“盈缩积分±入历日余×损益率”叫做“定积分”。“±”号的判定法：先看定积分中的“±”号，若第一项为盈积分(正数)，“±”号取决于损益率，是损“－”益“＋”；若第一项为缩积分(负数)，正相反，是损“＋”益“－”。定积分大于零，小余后用“＋”号，小于零用“－”号。

由(5.51)式算得的定大、小余推算交会、月蚀所加时刻，方法见后。

前面说入历日为 n，盈缩积分和损益率都要从表5.4中的第“$n+1$”日栏查得，若入历日为周日(二十八日)，或者入历日数二十七，而入历日余大于周日日余(2528)，总之是若入历日(及余)大于近点月，须先从入历日中减去1个近点周($27\frac{2528}{4559}$日)，以余数为新的入历日，再查表计算。当入历日为二十七，入历日余又小于周日日余时，可直接用表5.4计算，但要用到表中周日栏诸数据，使与(5.52)式的形式略有不同，《律历志》叙述的该式为：

$$\frac{\text{小余}+\dfrac{\text{周日日余}\times\text{缩积分}-(\text{损率}\times\text{入历日余}\times\text{周日日余}+\text{周日度小分})}{(\text{周日月行分}-\text{章岁})\times\text{周日日余}+\text{周日度小分}}}{\text{日法}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.53)$$

其中“周日日余×缩积分”名为“定积分”；而“周日日余×缩积分－(损率×入历日余×周日日余＋周日度小分)”名为“后定积分”。

为了弄清(5.53)式的含意，可以这样考虑：既然入历日和日余不大于1个近点月，(5.51)式对这种情况也是适用的，不同的是表5.4中周日栏的参数有的带小分，这对利用(5.51)式并无影响。于是得：

$$\frac{小余}{日法}+\frac{\frac{缩积分}{日法}-(损率\frac{周日度小分}{周日日余}\times\frac{入历日余}{日法})}{周日月行分\frac{周日度小分}{周日日余}-章岁}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5.54)$$

按照前述选择(5.51)式中正负号的原则，$\frac{小余}{日法}$之后用减号，缩积分是负号，损率前用正号。今把$\frac{小余}{日法}$后改为加号，缩积分、损率也变号，就成了上面的形式。此外，(5.51)式中的盈缩积分、损益率，对于周日，只有缩积分和损率；而损率是“二十五分有小分六百二十六”($25\frac{626}{2528}$分)，月行分是“二百七十九有小分六百二十六”($279\frac{626}{2528}$分)。在上式中，只把“二十五”叫做“损率”，“二百七十九”叫做“月行分”，小分表示为$\frac{周日度小分}{周日日余}$，即$\frac{626}{2528}$。明于此，就不难看出(5.54)于(5.51)式并无违背了。下边将(5.54)化简：

$$\frac{小余}{日法}+\frac{\frac{缩积分}{日法}-(\frac{损率\times周日日余+周日度小分}{周日日余}\times\frac{入历日余}{日法})}{\frac{周日月行分\times周日日余+周日度小分}{周日日余}-章岁}$$

$$=\frac{小余}{日法}+\frac{缩积分\times周日日余-(损率\times周日日余\times入历日余+周日度小分\times入历日余)}{日法\times周日日余\times(\frac{周日月行分\times周日日余+周日度小分}{周日日余}-\frac{章岁\times周日日余}{周日日余})}$$

$$=\frac{小余}{日法}+\frac{缩积分\times周日日余-(损率\times周日日余\times入历日余+周日度小分\times入历日余)}{日法\times[(周日月行分-章岁)\times周日日余+周日度小分]}$$

$$=\frac{小余+\frac{缩积分\times周日日余-(损率\times周日日余\times入历日余+周日度小分\times入历日余)}{(周日月行分-章岁)\times周日日余+周日度小分}}{日法}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5.55)$$

将(5.55)式与(5.53)式比较，两者惟一不同是，(5.53)式上右的分子中有一项“周日度小分”，在(5.55)式中是“周日度小分×入历日余”，应该说(5.55)式是正确的。《律历志》中叙述(5.53)式的那段文字“以周日日度小分并之，以损定积分”[①]，应该是“以周日日度小分乘入历日余，并之，以损定积分”。

① 《晋书·律历志》，中华书局1987年版，第548页。

(9)推交会、月蚀加时。

本节4(8)中已算得交会、月蚀的定大、小余，小余是不足1日的部分，除以日法后，单位是日。欲求加于1日中的某个时辰，由于1日＝12辰，把日变为辰即可，故须：

$$\frac{小余\times 12}{日法}=辰次\frac{辰余}{日法} \quad \cdots\cdots (5.56)$$

余数“辰余”是不足1辰的部分。若把每辰分为4等分，其中1等分名为少，2等分名为半，3等分名为太，那么：

$$\frac{辰余\times 4}{日法}=等分数\frac{等余}{日法} \quad \cdots\cdots (5.57)$$

同样再把每等分分为3部分，得其1为强，得其2往上靠，为弱。如“丑少”，得1为丑少强，得2为丑半弱。

$$\frac{等余\times 3}{日法}=部分数\frac{余分}{日法} \quad \cdots\cdots (5.58)$$

对余分采取四舍五入法，即余分$\geqslant\frac{1}{2}$日法，部分数增1；否则舍弃之。如“丑少强”，有余分等于半日法以上，变为丑半弱。

十二等分各部分命名法(如少、半、太、强、弱等)参见图3.10。

(5.56)式算得的辰次数自子时起算，算外为加时所在辰。如辰次为3，自子时起算，算外为第4辰：卯。由大余算外定日，由小余进退之。《律历志》解释说：“其月蚀望在中节前后四日以还者，视限数；在中节前后五日以上者，视间限。定小余如间限、限数以下者，以算上为日。”[①]意思是，发生月蚀的望日距邻近中气前后四日内，把月蚀定小余与该中气的限数相比较，小于限数以算上为日，大于限数以算外为日。如在中气前后五日以外，把月蚀定小余与前后两中气间的间限数比较，小于间限数者，以算上为日，大于间限数者以算外为日。其原因及限数、间限数的含义，参见本章二节1(4)“推弦望日名”中的解释，并见限数、间限数表[②]。

(10)二十八宿赤道距度表。

---

① 《晋书·律历志》，中华书局1987年版，第549页。

② 同上书，第541～542页。

内容与第三章中的表 3.4 相同，略。

(11)二十四气数值表。

内容与第三章中的表 3.7 大体相同，有些数值不同，先把此表抄录如后，再分别加以解释。

表 5.5　二十四气数值表

中节	日行所在度	日行、黄道去极度	日中晷影	昼漏刻	夜漏刻	昏中星	明中星
冬至	斗 21 少	115°	1 丈 3 尺	45 刻	55 刻	奎 6 弱	亢 2 少强
小寒	女 2°少	113°强	1 丈 2 尺 3 寸	45 刻8分	54 刻2分	娄 6°半强	氐 7°强
大寒	虚 5°半弱	110°太弱	1 丈 1 尺	46 刻8分	53 刻2分	胃 11°太强	心　半
立春	危 10°太弱	106°少弱	9 尺 6 寸	486分	51 刻4分	毕 5°少弱	尾 7°半弱
雨水	室 8°太强	101°强	7 尺 9 寸5分	50 刻8分	49 刻2分	参 6°半弱	箕　半
惊蛰	壁 8°强	95°强	6 尺 5 寸	53 刻3分	46 刻7分	井 17°少弱	斗初少
春分	奎 14°少强	89°少强	5 尺 2 寸5分	55 刻8分	44 刻2分	鬼 4°	斗 11°弱
清明	胃 1°半	83°少弱	4 尺 1 寸5分	58 刻3分	41 刻7分	星 4°太	斗 21°半
谷雨	昴 2°太	77°太强	3 尺 2 寸	60 刻5分	39 刻5分	张 17°	牛 6°半
立夏	毕 6°太	73°少弱	2 尺 5 寸2分	62 刻4分	37 刻6分	翼 17°太	女 10°少弱
小满	参 4°少弱	69°太	1 尺 9 寸8分	63 刻9分	36 刻1分	角　太弱	危　太弱
芒种	井 10°半弱	67°少弱	1 尺 6 寸8分	64 刻9分	35 刻1分	亢 5°太	危 14°强
夏至	井 25°半强	67°强	1 尺 5 寸	65 刻	35 刻	氐 12°少弱	室 12°强
小暑	柳 3°太强	67°太强	1 尺 7 寸	64 刻7分	35 刻3分	尾 1°太强	奎 2°太强
大暑	星 4°强	70°	2 尺	63 刻8分	36 刻2分	尾 15°半强	娄 3°太
立秋	张 12°少	73°半强	2 尺 5 寸5分	62 刻3分	37 刻7分	箕 9°太强	胃 9°太弱
处暑	翼 9°半	78°半强	3 尺 3 寸3分	60 刻2分	39 刻8分	斗 10°少	毕 3°太
白露	轸 6°太	84°少强	4 尺 3 寸5分	57 刻8分	42 刻2分	斗 21°强	参 5°少强
秋分	角 5°弱	90°半强	5 尺 5 寸	55 刻2分	44 刻8分	牛 5°少	井 16°少强
寒露	亢 8°半弱	96°太强	6 尺 8 寸5分	52 刻6分	47 刻4分	女 7°太	鬼 3°少强
霜降	氐 14°少强	102°少强	8 尺 4 寸	50 刻3分	49 刻7分	虚 6°太	星 3°太
立冬	尾 4°半强	107°少强	1 丈	48 刻2分	51 刻8分	危 8°强	张 15°太强
小雪	箕 1°太强	111°弱	1 丈 1 尺 4 寸	46 刻7分	53 刻3分	室 3°半弱	翼 15°太
大雪	斗 6°	113°太强	1 丈 2 尺 5 寸6分	45 刻5分	54 刻5分	壁　半强	轸 15°少强

先看第二栏二十四气的赤道度，第三章解释表 3.7 时说，每个节气相差 15°7′(1 度＝32 分)，表 3.7 中的数字无误。由此检验上表数据，把其中的少、半、强、弱等化为小数，与表 3.7 中的数字多不相符。度数不

同者有秋分，其他经四舍五入后，度后第一位小数不同者有惊蛰、立夏、大暑、秋分、寒露、大雪等。由于景初历的表示法是以十二分之一倍增的，其中惊蛰、大暑、大雪是由系统本身造成的，无法改变，其他几项则可能是出现了错误，如立夏，表 3.7 数值是毕 6°31′，即 $6\frac{31}{32}$度；此表数是毕 6°太，即 $6\frac{3}{4}$度。“校勘记”改正说“毕六太，当作毕七”[①]。若改为“毕七弱”与表 3.7 值更加接近。再如寒露，表 3.7 为亢 8°5′，即为 $8\frac{5}{32}$度＝8°15625；此表值为亢 8°半弱，即为 $8\frac{5}{12}$度＝8°4167。两相比较可知，“半弱”二字可能是“少弱”之误。

第三栏日行、黄道去极度数是实测值，与表 3.7 所列有三处不同(见表 5.6)。可以用第三章所给公式(3.73)检查右表数值的正误，先把(3.73)式做如下变化：

表 5.6　去极度差异表

中节		立春	春分	小满
去极度	表 3.7	106°少强	89°强	69°太弱
	表 5.5	106°少弱	89°少强	69°太
与夏至漏刻差		32°8′	18°4′	2°2′

$$漏刻差=\frac{去极差\times二至漏刻差}{二至去极度差}=\frac{去极度差\times40}{48}$$

$$即：去极度差=\frac{6}{5}漏刻差$$

将表 5.6 中漏刻差的值代入，分别求得表 5.6 中三个节气的去极度值，得到它们与夏至的去极度差，加上夏至去极度(67°强)就可以与表中去极度数相比较了：

$$立春去极度=67°强+32°8'\times\frac{6}{5}=106.443\doteq106°半弱$$

$$春分去极度=67°强+18°4'\times\frac{6}{5}=89.163\doteq89°少弱$$

① 《晋书・律历志》，中华书局 1987 年版，第 574 页，“校勘记”〔四〇〕。

小满去极度$=67°$强$+2°2' \times \frac{6}{5}=69.723 \doteq 69°$太

由此知，表 5.5 中立春黄道去极度的数值：106°少弱，“少”是“半”字之误；春分黄道去极度数值：89°少强，“强”是“弱”字之误；小满黄道去极度的数值 69°太是正确的，表 3.7 中的对应数值“69°太弱”，“弱”字衍。

以下三栏（第四栏“日中晷影”、第五栏“昼漏刻”、第六栏“夜漏刻”）与表 3.7 全同，不再解释。

第七、八栏与表 3.7 也有出入，列如下表：

表 5.7　昏明中星异同表

		小寒	大寒	雨水	立夏	夏至	大暑	白露	霜降	小雪	大雪
昏中星	表 3.7		胃 11° 半强				尾 15° 半弱			室 3° 半强	
	表 5.5		胃 11° 太强				尾 15° 半强			室 3° 半弱	
明中星	表 3.7	氐 7° 少弱		箕太弱	女 10° 少	室 12° 少弱		参 5° 半弱	星 3° 太强	翼 15° 太强	轸 15° 弱
	表 5.5	氐 7° 强		箕半	女 10° 少弱	室 12° 强		参 5° 少强	星 3° 太	翼 15° 太	轸 15° 少强

验正方法可借助第三章(3.74)、(3.75)式（略）。

(12)表 5.5 中的二十四节气等参数求法。

首先按前述(5.8)～(5.10)式算出所求年天正月朔日的大、小余，由大余得日度（1 日＝1 度），由小余得少、半、太等，后者算法为：

$$\frac{\text{小余}}{\text{日法}} \times 4 = a\,\frac{\text{不尽数}}{\text{日法}}$$

其中 $a=1$、2、3，分别为少、半、太。

$$\frac{\text{不尽数}}{\text{日法}} \times 3 = b\,\frac{\text{微余}}{\text{日法}}$$

其中 $b=1$ 或 2，分别为强或弱。其余节气算法仿此，这样就得到了表 5.5 第二栏中各节气的“日行所在度”数。

再以昏明中星数减以上所得数，可求出昼夜漏刻数。但是，原文没有注明具体公式，从略。

三、推五星法

1. 五星参数

(1)五星参数的含义。

《律历志》有一段文字解释五星各参数的含义，大意是说，五星指木星(岁星)、火星(荧惑)、土星(填星，三统历名为镇星)、金星(太白)、水星(辰星)。运行有迟、疾、逆、留的不同。开辟之初，日、月、王星同处于星纪(天球十二次之一)，一起开始运行，彼此间逐渐拉开了空当。当某星再次与日会合(处于同一宿度)，就叫做"合"。二合之间相隔天数称为"一终"。将一终日数和一岁日数通分，求它们的最小公倍数，此数折合成的岁数叫做"合终岁数"，至此岁数终了时发生的合数叫做"合终合数"[①]。由这两个参数可推出其他各种参数，如：

$$\text{每合年数}=\frac{\text{合终岁数}}{\text{合终合数}} \cdots\cdots \quad (5.59)$$

$$\text{每合月数}=\frac{\text{合终岁数}}{\text{合终合数}}\times\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}=\frac{\text{合终岁数}\times\text{章月}}{\text{合终合数}\times\text{章岁}}$$

$$=\frac{\text{合月分}}{\text{合月法}}=\text{合月数}\frac{\text{月余}}{\text{合月法}} \cdots\cdots \quad (5.60)$$

$$\text{每合日数}=\text{每合月数}\times\text{每月日数}=\frac{\text{合终岁数}\times\text{通法}\times 5\times\text{通数}}{\text{合终合数}\times\text{章岁}\times\text{通法}\times 97}$$

$$=\frac{\text{合终岁数}\times\text{通数}\times 5}{\text{合终合数}\times\text{纪法}}=\frac{\text{合终岁数}\times\text{通数}\times 5}{\text{日度法}}=\text{日数}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}$$

$$\cdots\cdots \quad (5.61)$$

由每合整月数求朔大小余：

$$\text{合月数}\times\text{每月日数}=\frac{\text{合月数}\times\text{通数}}{\text{日法}}=\text{大余}\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}} \cdots\cdots \quad (5.62)$$

其中大余去 60 甲子，剩余不满 1 甲子的部分为星合朔大余。

由每合月数的畸零部分和朔小余求入月日数：

---

① 原文："岁数岁则谓之合终岁数，岁终则谓之合终合数。"《晋书·律历志》中华书局 1987 年版"校勘记"〔五二〕说："依文义，当作'岁则谓之合终岁数，终则谓之合终合数'。"不妥。应是"岁数之岁谓之合终岁数，岁终合数则谓之合终合数"。

$$\frac{月余}{合月法}\times\frac{通数}{日法}+\frac{朔小余}{日法}=\frac{月余\times通数+朔小余\times合月法}{合月法\times日法}$$

$$=入月日\frac{入月日余}{日度法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.63)$$

其中$\frac{朔小余}{日法}$,子母相减得朔虚分,即:

$$日法-朔小余=朔虚分 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.64)$$

每合行星度由每合年数求得:

$$\frac{合终岁数}{合终合数}\times\frac{周天}{纪法}-n\frac{周天}{纪法}=\frac{周天}{纪法}\left(\frac{合终岁数}{合终合数}-n\right)$$

$$=\frac{周天(合终岁数-n\cdot合终合数)}{纪法\times合终合数}=行星度\frac{度余}{日度法} \quad\cdots\cdots\cdots \quad (5.65)$$

其中,日度法=纪法×合终合数。n 是自然数,它的选择应使(5.65)式中 $0\leqslant\frac{合终岁数}{合终合数}-n<1$。

还有一个参数:斗分,在第四章中,我们把它叫做"星斗分",以与周天畸零度分的斗分相区别,又知星斗分的意义是星一终所历天度中的畸零总数,即:

$$星斗分=合终合数\times天斗分 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.66)$$

以上 8 个公式涉及 14 个参数,每星 14 个参数,五星共 70 个参数。以木星为例,计算参数值:木星合终岁数=1255,合终合数=1149。那么,由(5.59)式求得每合岁数:

$$每合岁数=\frac{合终岁数}{合终合数}=\frac{1255}{1149}=1\frac{106}{1149}岁$$

按(5.60)式求木星合月数等参数:

合月分=合终岁数×章月=1255×235=294925

合月法=合终合数×章岁=1149×19=21831

$$\frac{合月分}{合月法}=\frac{294925}{21831}=13\frac{11122}{21831}$$

其中,13 叫做"木星合月数",11122 叫做"月余"。

按(5.61)式求木星日度法:

日度法=合终合数×纪法=1149×1813=2117607

由(5.62)式求木星朔大、小余:

$$\frac{\text{合月数}\times\text{通数}}{\text{日法}}=\frac{13\times134630}{4559}=383\frac{4093}{4559}$$

得数的整数部分除去 6 甲子(360 日),余 23 为朔大余,4093 为朔小余。

由(5.63)式求木星入合月日数:

$$\frac{\text{月余}\times\text{通数}+\text{朔小余}\times\text{合月法}}{\text{合月法}\times\text{日法}}=\frac{11122\times134630+4093\times21831}{21831\times4559}$$

$$=\frac{1586709143}{99527529}=15\frac{1995664}{2117607}$$

15 为入月日,1995664 为日余(《晋书·律历志》误为月余),2117607 是日度法,等于$\frac{\text{合月法}\times\text{日法}}{\text{通法}}$。把合月法化为合数乘章岁,日法化为 97×通法,与分母约简,上式与(5.61)中的日度法表达式(合数×纪法)是相同的。

按(5.64)式求木星朔虚分:

朔虚分＝日法－朔小余＝4559－4093＝466

按(5.65)式求木星每合运行星度(行星度):

$$\frac{\text{周天}(\text{合终岁数}-n\cdot\text{合终合数})}{\text{纪法}\times\text{合终合数}}=\frac{673150(1255-n\cdot1149)}{1843\times1149}$$

由 $0\leqslant\frac{\text{合终岁数}}{\text{合终合数}}-n<1$,取 $n=1$,代入上式:

$$=\frac{673150\times106}{2117607}=\frac{71353900}{2117607}=33\frac{1472869}{2117607}$$

33 为行星度,1472869 为度余。

由(5.66)式求星斗分:

星斗分＝合终合数×天斗分＝1149×455＝522795

(2)五星参数表。

火、土、金、水四星参数可以仿以上木星算法算得,与木星参数一起合列下表:

表 5.8　景初历五星参数表

	木	火	土	金	水
合终岁数	1255	5105	3943	1907	1870
合终合数	1149	2388	3809	2385	11789
合月法	21831	45372	72371	45315	223991
日度法	2117607	4401084	7019987	4395559	21727127
合月数	13	26	12	9	1
月余	11122	20003	58153	40310	215459
朔大余	23	47	54	25	29
朔小余	4093	3627	1674	3535	2419
入月日	15	13	24	27	28
日余	1995664	3585230	675364	194990	20344261
朔虚分	466	932	2885	1024	2140
斗分	522795	1086540	1733095	1085175	5363995
行星度	33	50	12	292	57
度余	1472869	1412150	5962256	194990	20344361①

2. 五星推算法

(1)推算距所求年最近一次星合的年份。

先求上元以来到所求年之间(积年)星合总数(积合)：

$$\frac{积年\times合终合数}{合终岁数}=积合\frac{合余}{合终岁数} \quad\cdots\cdots(5.67)$$

其中积年是自上元壬辰年以来到所求年之间年数，包括所求年在内。变换(5.67)式：

$$积年\times合终合数=积合\times合终岁数+合余$$

$$积年=积合\times\frac{合终岁数}{合终合数}+\frac{合余}{合终合数} \quad\cdots\cdots(5.68)$$

(5.68)式右端第一项($积合\times\frac{合终岁数}{合终合数}$)为积合对应的年数，第二项为末合(即距所求年最近一合)以后的年数。由於积年包括所求年在内，显然，若第二项 $0<\frac{合余}{合终合数}\leqslant1$，或者说，合余－合终合数$\leqslant0$(即合余$\leqslant$

① 水星度余的正确数字是 20344261，原文误。

合终合数），末合在所求年。

若 $1<\frac{合余}{合终合数}\leqslant 2$，或者说 0<合余－合终合数≤合终合数（合终合数<合余≤2×合终合数），末合在所求年前 1 年，《律历志》说是“星合往年”。

若 $2<\frac{合余}{合终合数}\leqslant 3$，或合终合数<合余－合终合数≤2×合终合数，末合在所求年前 2 年，《律历志》说是在“前往年”。余可类推。

分 1 周天（岁）为“合终合数”度，当合余>合终合数时，“合终合数－（合余－n·合终合数）”为末合所在天度分。n 为自然数，且使 0≤合余－n·合终合数<合终合数。

上述“合余－合终合数≤n×合终合数”，《律历志》叙述为“以合终合数减合余，得（n）者”，得 n，如得一、得二等，其实是指“得一个合终合数”、“二个合终合数”等，是古今数学语言不同产生的差异。

又说对金、水二星，积合是偶数，末合为晨合，奇数为夕合，与四分历、乾象历相同，不另释。

（2）推星合所在月。

先求积月，（5.68）式已求得星每合月数为：月数$\frac{月余}{合月法}$（这三个参数查表 5.8 可得），（5.67）式又求得积合数，那么：

$$积合\times 月数\frac{月余}{合月法}=积合\times 月数+\frac{积合\times 月余}{合月法}$$

$$=积月\frac{积月余^{①}}{合月法} \cdots\cdots (5.69)$$

从积月中减去每纪月数（纪月），剩余不足 1 纪月数的部分（小于纪月的部分）就是入纪月，即：

$$积月-m\cdot 纪月=入纪月 \cdots\cdots (5.70)$$

其中，m 是自然数或零，且满足使 0≤入纪月<纪月。

照例，从入纪月中除去闰月数，再除以岁中，（平年月数），剩余的不

① 积月余，在《律历志》中名为“月余”，为了与（5.69）式中表示每合月数的“月余”相区别，此处记为“积月余”。

足 12 的部分，算外就是末合所在月。

闰月求法：章月：章闰＝入纪月：闰月数

$$闰月数=\frac{入纪月\times章闰}{章月} \cdots\cdots (5.71)$$

$$\frac{入纪月-闰月数}{岁中}=n\cdot\frac{入岁月}{岁中} \cdots\cdots (5.72)$$

其中 n 是自然数，且满足使 $0\leqslant入岁月<岁中$。数从天正月起，入岁月算外，就是末合所在月。若末合在闰月，便不能再说是算外，如入岁月为 P，末合为闰 P 月。究竟是否闰月，应用常规法判定，即检查中气所在，若该月朔前 1 日为中气所在日，本月无中气，是闰月，否则无闰。《律历志》说是："其在闰交际，以朔御之。"

(3)推末合所在月的月朔日名。

基本思路是由入纪月求积日，积日算外就是所求月朔日名。

$$\frac{入纪月\times通数}{日法}=积日\frac{小余}{日法} \cdots\cdots (5.73)$$

$$积日-60\cdot n=大余 \cdots\cdots (5.74)$$

其中 n 为自然数，且使大余<60。由所入纪的纪首日名数起，从甲子日表中查得大余算外就是末合所在月的月朔日名。

(4)推末合入月日序数及日名。

由积月求月朔，由积月余及朔小余求入月日序数及日名。

$$\frac{积月余}{合月法}\times\frac{通数}{日法}+\frac{小余}{日法}=\frac{积月余\times通数+小余\times合月法}{合月法\times日法}$$

$$=\frac{(积月余\times通数+小余\times合月法)/通法}{日度法}=入月日\frac{日余}{日度法}$$

$$\cdots\cdots (5.75)$$

其中"入月日"就是所求入月日序数，自月朔甲子起算，算外为星合日的日名。

(5)推星末合所在天度数。

前文说到，末合所在度分与周天(岁)的关系是：$\frac{度分}{合终合数}$岁〔其中度分＝合终合数－(合余－n・合终合数)〕。把它化为周天度：

$$\frac{度分}{合终合数}\times\frac{周天}{纪法}=\frac{度分\times周天}{日度法}=度\frac{余}{日度法} \cdots\cdots (5.76)$$

与乾象历相同，度自牛前5度数起，数至不足某宿度，为末合入该宿度数。

(6)推末合之后，再合所在月。

本节2(2)已求出末合所在月(入岁月)和积月余，又知星每合所需月数和月余，二者相加就能求得星再合所在月。

$$
(\text{月数}+\text{入岁月})+(\frac{\text{积月余}}{\text{合月法}}+\frac{\text{月余}}{\text{合月法}})
$$

$$
=(\text{月数}+\text{入岁月})+\frac{\text{积月余}+\text{月余}}{\text{合月法}} \quad \cdots\cdots (5.77)
$$

其中月数和$\frac{\text{月余}}{\text{合月法}}$求法见前(5.60)式，$\frac{\text{积月余}}{\text{合月法}}$求法见前(5.69)式，入岁月求法见前(5.72)式。若积月余＋月余＞合月法，化为代分数，整数部分入于(月数＋入岁月)；若(月数＋入岁月)＜岁中，再合与末合在同一年，(月数＋入岁月)算外，就是星再合所在月的月序数，＞岁中，再合在末合的下一年。减去岁中，余数算外为再合月序数。当然也要首先确定中间有无闰月，方法与前同。

对金、水二星，末合在晨，再合在夕；末合在夕，再合在晨。就是《律历志》说的“加晨得夕，加夕得晨也”。

(7)推算星合月朔日名。

由末合所在月的月朔大、小余〔求法已见前(5.73)、(5.74)两式〕加星每合入月日数及日余(见表5.3)，得到星再合(《律历志》称为“后合”)朔日的大余和小余。

$$
(\text{末合朔大余}+\text{每合朔大余})+\frac{\text{末合朔小余}+\text{每合小余}}{\text{日法}}
$$

$$
=\text{后合朔大余}\frac{\text{后合小余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (5.78)
$$

当末合入月日及余加每合入月日及余大于1个朔望月时，右端加29$\frac{2419}{\text{日法}}$日，即：后合朔大余＋29＝大余

后合小余＋2419＝小余

或者表示为：

$$
(\text{末合朔大余}+\text{每合朔大余}+29)+\frac{\text{末合朔小余}+\text{每合小余}+2419}{\text{日法}}
$$

$$=后合朔大余\frac{再合小余}{日法} \cdots\cdots (5.79)$$

同样，(5.78)、(5.79)式左端分数若分子大于分母，化为代分后，整数部分入大余。再合朔大余算外(从所入纪首日名数起)为再合月朔日名。

(8)推算再合在所在月中的日序数及日名。

乾象历中的(4.81)式对景初历仍然适用：

$$后合入月日及余=末合入月日、日余+每合入月日及余$$

$$=(末合入月日+每合入月日)+\frac{末合入月日余+每合入月日余}{日法}$$

$$\cdots\cdots (5.80)$$

其中"末合入月日余＋每合入月日余"大于日度法，化为整日入前项。当末合朔小余〔求法见(5.73)式〕大于虚分时，(5.80)式右端减去 1 日。当(5.80)式左端余日数大于 2419，从后合入月日数中除去 29 日；小于 2419，则除去 30 日。理由与乾象历"求后合入月日"中的解释相同。当末合朔小余大于虚分时与下月朔小余的和大于日法，末合后诸月先大后小，比先小后大多减 1 日。因每月有日余 2419 分，后合日余若小于此数，表明已从中除去日法分，化为整日了，因此应从中减去 30 日，否则又减 29 日。

3. 五星历步法

(1)木星。

北 ↑ → 东

☼日 ○星

		日行	星行	日星积距	
晨与日合而伏				0	
	顺行 16 日 997832 分 行度 2 度 1795238 分	16 度 997832 分	2 度 1795238 分	13 度 1320201 分	○☼
晨见东方(在日后)	顺疾 $\frac{11}{57}$度/日 57 日 行度 11 度	57 度	11 度	59 度 1320301 分	
	顺迟 $\frac{9}{57}$度/日 57 日 行度 9 度	57 度	9 度	107 度 1320201 分	
	留 27 日	27 度		134 度 1320201 分	○☼
	逆行 $\frac{1}{7}$度/日 84 日 行度 −12 度	84 度	−12 度	230 度 1320201 分	☼○
	留 27 日	27 度		257 度 1320201 分	
	顺迟 $\frac{9}{57}$度/日 57 日 行度 9 度	57 度	9 度	305 度 1320201 分	
	顺疾 $\frac{11}{57}$度/日 57 日 行度 11 度	57 度	11 度	351 度 1320201 分	
夕伏西方(在日前)	顺行 16 日 997832 分 行度 2 度 1795238 分	16 度 997832 分	2 度 1795238 分	365 度 522795 分	○ ☼
	星行 398 日 1995664 分 行度 33 度 1472869 分				

由上右表可知,自晨时日星合而伏,由于星行迟、日行速,星在日后(日星东行,以东为前,西为后)。且渐行相去渐远。逆行时,日星积距达到二象限(182°余)后,日星积距虽仍逐渐增加,日星间距反而逐渐缩小,仿佛是星在日前,日从后渐渐追赶星一样。直到日追及星,日星再合,日星积距 365°522795′恰 1 周天〔1°=2117607′(日度法)〕。

(2)火星。

北→东

					日行	星行	日星积距	
晨与日合而伏								☼ ○
	顺行		72日 1792615分	行星56度 1249345分	72度 1792615分	56度 1249345分	16度 543270分	○☼
晨见东方 (在日后)	顺	$\frac{14}{23}$度/日	184日	行星112度	184度	112度	88度 543270分	
	顺迟	$\frac{12}{23}$度/日	92日	行48度	92度	48度	132度 543270分	
	留		11日		11度	0度	143度 543270分	○☼
	逆行	$\frac{17}{62}$度/日	62日	行−17度	62度	−17度	222度 543270分	☼○
	留		11日		11度	0度	233度 543270分	
	顺迟	$\frac{12}{23}$度/日	92日	行48度	92度	48度	277度 543270分	
	顺疾	$\frac{14}{23}$度/日	184日	行112度	184度	112度	349度 543270分	
夕伏西方 (在日前)	顺行		72日 1792615分	行星56度 1249345分	72度 1792615分	56度 1249345分	365度 1086540分	○ ☼
		历时	780日 3585230分	行度415度 2498690分				

(3)土星。

北→东

					日行	星行	日星积距	
晨与日合而伏							0	☼ ○
	顺行		19日 3847675分半	行星2度 6491121分5	19度 3847675分5	2度 6491121分5	16度 4376541分	○☼
晨见东方 (在日后)	顺	$\frac{13}{172}$度/日	86日	行6.5度	86度	6.5度	95.5度 4376541分	
	留		32.5日		32.5度	0度	128度 4376541分	○☼
	逆行	$\frac{1}{17}$度/日	102日	行−6度	102度	−6度	236度 4376541分	☼○
	留		32.5日		32.5度	0度	268.5度 4376541分	
	顺行	$\frac{13}{172}$度/日	86日	行6.5度	86度	6.5度	348度 4376541分	
夕伏西方 (在日前)	顺		19日 3847675分半	行星2度 6491121分5	19度 3847675分5	2度 6491121分5	365度 1733095分	○ ☼
		历时	378日 675364分	行度12度 5962256分				

(4)金星。

				日行	星行	日星积距	北／东
晨与日合而伏						0	☼ ○
晨见东方（在日后）	逆行6日		行星－4度	6度	－4度	10度	○☼
	逆迟$\frac{3}{5}$度/日	10日	行星－6度	10度	－6度	26度	
	留	7日		7度	0度	33度	
	顺迟$\frac{33}{45}$度/日	45日	行星33度	45度	33度	45度	○☼
	顺疾$1\frac{14}{91}$度/日	91日	行105度	91度	105度	31度	
	益疾$1\frac{21}{91}$度/日	91日	行112度	91度	112度	10度	
晨伏东方（在日后）	顺行42日194990分		行星52度194990分	42度194990分	52度194990分	0度	☼ ○
	一合历时292日194990分		行星292度194990分				

				日行	星行	日星积距	
夕与日合而伏						0	
	顺42日194990分		行星52度194990分	42度194990分	52度194990分	10度	☼○
夕见西方（在日前）	顺疾$1\frac{21}{91}$度/日	91日	行112度	91度	112度	31度	
	顺迟$1\frac{14}{91}$度/日	91日	行105度	91度	105度	45度	☼○
	益迟$\frac{33}{45}$度/日	45日	行33度	45度	33度	33度	
	留	7日		7度	0度	26度	
	逆行$\frac{3}{5}$度/日	10日	行－6度	10度	－6度	10度	
夕伏西方（在日前）	逆	6日	行－4度	6度	－4度	0度	☼ ○
	再合历时292日194990分		行度292度194990分				

金星晨夕各1合，历时凡584日389980分，行星584度389980分（1度＝4395555分）。

(5)水星。

				日行	星行	日星积距	北↑ 东→
晨与日合而伏						0	☼ ○
	逆	11日	行星 −7度	11度	−7度	18度	○☼
晨见东方（在日后）	逆疾	1日	−1度	1度	−1度	20度	
	留	1日		1度	0度	21度	
	顺迟 $\frac{7}{8}$度/日	8日	行度 7度	8度	7度	22度	○☼
	顺疾 $1\frac{4}{18}$度/日	18日	行度 22度	18度	22度	18度	
晨伏东方（在日后）	顺	18日 20344261分	行星 36度 20344261分	18度 2034426分	36度 2034426分	0度	☼ ○
	历时	57日 20344261分	行度 57度 20344261分				

				日行	星行	日星积距	
夕与日合而伏						0	
	顺	18日 20344261分	行星 36度 20344261分	18度 20344261分	36度 20344261分	18度	☼○
夕见西方（在日前）	顺疾 $1\frac{4}{18}$度/日	18日	行度 22度	18度	22度	22度	☼○
	顺迟 $\frac{7}{8}$度/日	8日	行 7度	8度	7度	21度	
	留	1日		1度	0度	20度	
	逆行	1日	行−1度	1度	−1度	18度	
夕伏西方（在日前）	逆	11日	行−7度	11度	−7度	0度	○ ☼
	历时	57日 20344261分	行度 57度 20344261分				

水星晨夕1伏见各57日20344261分，总115日18961395分，行星115度18961395分(1度＝21727127分)。

《律历志》给出的五星推步的公式与乾象历完全相同〔参见第四章(4.82)～(4.85)式等〕，不赘。

第六章 《晋书·律历志》涉及的其他历法

除乾象历、景初历之外,《晋书·律历志》还提到晋武帝时侍中刘智改造四分历得到的正历,当阳侯杜预为验证《春秋》经传所载历日制定的春秋长历,咸宁年间(275～279年)布衣李修、卜显编制的乾度历,东晋穆帝永和八年(352年)著作郎王朔之造通历,后秦、姚兴时天水人姜岌造三纪甲子元历五种,详略不同。兹据志所言,稍疏通之。

一、刘智的正历

《律历志》所说有二:其一"以斗历改宪,推四分法,三百年而减一日,以百五十为度法,三十七为斗分"。

意思是,按照"三百年则斗历改宪"的传说,改造四分历,使300年减少1日。方法是取回归年日数为 $365\frac{37}{150}$,与四分历相比,300年恰减1日:$(365\frac{1}{4}-365\frac{37}{150})\times 300=1$ 日。

以前所述几种历法的斗分值列表6.1。今知回归年是个变量,表中的"今测值"是个习惯采用的平均数。而且,明清时人已知回归年"古大今小",所以并不能用今测值作为古历回归年的标准数。但是,古历半分偏大是事实,用今测值作为衡量对比的参考数仍是合适的。从表中可见,正历并不高明,它充其量不过是对四分历作了些修正。

表6.1 斗分表

历名	斗分
三统历	$\frac{385}{1539}\doteq 0.25016$
四分历	$\frac{1}{4}=0.25$
乾象历	$\frac{145}{589}\doteq 0.24617$
景初历	$\frac{455}{1843}\doteq 0.24688$
正　历	$\frac{37}{150}\doteq 0.24666$
今测值	$\doteq 0.24219$

其二，是“推甲子为上元，至泰始十年，岁在甲午，九万七千四百一十一岁。上元天正甲子朔夜半冬至，日月五星始于星纪，得元首之端”。意思是说正历以泰始十年之前97411年的1个甲子年为计算历法的开端，认为此年天正月朔恰在夜半，也是冬至点，此时，日、月、五星同处于星纪。自三统历以下，都采用日、月与五星的共同始点上元，而且，四分历认为上元时，日、月、五星同处于星纪中的斗21 $\frac{1}{4}$度，乾象历和景初历则认为同处于牛前5度。

二、杜预的春秋长历

取用参数是“日行一度，月行十三度十九分之七有奇”，大要是19年设7个闰月，用无中置闰法。但“有奇”二字表示并不完全如此，设闰可能比十九年七闰法灵活得多。因为他奉行的信条是“曲循经传月日、日蚀以考晦朔，以推时验”，不“守恒数”。也就是说，长历只是一个大致尺度，计算时要根据经传所记月日名及日蚀情况，增损历数。杜预长历的方法极有可能反映了春秋治历的实际情形。近代以来，许多学者据春秋经传的记载用近代天文学知识研究春秋历法，以为春秋无固定历法，这是错误的。春秋时的历法大约像杜预长历一样，有确定的计算法，同时又据实际观测纠正之。

三、李修、卜显的乾度历

乾度历是依杜预理论制定的，与长历相仿佛。“其术合日行四分数，而微增月行。用三百岁改宪之意，二元相推，七十余岁承以强弱。”意思是说，日行按四分法，周天取为365 $\frac{1}{4}$度，日每天行1度；月亮的运行不是像四分历那样，取每天行13 $\frac{7}{19}$度，而是“微增”其数，使得每七十余年日月行度差比四分历增加一个“强弱”数，数目虽小，但已符合“三百年斗历改宪”的说法。

表面看来，乾度历与杜预长历的区别是，长历增损历日不依历理，只由经传记载为准，乾度历则是通过增加月行速度的方法实现的。但这样一来产生一个问题，日行速度既定，若用十九年七闰法，月行速度也是固定的。乾度历“微增月行”速度，必然导致闰法的改变。而改变闰法这样的大事，史书岂能不载?反过来讲，史书既不言乾度历闰法有变化，大约它采用的仍是十九年七闰法。那么，增加月速的事在乾度历中并没得到全面反映。即是说，乾度历也不是严格依照历理、公式推算的，像长历一样带有随意性：有时用增大了的月速值计算，有时又把增大的部分有意识加以忽略。

四、王朔之的通历

通历也是以甲子为上元，上元以来积九万七千年，表示它的上元比刘智正历上元晚了 7 个甲子约四百余年。又通历纪法用 4883 年，斗分用 1205，即它采用的回归年周期是 $365\frac{1205}{4883}$日≈365.24677 日。由十九年七闰法可以推出通历的朔望月周期是 $29\frac{6409}{12079}$日。有了这三个参数，其他参数可以一一推出，比如：纪法 4883，纪月 60395，章岁 19，章月 235，章闰 7，通数 356700，日法 12079，余数 25440，周天 1783500，气法 12，没分 29725，没法 427，月周 65278，通法 257。

与景初历相比，除了日食周期及五星参数之外，其余的几乎是全部参数都有了。由此可以推断，通历除增减斗分之外，别无建树。

五、姜岌的三纪甲子元历

也是以甲子年为上元，距晋孝武帝太元九年(384 年)甲申 83841 年(包括太元九年在内)。此外，《律历志》列出了姜岌历法使用的 43 个参数(五星参数未列)，懂得这些参数的意义，它的计算法也就大致明了了。

这 43 个参数是由 4 个基本参数推出的，它们是回归年、朔望月、交

蚀周期和近点月。

姜岌历的回归年取 $365\frac{605}{2451}$日，$365\frac{605}{2451}=\frac{895220}{2451}$，其中 895220 为周天，2451 为纪法，605 为斗分。显然，每纪 2451 年，所含日数为整数，每隔 3 纪 7353 年所含日数是 60 的公倍数，因而日名重复出现，所以每 7353 年叫做 1 元，7353 为元法，1 元＝3 纪。

又从 1 个回归年天数中除去 6 甲子 360 日，余 $5\frac{605}{2451}$日为没数，每 1 没所含日数为 $365\frac{605}{2451}\div 5\frac{605}{2451}=\frac{44761}{643}=69\frac{394}{643}$日。其中 44761 为没分，643 为没法。

每个回归年又分作 24 个节气，平均分入 12 月之中，月初为节，节后为中，这样每年有 12 个"节"气 12 个"中"气。后者为气中，即气中等于 12，而每个节气的天数：$365\frac{605}{2451}\div 24=15\frac{12860}{58824}$日，其中 12860 叫做气分。

姜岌历的朔望月采用 $29\frac{3217}{6063}$天，$29\frac{3217}{6063}=\frac{179044}{6063}$天。其中 179044 为通数，6063 为日法①。

每个回归年所含月数：$365\frac{605}{2451}\div 29\frac{3217}{6063}=\frac{235}{19}=12\frac{7}{19}$。平年设 12 个月，其余$\frac{7}{19}$月置为闰月，每 19 年合为 7 个闰月。因此把 12 名为岁中，19 年名为章岁，7 为章闰。1 个章岁(19 年)所含月数：$12\frac{7}{19}\times 19=235$，叫做章月。同样可以算得，1 纪(2451 年)所含月数 $12\frac{7}{19}\times 2451=30315$ 叫做纪月，1 元(7353 年)所含月数 90945 叫做元月。而 1 纪所含章数($\frac{2451}{19}=129$)129 叫做章数。

---

① 《晋书·律历志下》6063 作 6062，误。

每年有 $12\frac{7}{19}$ 个朔望月，若日不动，月绕地（或行天）应是 $12\frac{7}{19}$ 周，但其间日自行天 1 周，每年月实际运行了（$12\frac{7}{19}+1$）周，$12\frac{7}{19}+1=13\frac{7}{19}=\frac{254}{19}$ 周，其中 254 为小周，半小周（127）名周半。1 纪之年月行天 $\frac{254}{19}\times 2451=32766$ 周，32766 名为月周。

姜岌历采用的交蚀周期是 $5\frac{1635}{1882}$ 月/蚀。$5\frac{1635}{1882}=\frac{11045}{1882}$，其中 11045 名为会月，1882 为会率。会率的一半 941 名为朔望合数。会月折合为 893 岁（$11045\div 12\frac{7}{19}=893$），因称 893 为会岁。893 年合 47 章，47 为会数，亦 1 会所含章数。会月－朔望合数＝11045－941＝10104，10104 为入交限。

求交会对应的周天分：在会月（11045）的时间内发生会合数等于会率（1882），会与合各半，若只计合数为朔望合数（941）次。会合 1 度为 1 周天，每合只有半周天。若求每月的朔望合数对应的周天分，可列如下比例式：

$$每1合:半周天=\frac{朔望合数}{会月}:x$$

$$x=半周天\times\frac{朔望合数}{会月}=447610\times\frac{941}{11045}=38134\frac{2196}{2209}$$

其中，半周天＝447610，名为历周；得数中的整数部分（38134）名为会分；余数（2196）名为小分；不分的分母（2209）名为小分法。

姜岌历采用的第四个基本参数是，近点月 $27\frac{3362}{6063}=\frac{167063}{6063}$ 日。其中 167063 名为通周，3362 名为周日日余，日法与周日日余相减：日法－周日日余＝6063－3362＝2701。2701 名为周虚。

把朔望月和近点月相比较，可得如下参数：通数－通周＝179044－167063＝11981[①]，名为差分。假若用第五章景初历求交会纪差的公式

① 《晋书·律历志下》为 11986，误。

计算朔望月与近点月的纪差〔景初历名为迟疾纪差，姜岌历名为差率。景初历法参见表5.2及(5.2)式〕：

$$差率=纪月\times通数-n\cdot通周 \quad \cdots\cdots (6.1)$$

命 $n=32489$：

$$差率=30315\times179044-n\cdot167063$$
$$=9053$$

差率是1纪之中的朔望月积分与近点月积分之差，各纪差率：第一纪（甲子纪）差率照例由实测而得，为49178，以后每隔1纪增9053分。如甲申纪差率是：甲子纪差率加9053，等于58231；甲辰纪差率是：甲申纪差率加9053，等于67284。

交会纪差的算法是采用景初历计算迟疾纪差的公式，此外还把会数换成了朔望合数：

$$交会纪差=会月-(纪月\times朔望合数-n\cdot会月) \quad \cdots\cdots (6.2)$$

取 $n=2582$：

$$交会纪差=11045-(30315\times941-n\cdot11045)$$
$$=11045-(28526415-28518190)$$
$$=11045-8225$$
$$=2820$$

第一纪的交会差（简称交差，下同）测的是甲子纪交差9157。递减2820得：甲申纪交差6337，甲辰纪交差3517。

(6.1)、(6.2)式是姜岌对景初历求差率方法的改进，或者说是他的发明。

第七章　古历变革期的开端——何承天的元嘉历

中国历法沿革大致可以分作三个阶段，杨伟景初历以前属于古历系统，朔望月、岁实、节气、闰月的计算都是用平均数算出的，年、月、节气等只是近似值，差前错后一二日事属寻常。此后，历法有一系列大的变动，如闰法的改变、定朔的采用、岁差的发现等，使历法精度提高了，从此进入旧历阶段，直到明末崇祯历产生之前。旧历阶段的开端是从何承天《元嘉历》开始的。

元嘉历涉及的新法有以下数端：第一，姜岌曾以月蚀时月亮所在星度推算太阳位置，元嘉历采用了这种推算方法。第二，通过大规模的测量，确定冬至点位置在斗 17 度，比景初历采用的斗 21 度减少了约 4 度，冬至日提前了 3 日 5 时。第三，以建寅月（一月）为岁首，以一月中气雨水为初气，打破了以往岁首建子的惯例。第四，采用定朔法。第五，先是北凉采用赵歐元始历，已打破了十九年七闰的旧规，采用六百年二百二十一闰的闰月周期。何承天以为改变闰月，使算法变繁，应“随时迁革，以取其合”，仍用十九年七闰法。以上五条，最重要的是四、五两条，一得一失。采用定朔是一大成就，但由于当时的太史令钱乐之等人的反对，没有实行；第五条，恢复十九年七闰法是何承天的失误。无论得或者失，都反映出这时期历法理论变动的激烈、频繁。

元嘉历于刘宋元嘉二十二年（445 年）施行，算法载于《宋书·律历下》。

一、采用参数

1. 上元

元嘉历以庚辰年为上元，到殷商太甲元年（前 1737 年）[1] 癸亥积 3523 年，距刘宋元嘉二十年（443 年）癸未积 5703 年。积年不包括癸亥、癸未年在内。

2. 月朔系

元嘉历以朔策为 $29\frac{399}{752}$日。

$29\frac{399}{752}=\frac{22207}{752}=\frac{22207}{16\times 47}$。

其中：(1)22207 为通数。

(2)752 为日法。

(3)日法的通分因子 47 为通法。

3. 岁实系

元嘉历以岁实为 $365\frac{75}{304}$日。

$365\frac{75}{304}=\frac{111035}{304}=\frac{235}{19}\times\frac{22207}{752}$。

其中：(4)111035 为周天。

(5)304 为度法。

(6)75 为度分。

(7)19 为章岁。

(8)235 为章月。

(9)闰月数可由(7)、(8)两项推得，$235-19\times 12=7$，7 为章闰。

(10)岁实去 6 甲子 360 日，余 $5\frac{75}{304}=\frac{1595}{304}$，是为 1 岁没数，

---

[1] 对殷商系年的推断最为纷纭歧异，宋邵雍《皇极经世书》推太甲元年为公元前 1753 年戊申，元嘉历所推当是公元前 1737 年癸亥。

其中 1595 为余数。

(11)每没日数$=365\frac{75}{304}\div 5\frac{75}{304}=\frac{111035}{1595}=\frac{22207}{319}$

$=69\frac{196}{319}$日,其中 319 为没法。

(12)196 为没余。

(13)由岁实 $365\frac{75}{304}=\frac{111035}{304}$,每 304 年(16 章)111035 日,年、月、日齐同。取 111035 与 60 的公倍数,得 111035×12 天$=304\times 12$ 年$=3648$ 年,即每 3648 年日名一复,称为一元,3648 为元法。

(14)1 元定为 6 纪,1 纪$=\frac{3648}{6}=608$ 年,608 为纪法。

(15)纪法$\times\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}=608\times\frac{235}{19}=7520$ 月,7520 名为纪月。

(16)纪月$\times\frac{\text{通数}}{\text{日法}}=222070$ 日名为纪日。

(17)每年二十四气,节气、中气各十二,二十四为气法。

(18)十二为岁中。

4. 近点月系

元嘉历取近点月为 $27\frac{417}{752}$日,$27\frac{417}{752}=\frac{20721}{752}$。

其中:(19)20721 为通周。

(20)417 为周日日余。

(21)日法$-$周日日余$=752-417=335$,335 名为周虚。

月亮 19 年行天 254 周,半纪(304 年)行天:$\frac{254}{19}\times 304=4064$ 周。其中:

(22)4064 名为月周。

5. 交会周期系

元嘉历所取交会周期为 $5\frac{139}{160}$月$=\frac{939}{160}$。其中:

(23)160 为会数。

(24)939 为会月。

(25)$\frac{会数}{2}$=80,80 为朔望合数。

(26)会月－朔望合数=939－80=859,859 名为交限数。

6. 差率

按照姜岌《三纪甲子元历》,求迟疾纪差和交会纪差的公式(6.1)、(6.2)先求纪差:

迟疾纪差=纪月×通数－n·通周

=7520×22207－n·20721

取 n=8059: =166996640－166990539

=6101

1 元=6 纪,照例第一纪(甲子纪)的迟疾差由实测而得,以后每纪递增 6101,满通周(20721)则除去之。

同样算得交会纪差=598[①],实测甲子纪交会差为 877,此后每纪递减 598,不足减则破会月 939 增入之。

各纪迟疾差和交会差列如下表

表 7.1 纪差表

纪名 数值 差名	甲子纪	甲戌纪	甲申纪	甲午纪	甲辰纪	甲寅纪
迟疾差	17663	3043	9144	15245	625	6726
交会差	877	279	620	22	363	704

二、推算法

1. 推气朔术

(1)推入纪法。

$$\frac{上元以来到所求年积年}{元法}=元数\cdot\frac{元余}{元法} \quad\cdots\cdots(7.1)$$

① (6.2)式用会数的一半:朔望合数,元嘉历用会数,这是二者的区别。

$$\frac{元余}{纪法}=纪数\frac{入纪年}{纪法} \quad\cdots\cdots (7.2)$$

纪数算外为所入纪，入纪年算外为所求年。

(2)推积月术。

$$入纪年\times\frac{章月}{章岁}=积月\frac{闰余}{章岁} \quad\cdots\cdots (7.3)$$

照例，闰余 12 以上，所求年有闰月。

(3)推所求年正月朔日名。

$$积月\times\frac{通数}{日法}=积日\frac{小余}{日法} \quad\cdots\cdots (7.4)$$

$$\frac{积日}{60}=甲子周数\frac{大余}{60} \quad\cdots\cdots (7.5)$$

自所入纪的纪首日名起算，大余算外就是所求年正月朔日名[①]。

(4)推其余各月朔日名。

$$大余\frac{小余}{日法}+29\frac{399}{752}=(大余+29)\frac{小余+399}{日法} \quad\cdots\cdots (7.6)$$

即大余加 29 日得次月大余(满 60 则除去之)，小余加 399 为次月小余，次月小余满 9 法化为整日入大余。头月小余满 353 以上，次月为大月，否则为小月。

(5)推弦、望日名法。

由于$\frac{1}{4}\times$朔望月$=7\frac{287\frac{3}{4}}{752}$日，所以：

$$月朔大余+7=上弦大余 \quad\cdots\cdots (7.7)$$

$$月朔小余+287\frac{3}{4}=上弦小余 \quad\cdots\cdots (7.8)$$

上弦小余满日法(752)入上弦大余。自月朔日名起算，上弦大余算外为上弦日名。同样：

$$上弦大余+7=望日大余 \quad\cdots\cdots (7.9)$$

$$上弦小余+287\frac{3}{4}=望日小余 \quad\cdots\cdots (7.10)$$

$$望日大余+7=下弦大余 \quad\cdots\cdots (7.11)$$

---

① 元嘉历以正月为岁首，与其他历法以天正月为岁首不同。

$$望日小余+287\frac{3}{4}=下弦小余 \quad\cdots\cdots\cdots (7.12)$$

(6)推二十四气日名术。

由于每气日数：$365\frac{75}{304}\div 24=15\frac{66\frac{11}{24}}{304}$日。求出年首中气(雨水)的日名后，其余各节气的大、小余可由雨水大小递加$15\frac{66\frac{11}{24}}{304}$求得。

雨水日名可由求入纪年积日数求得：

$$入纪年\times\frac{余数}{度法}=积没\frac{小余}{度法} \quad\cdots\cdots\cdots (7.13)$$

$$\frac{积没}{60}=没周\frac{大余}{60} \quad\cdots\cdots\cdots (7.14)$$

积没数值与积日同，或者说就是积日；没周就是积没包含的甲子周数，《律历志》无此名，是笔者为叙述方便临时设定的名称。

照例，从纪首日名起算，大余算外就是所求年雨水日名。

$$大余+15=次气大余 \quad\cdots\cdots\cdots (7.15)$$

$$小余+66\frac{11}{24}=次气小余 \quad\cdots\cdots\cdots (7.16)$$

次气小余满度法(304)入次气大余。(7.16)中的$\frac{11}{24}$,《律历志》称11为小分，小分满24入小余。次气大余积满60则除去之，不满60者，算外(自纪首日名起算)就是次气日名。如此，二十四气日名可一一推知。

《律历志》还给出了由雨水大、小余反推立春日名的方法。立春在雨水前一气，由大、小余减$15\frac{66\frac{11}{24}}{304}$得立春大、小余。即

$$雨水大余-15=立春大余 \quad\cdots\cdots\cdots (7.17)$$

$$雨水小余-66\frac{11}{24}=立春小余 \quad\cdots\cdots\cdots (7.18)$$

雨水小余不够减，破大余1为304入小余。因此，《律历志》提出求立春法的前提条件是，雨水大余满16以上，否则得负数，是古代算法尽可能避免的。

2. 杂推

(1)推闰月法。

$$\frac{(\text{章岁}-\text{闰余})\times\text{岁中}}{\text{章闰}}=\text{闰月序数}\frac{\text{余数}}{\text{章闰}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(7.19)$$

这也是个传统公式,不同的是"闰月序数"是自正月起算,以前的历法则是从天正月(头年十一月)起算。

(2)二十四气限数、间限表。

表 7.2 二十四气限数、间限表

节气名	限数	间限	节气名	限数	间限
立春	194	190	立秋	142	145
雨水	186	182	处暑	149	153
惊蛰	177	172	白露	157③	162
春分	167	162	秋分	167	172
清明	158	154	寒露	177	182
谷雨	149	145	霜降	186	190
立夏	142	139	立冬	194	197
小满	136	134	小雪	200	203
芒种	133①	132	大雪	205	206
夏至	131②	132	冬至	207	206
小暑	133	134	小寒	205	203
大暑	136	139	大寒	200	197

与景初历相比,算法相同,二十四气漏刻不同,景初历、乾象历都袭用四分历漏刻数,元嘉历不用四分历漏刻,表明进行过实际测量,这是它比前代历法的优越处。

(3)推没灭术。

景初历有推没灭三式,元嘉历是一样的。第一式是借用推冬至前积日的公式,对于元嘉历是借用推雨水前积日的公式〔见前(7.13)、(7.14)式〕。此式中把积日称为积没。元嘉历直接利用此式的计算结果"积没",而摒去算式。第二式景初历是利用积日(没)加1,求冬至后第一没日,元嘉历有所不同,是利用积没(日)求雨水前的第一个没日,所

① 夜漏35.2刻,算得限数为132.352,取整数应为132。

② 夜漏35刻,限数为131.6,取整数应为132。

③ 夜漏42刻,限数为157.92,取整数为158。

给公式是：

$$\text{雨水前积没}\times\frac{\text{没余}}{\text{没法}}=\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{没法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.20)$$

由于每没日数 $69\frac{196}{319}$，其中 196 为没余，319 为没法，所以(7.20)式其实是雨水以前积没中所有畸零数之和，用它可否确定雨水以前第一没的位置呢？如图 7.1，B——为入纪年始点，A 为所求年的第一个中气雨水点，其间积没为 n，nA 为不足 1 没的畸零数($\frac{\text{小余}}{\text{度法}}$)。如今要求 n

图 7.1 积没日数图

点日名有两个途径：已知 A 点日名，求出 nA 之间的整日数，自 A 起算，算外就是 n 点日名；已知 B 点日名求出 Bn 之间的整日数，自 B 起算，算外也是 n 点日名。(7.20)式用积没作因子，可知走的是第二个途径。但是(7.20)式算得的是积没中每一没零日之和，不是积没中的整日数，正确的算法应是：

$$n\times\text{每没日数}=\text{积没}\times\frac{\text{通数}}{\text{没法}}=\text{整日}\frac{\text{小余}}{\text{没法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.21)$$

当然还要从“整日”之中除去所有甲子周日数，剩余的不足 1 甲子的日数才是雨水前第一没的大余，即：

$$\frac{\text{整日}}{60}=\text{甲子周数}\frac{\text{大余}}{60}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.22)$$

自所入纪的纪首日名起算，大余算外为 n 点日名。

求次没，即雨水点 A 后的第一没，法与景初历完全相同：

$$\text{大余}\frac{\text{小余}}{\text{没法}}+69\frac{196}{319}=(\text{大余}+69)\frac{\text{小余}+196}{\text{没法}}$$

$$=\text{次没大余}\frac{\text{次没小余}}{\text{没法}}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.23)$$

其中“小余＋196”满“没法”要入大余，剩余不满没法的部分才是“次没小余”；“大余＋69”也要用(7.22)式那种形式，从中除去若干甲子周，剩余不满 1 甲子的日数才是“次没大余”。

重复使用(7.23)式，可以算得所求年雨水后每一没的日名。当算出

某一没的小余为“0”时，该没日称为“灭”日。又由于每年有 354 日（平年），最多不过 384 日（闰月大），除以每没日数 69 $\frac{196}{319}$日，得数都大于 5，小于 6。每年零数累积的结果，就算年初第 1 日为没日，全年没（包括灭）数不过 6 有余。即每年没日（包括灭日）最少 5 个，最多只有 6 个。

《律历志》又说：“雨水小余三十九以还，雨水六旬后乃有（没）。”此是利用雨水小余求雨水后没法，与乾象历的求没法同。由前述（7.13）式，算出了雨水前的积没和小余，只要小余满度法，又得 1 没，便是雨水后没。也可理解为：雨水距前 1 没的长度是$\frac{\text{小余}}{\text{度法}}$（没），距后 1 没的长度是$\frac{\text{度法}-\text{小余}}{\text{度法}}$，后者化为天数是：

$$\frac{\text{度法}-\text{小余}}{\text{度法}}\times\text{每没日数}=\frac{\text{度法}-\text{小余}}{\text{度法}}\times\frac{\text{通数}}{\text{没法}}=\frac{(304-\text{小余})\times 22207}{304\times 319}$$

由题意得不等式：

$$\frac{(304-\text{小余})\times 22207}{304\times 319}\geqslant 60 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7.24)$$

解得：　小余$\leqslant 304-262.01468\doteq 41$

即“小余四十一以还（即小于 41），雨水六旬后有没”。《律历志》说是“三十九以还”，是由于运算过程中小数舍弃太多造成的。如前（7.24）式，按如下步骤计算：

$$\frac{(304-\text{小余})\times 22207}{304\times 319}\geqslant 60$$

$$\frac{22207}{319}-\frac{22207\times\text{小余}}{304\times 319}\geqslant 60$$

第一次舍弃小数，$\frac{22207}{319}\doteq 69.614420\doteq 69$，代入上式，并移项得：

$$\frac{22207\times\text{小余}}{304\times 319}\leqslant 9$$

变幻此不等式：小余$\leqslant\frac{9\times 304\times 319}{22207}\doteq 39.302202$，第二次舍弃小数，就得到：小余$\leqslant 39$。

因此说“三十九以还”，是何承天算术不精造成的。

(4)推土用事法。

1年日数(回归年)分配五行,各得 $365\frac{75}{304}\div5=73\frac{15}{304}$日。木、火、金、水四行自四立(立春、立夏、立秋、立冬)始,各得 $73\frac{15}{304}$日,每季($365\frac{75}{304}\div4=91\frac{94\frac{18}{24}}{304}$日)各余 $18\frac{79\frac{18}{24}}{304}$日,归土所王,合四季土王亦得 $73\frac{15}{304}$日。

由于前面已有推二十四气法,四立大、小余都可求出,各加 $73\frac{15}{304}$便是木、火、金、水四行所主,十分简单。而土分王四季,较为复杂,而且,求出土在各季用事首日名,四行所主不求可知,所以,元嘉历只求"土用事"。

虽然,由于四立后 $73\frac{15}{304}$日为四行所主,四立之前 $18\frac{79\frac{18}{24}}{304}$日为土王用事日,求土用事法便如《律历志》所说:"置立春大小余、小分之数[1],减大余十八,小余七十九,小分十八。"意思是:从立春大余中减去18,小余中减去79,小分中减去18,分别得到立春前的土王用事日大余、小余和小分。从纪首日名起算("命以纪"),算外就是立春前土用事之始的日名。上述运算中若不够减,大余不够,加60(1甲子);小余不够,破整日〔从大余中取出1日,破为度法分(304)加入小余,然后再减〕;小分不够减破小余1为24增入小分而后减。

求立夏、立秋、立冬前土用事日方法相同。

3. 推日、月所在度分

(1)推日所在度分法。

所求年正月朔日夜半,日所在度数就是朔日夜半前的积日数,由于此数大于1周天需除去之,要把积日化为分(乘度法)。从中除去周天分

① "小余"后顿号不可省略(中华书局1987年版省略之),否则易误解为"大小余中的小分之数",其实是大余、小余、小分三数并列。

后，再化为度（除度法），余数为分。即：

$$\frac{\text{朔前积日}\times\text{度法}-n\cdot\text{周天}}{\text{度法}}=\text{积度}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.25)$$

《律历志》说“命度起室二”，即“积度”从室宿 2 度起算。表示元嘉历以为上元雨水在室宿 2 度。前面说过，元嘉历以为各至点在斗 17 度，冬至到雨水为 $60\frac{265\frac{20}{24}}{304}$度（4 气日数之和），从斗 17 度起算，历斗 9 度、牛 8 度、女 12 度、虚 10 度、危 17 度，合 56 度。而后入室宿，过 4 度$\frac{265\frac{20}{24}}{304}$始满 $60\frac{265\frac{20}{24}}{304}$度，即雨水自室 4 度 $265\frac{20}{24}$分始。《律历志》说是自室 2 度起，表示元嘉历已知每气长短不同，冬至到雨水之间的四气日数比平均日数少 2 度余。这是元嘉历的长处。

（7.25）式所得为正月朔夜半时的日所在宿度，求次日夜半日宿度时，由于日行 1 度，加 1 即得。《律历志》又说“经室去度分”。意思是说每周天 365 度余，余分在室宿，其余诸宿都是整度。所以，日过室宿时不要忘给除去此余分。以往的历法都是把余分放在斗宿之后，经斗宿时才有“去度分”的问题。

（2）推月所在度分法。

也是先推所求年正月朔夜半里月所在度。与景初历一样〔参见第五章（5.24）式〕，把（7.25）式“朔前积日”乘以$\frac{254}{19}$即得：

$$\frac{\text{朔前积日}\times\frac{254}{19}\times\text{度法}-n\cdot\text{周天}}{\text{度法}}=\text{月积度}\frac{\text{分}}{\text{度法}}$$

左端分式的分子中：$\frac{254}{19}\times\text{度法}=\text{月周}$，代入上式得：

$$\frac{\text{朔前积日}\times\text{月周}-n\cdot\text{周天}}{\text{度法}}=\text{月积度}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.26)$$

求下月朔夜半的月度分时，再加上 1 月的月行度分即可。月有大小，月行度分自不相同。

$$小月行度分=\frac{254}{19}\times 29=387\frac{13}{19}度 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.27)$$

除去 1 周天 $365\dfrac{75}{304}$度得：$22\dfrac{133}{304}$度。

$$大月行度分=\frac{254}{19}\times 30=401\frac{1}{19}度 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.28)$$

除去 1 周天得 $35\dfrac{245}{304}$度。

所以，《律历志》说："求次月，小月加度二十二，分一百三十三；大月加度三十五，分二百四十五。分满度法成一度。"

由"月积度"求月在某宿度数的方法与前相同，是从室宿 2 度数起，并且"经室去度分"。

元嘉历又有"历先月法"，就是把月行迟疾计入历法的方法。由于计入迟疾后的月行积度总是比按平均行度算得的积度大，计入迟疾的历法仿佛比通常月行（按平均速度运行）更快一样，所以说是"历先月法"。方法很简单，把(7.26)式算得的结果加上该月朔日夜半入于迟疾历的数字则可。迟疾数由迟疾表（见表 7.3）查得，单位制是 1 度＝19 分。(7.26)式采用的单位制是 1 度＝304 分，两者相加必先把单位制化同，都用迟疾表的单位制。(7.26)式中分母缩小了 16 倍，分子（分）也应缩小 16 倍，积度数不变。《律历志》说："以十六除月行分为大分，如所入迟疾加之。""月行分"指(7.26)式算得的月行零分数，化为 1 度＝19 分的分以后，由于分值变大，所以名为大分。

4. 推月食

(1)推合朔月食术。

景初历的月蚀三式是〔参见第五章(5.38)～(5.40)式〕：

①天正十一月合朔时的去交度分＝（所求年入纪朔积分＋纪下交会差率）$-m\cdot$会通

②次月合朔去交度分＝头月去交度分＋通数$-m\cdot$会通

③某月望去交度分＝该月合朔去交度分＋朔望合数$-n\cdot$会通

元嘉历也给定了相应的三式：

$$正月朔去交分=所求年前积月\times会数+所入纪交差-n\cdot会月 \quad\cdots\cdots\cdots (7.29)$$

次月朔去交分＝头月去交分＋会数－会月 ………………… (7.30)

月望去交分＝头月去交分＋朔望合数 …………………… (7.31)

①和(7.29)式相比，右端第一项：所求年入纪朔积分＝所求年前积月×通数。(7.29)式中把通数换成了会数，其余名称虽异，其实相同。为什么要把通数换成会数呢？这与两式中去交分的含义不同有关。景初历的交分是朔积分与会通之差，所以要乘通数〔参见第五章中的(5.1)式〕，而元嘉历的交分是会数积分与会月分之差〔参见第六章中的(6.2)式〕，所以，(7.29)式中要乘会数，不然(7.29)右端中的1、3两项就不能相减。②与(7.30)式的区别也是把通数换成了会数，道理相同。③与(7.31)式的区别是(7.31)式除去了"－会月(通)"这一项，这与计算结果毫不相干。②③或(7.30)、(7.31)式右端前二项相加的结果若大于会月(或名为会通)，必须减去之，不论式中有否"－会月"这一项。若前二项相加的结果小于会月，式中纵然有"－会月"这一项，也是不能相减的。

综上述，可以认为元嘉历的求月蚀三式与景初历相同。

算出去交分以后，再与朔望合数及交限比较，以确定是交会或月蚀：

去交分＜朔望合数
　　或＞交限

其中的"去交分"若是朔去交分则交会，望去交分则月蚀。

还须说明的是，《律历志》叙述(7.29)式说："置所求年积月，以会数一百六十乘之，以所入交会纪差二十二加之，满会月去之。"其中"所求年积月"系指所求年的"入纪年积月"。"以所入交会纪差二十二加之"句中有二处不妥："所入交会纪差"应作"所入纪交会差"，因交会纪差只有一个(598)，而交会差却每纪不同，由历理解释，此处是指交会差，不是纪差。此外"二十二"的数字是对历始元嘉二十年而言，该年入于上元以来第二元第四纪的232年，第四纪为甲午纪，交会差是22。而(7.29)式中的入纪交会差不专指甲午纪。

(2)推入迟疾历法。

《律历志》所给公式是：

$$\frac{\text{所求年朔积分}+\text{所入纪迟疾差}-n\cdot\text{通周}}{\text{日法}}=\text{入历日数}\frac{\text{日余}}{\text{日法}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.32)$$

与景初历公式相同〔参见第五章(5.46)式〕。(7.32)式中的"入历日数"算外，为所求年正月朔入迟疾历日名(由纪首日名起算)。

由于朔望月－近点月日数$=29\frac{399}{752}-27\frac{417}{752}=1\frac{734}{752}$日，求次月入迟疾历数等于头月入迟疾历数加$1\frac{734}{752}$日，即：

$$\begin{aligned}\text{次月入历}&=\text{头月入历日数}\frac{\text{日余}}{\text{日法}}+1\frac{734}{\text{日法}}\\&=(\text{头月入历日数}+1)\frac{\text{日余}+734}{\text{日法}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.33)\end{aligned}$$

元嘉历半个朔望月日数为$14\frac{575\frac{1}{2}}{752}$日，求某月望日入迟疾历的公式是：

$$(\text{朔入历日数}+14)\frac{\text{日余}+575\frac{1}{2}}{\text{日法}}=\text{望日入历日}\frac{\text{望日余}}{\text{日法}}\cdots\cdots\cdots \quad (7.34)$$

当望日入历数大于 1 个近点月时，应从中减去 1 个近点月。即：当(7.34)式中的望入历日$\frac{\text{望日余}}{\text{日法}}\geqslant 27\frac{417}{752}$，(7.34)式应写为：

$$\begin{aligned}&(\text{朔入历日数}+14-27)\frac{\text{日余}+575\frac{1}{2}-417}{\text{日法}}\\&=(\text{朔入历日数}-13)\frac{\text{日余}+158\frac{1}{2}}{\text{日法}}=\text{望日入历日}\frac{\text{望日余}}{\text{日法}}\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.35)$$

《律历志》说，对于(7.34)式，"(望)日余满日法成一日，日满二十七去之，除日余如周日日余"，后两句已是讲(7.35)式了，所谓"周日日余"就是近点月最后一日(周日)的日余：417 分。但是，这两个条件并非永远都能同时满足的，可能有两种特殊情形，一是"日满二十七去之"之后仍有余日，而日余＜周日日余，不能做到"除日余如周日日余"，此时可

把"日满二十七去之"之后的余日化为日分，增入日余后再减周日日余，就是《律历志》说的："不足减，减一日，加周虚。"第二种特殊情形是"日满二十七去之"之后无余日，而日余又小于周日日余，称为"损"。对于这种情形，日虽"满二十七"，不必"去之"，入历在周日。只有日余大于周日日余，才"去之"，这时入历在下一个近点周之初(1 日)了。

(3)由入迟疾历日数和日余推算合朔或月蚀(月望)时的定大余、定小余法。

推算要使用月行迟疾表，先将此表(见表 7.3)介绍如下：月行迟疾表首创于乾象历，元嘉历与乾象历的迟疾表结构大同小异，也分为五栏：第一栏是自 1 日至周日 1 个近点月内，逐日月亮实行的度分数，名为"月行迟疾度"。第二栏名"损益率"，所列数据是当日月亮实行与平(均)行的度分差。十四日以前，实行大于平行为益，小于平行为损；十五日以后大于平行为损，小于平行为益。第三栏"盈缩积分"所列数据是自入迟疾历(1 日)以来，月亮实行与平行差的累积数，多于平行为盈，少于平行为缩。在 1 个近点月内先盈后缩，月后(十五日)不盈不缩。每日下的数字是当日初，或者说是该日之前的累积值，不包括当日盈缩数。再者，此栏数据单位制与余栏不同，其余各栏单位制都是 1 度＝19 分，独此栏 1 度＝19×752(日法)分。第四栏"列差"数据表示相邻两日实行度分(或损益率)差，一、二日差列于一日下，二、三日差列于二日下……其余类推。与乾象历迟疾表中的"列衰"不同，其差数只计大小，不论加减进退。第五栏"差法"是月亮相对于日的实行度分数，即是第一栏"月行迟疾度"减去 1 度后化为分的数值，与乾象历、景初历迟疾表中的"月行分"似同而异。

"周日"各栏数字推算法。

月行迟疾度：由周日缩积 10528，算得二十七日以前损率为 14 ($\frac{10528}{752}=14$)。近点月 $27\frac{417}{752}$日，知周日只有 417 分。417 分损 14，全日(752 分)损率为：$417:14=752:x$，$x=\frac{752\times14}{417}=25\frac{103}{417}$。

表 7.3　元嘉历月行迟疾表

日序	月行迟疾度	损益率	盈缩积分	列差	差法
一	14°13′	益 25	盈	2	260
二	14°11′	益 23	盈 18800	3	258
三	14°8′	益 20	盈 36096	4	255
四	14°4′	益 16	盈 51136	5	251
五	13°18′	益 11	盈 63168	5	246
六	13°13′	益 6	盈 71440	6	241
七	13°7′	益	盈 75952	5	235
八	13°2′	损 5	盈 75952	4	230
九	12°17′	损 9	盈 72192	3	226
十	12°14′	损 12	盈 65424	3	223
十一	12°11′	损 15	盈 56400	3	220
十二	12°8′	损 18	盈 45120	2	217
十三	12°6′	损 20	盈 31584	2	215
十四	12°4′	损 22	盈 16544	2	213
十五	12°2′	益 24	缩	2	211
十六	12°4′	益 22	缩 18048	2	213
十七	12°6′	益 20	缩 34592	3	215
十八	12°9′	益 17	缩 49632	5	218
十九	12°14′	益 12	缩 62416	6	223
二十	13°1′	益 6	缩 71440	6	229
二十一	13°7′	益	缩 75952	5	235
二十二	13°12′	损 5	缩 75952	4	240
二十三	13°16′	损 9	缩 72192	4	244
二十四	14°1′	损 13	缩 65424	4	248
二十五	14°5′	损 17	缩 55648	3	252
二十六	14°8′	损 20	缩 42864	3	255
二十七	14°11′	损 23	缩 27824	2	258
周日	14°13′小分 103	损 25 定损 224	缩 10528 定备 93408		260 定意差法 2309

周日月行迟疾度$=x+$平行度$=25\,\frac{103}{417}+254=279\,\frac{103}{417}$。折合 14 度 13 分小分 103。单位制:1 度=19 分,1 分=417 小分。

损益率＝月行迟疾度－平行度＝14 度 13 分 103 小分－13 度 7 分
＝1 度 6 分 103 小分＝(损)25 分 103 小分

《律历志》说是“损二十五，定损二百二十四”。“二十五”后脱“小分一百三”数字。

盈缩积，是该日前损益率累积值与日法的乘积，可以算得，到二十七日末，这项累积值为 14，乘日法 752 得 10528。

列差是当日月行度与次日行度之差。周日是最后一日，无次日数据，列差当然也是未知数。

差法是当日月亮实行分与日行分之差，周日月亮实行 14°13′103 小分，日行 1 度，二者差分是 260 分 103 小分，《律历志》只有 260 分，同样下脱“小分一百三”数字。

周日栏中还有“定损二百二十四”、“定备九万三千四百八”、“定意差法二千三百九”诸项。中华书局 1987 年版“校勘记”说，“定备”是“定缩”的误文，“定意差法”是“定差法”的误文。按《律历志》所给“定积分”(周日谓之“定缩”)、“定差法”公式，分别是入历日盈缩积、差法与入历日余盈缩积、差法之代数和，因此，不大可能大于入历日缩积和差法的 2 倍。而表中数据都是周日缩积、差法的 8、9 倍。“校勘记”的说法似应再酌。

下面看求大、小余的方法，《律历志》所给公式分三步：

$$\text{盈缩积分}\pm(\text{入历日余}\times\text{入历下损益率})=\text{定积分} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.36)$$

$$\text{差法}\pm\frac{\text{入历日余}\times\text{列差}}{\text{日法}}=\text{定差法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.37)$$

$$\text{本朔望小余}\pm\frac{\text{定积分}}{\text{定差法}}=\text{定小余} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.38)$$

若(7.38)中取“＋”号，且加后大于日法，大余增 1 日；取“－”号，且“小余”不够减，破大余入小余，此时大余减 1 日。前一种情形，合朔、月食在平朔、望后 1 日，后一种情形在平朔、望前 1 日。

下边讨论上三式的意义。把(7.36)、(7.37)两式代入(7.38)式：

$$\text{本朔望小余}\pm\frac{\text{盈缩积分}\pm(\text{入历日余}\times\text{入历下损益率})}{\text{差法}\pm\dfrac{\text{入历日余}\times\text{列差}}{\text{日法}}}=\text{定小余}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.39)$$

把所得定小余再与日法相比较，大于日法大余增 1 日，小于日法，大余减 1 日。即把(7.39)式两边同除日法得：

$$\frac{本朔望大小余 \pm \dfrac{盈缩积分+(入历日余\times入历下损益率)}{差法\pm\dfrac{入历日余\times列差}{日法}}}{日法}=\frac{定小余}{日法} \quad \cdots\cdots (7.40)$$

将此式与景初历求定大、小余的公式〔参见第五章中的(5.52)式〕相比较(其中差法＝月行分－章岁)，可知(7.40)式中多了一项 $\frac{入历日余\times列差}{日法}$。在第五章中已经说到："月行分一章岁"〔即(7.40)式中的"差法"〕是入历末日(最后 1 日)的月行分，而分子是入历以来的增减分，除以此数的目的是把增减分化为日及日余，以与平朔望大小余相加减。用末一日的月行分(差法)除，所得只是个近似值。元嘉历除此之外又增入"入历日余"的月行增分：$\frac{入历日余\times列差}{日法}$，殊无所谓。大约是何承天意识到用差法除不够精确，欲增入一个附加数以修正之。但是，用"入历日余×列差"作修正值无甚道理。以理而论，分母不用"差法＋$\frac{入历日余\times列差}{日法}$"，而用入历以来月行分的平均数，似乎更加精确些。

(4)推合朔、月食加时辰次数。

算出合朔、月食的定小余，加时辰次也就容易计算了。算法与景初历完全相同〔参见第五章中的(5.56)～(5.58)式及图 5.6〕，分作三式：

$$\frac{定小余\times12}{日法}=辰\frac{辰余}{日法} \quad \cdots\cdots (7.41)$$

"辰＋1"为所加辰次数，(自子时起算，算外为辰次)。

$$\frac{辰余\times4}{日法}=等分\frac{等余}{日法} \quad \cdots\cdots (7.42)$$

每辰分为 4 等分，1 等分为少，2 为半，3 为太，4 等分为 1 辰。

把每等分再平分为三份，得 1 为前等分强，得 2 为后等分弱。分余四舍五入，(满日法之半进为 1，不满弃之)。

$$\frac{等余\times3}{日法}=份数\frac{分余}{日法} \quad \cdots\cdots (7.43)$$

(5)推合朔、月食加时满刻法。

即推算合朔、月食发生在某日的昼夜漏刻数。与求辰次法相仿佛，分作二步，第一步求刻次：

$$\frac{定小余\times 100}{日法}=刻数\frac{刻余}{日法} \cdots\cdots (7.44)$$

刻数算外（即"刻数+1"）为所求刻数。第二步由刻余求分数（每刻=10分）：

$$\frac{刻余\times 10}{日法}=分数\frac{分余}{日法} \cdots\cdots (7.45)$$

得出加时在某刻、某分，还要进一步判定在昼漏（或夜漏）中的位置。方法是先查表，得到合朔、月食所在日与某节气相邻，该节气的夜漏刻数是多少？再与(7.44)算得的刻数比较，若小于夜漏之半，合朔、月食发生时，天尚未明，虽在子夜之后，于历法已入次日，按习俗仍为头日，即合朔、月食发生的日序数为大余；若大于夜漏之半，于习俗已入第二日，合朔、月食发生的日序数为"大余+1"，就是《律历志》说的大余"算外"为所求日。

若表中所列数据不是昼夜漏刻数，而是限数、间限数，前面说过限数就是夜漏之半化为度分的数据，间限是相邻两节气限数的平均数。因此，利用限数、间限数或者是昼夜漏刻数是等效的。利用限数、间限数的方法，《律历志》说是："在中节前后四日以还者，视限数。在中节前后五日以上者，视间限数。"这是讲限数和间限数各自适用的范围。又说："月食时定小余不满限数、间限数者，皆以算上为日。"把限数、间限数改为夜漏之半，与前段文字就毫无二致了。

(6)推合朔时日月所在天度。

前面(7.25)式算出了合朔夜半时的日度分，再加上自夜半到合朔之间的时距，即朔小余折合成的度分就是合朔时的日月所在度分了〔参见第五章(5.25)、(5.26)式〕。

$$\frac{朔小余\times 章岁}{通法}=大分\frac{小分}{通法} \cdots\cdots (7.46)$$

$$\frac{朔日夜半日分+大分}{度法}=度\frac{余分}{度法} \cdots\cdots (7.47)$$

(7.47)式左边分子中第一项"朔日夜半日分"就是前述(7.25)式算得的积度余分数，分母是度法；第二项"大分"是(7.46)计算结果，分母

看似通法，其实也是度法。因此，两项相加，满度法成度，入积度，不满为余分，合为正月合朔时的天度数。

（7）推次月合朔时天度分。

头月与次月合朔相差 $29\frac{399}{752}$度（等于 1 个朔望月日数），求次月只要在头月合朔度分之上加 $29\frac{399}{752}$度即可。整度 29 无话可说，余分则须单位制相同才能相加，本节 4(6)求得的头月合朔度分分母是度法，此处余分 399 的分母也应化为度法：

$$\frac{399\times\text{度法}}{752\times\text{度法}}=\frac{399\times\frac{\text{度法}}{\text{日法}}}{\text{度法}}=\frac{161\frac{14}{47}}{\text{度法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.48)$$

399 分的分母化为度法后，变成了 $161\frac{14}{47}$，因此《律历志》说，求次月，加度29，大分 161，小分 14。小分满通法(47)从大分，大分满度法(304)从度。

求望日日度，当在月朔度分之上加半个朔望月化成的度分，即加 29 度 $161\frac{14}{47}$分的一半，合 14 度 $232\frac{30.5}{47}$分。因此，《律历志》说："求望，加十四度，大分二百三十三，小分三十半。"

求望时的月所在度。自朔至望，日行 14 度 232 分，30.5 小分，月行度分应是：

$$14\frac{232\frac{30.5}{47}}{304}\times 13\frac{7}{19}=14\frac{10934.5}{304\times 47}\times 13\frac{7}{19}$$

$$=\frac{210966.5}{14288}\times\frac{254}{19}=\frac{1410144.5}{7144}=197\frac{2776.5}{7144}$$

$$=197\frac{118\frac{7}{47}}{304}\text{度}$$

与望时的日度相减：

$$197\frac{118\frac{7}{47}}{304}-14\frac{232\frac{30.5}{47}}{304}=182\frac{189\frac{23.5}{47}}{304}\text{度}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.49)$$

此数是望时日、月相距度。由此知，由望时日度求月度法，如《律历志》所

说："求望月所在度，加日度一百八十二，分一百八十九，小分二十三半。"元嘉历周天度为 $365\frac{75}{304}$度，半周天度为：

$$365\frac{75}{304}\div 2=182\frac{189\frac{1}{2}}{304}=182\frac{189\frac{23.5}{47}}{304}\text{度}$$

与望时日月相去度数合。即望时日月相去半周天，就是通常说的"日月如衡"。

表 7.4 二十四气表

二十四气名	日所在度	日中晷影	昼漏刻	夜漏刻	昏中星	明中星
雨水	室 1 太强	8 尺 2 寸 2 分	50 刻 5 分	49 刻 5 分	觜 1 少强	尾 11 强
惊蛰	壁 1 强	6 尺 7 寸 2 分	52 刻 9 分	47 刻 1 分	井 9 半强	箕 4 少弱
春分	奎 7 少强	5 尺 3 寸 9 分	55 刻 5 分	44 刻 5 分	井 29 半强	斗 4 弱
清明	娄 6 半	4 尺 2 寸 5 分	58 刻	42 刻	柳 12 太	斗 14 半
谷雨	胃 9 太	3 尺 2 寸 5 分	60 刻 3 分	39 刻 7 分	张 10	斗 25 半
立夏	昴 11 弱	2 尺 5 寸	62 刻 3 分	37 刻 7 分	翼 10 太弱	女 3 少
小满	毕 15 少弱	1 尺 9 寸 7 分	63 刻 9 分	36 刻 1 分	轸 10 弱	虚 2 弱
芒种	井 3 半弱	1 尺 6 寸 9 分	64 刻 8 分	35 刻 2 分	角 10 太弱	危 7 弱
夏至	井 18	1 尺 5 寸	65 刻	35 刻	氐 5 少弱	室 5 少强
小暑	鬼 1 弱	1 尺 6 寸 9 分	64 刻 8 分	35 刻 2 分	房 4 太弱	壁 6 太弱
大暑	柳 12 弱	1 尺 9 寸 7 分	63 刻 9 分	36 刻 1 分	尾 8 太弱	奎 12 太弱
立秋	张 5 半强	2 尺 5 寸	62 刻 3 分	37 刻 7 分	箕 3	胃 2 太弱
处暑	翼 2 半	3 尺 2 寸 5 分	60 刻 3 分	39 刻 7 分	斗 3 半	昴 7 太弱
白露	翼 17 太弱	4 尺 2 寸 5 分	58 刻	42 刻	斗 14 半弱	毕 16 半弱
秋分	轸 15	5 尺 3 寸 9 分	55 刻 5 分	44 刻 5 分	斗 25 少强	井 9 少强
寒露	亢 1 少	6 尺 7 寸 2 分	52 刻 9 分	47 刻 1 分	牛 8 半强	井 29 弱
霜降	氐 7 半	8 尺 2 寸 8 分	50 刻 5 分	49 刻 5 分	女 11 半强	柳 11 半强
立冬	心 2 半弱	9 尺 9 寸 1 分	48 刻 4 分	51 刻 6 分	危 2 弱	张 8 太弱
小雪	尾 12 太强	1 丈 1 尺 3 寸 4 分	46 刻 7 分	53 刻 3 分	危 13 半强	翼 8 太强
大雪	箕 10	1 丈 2 尺 4 寸 8 分	45 刻 6 分	54 刻 4 分	室 9 半强	轸 8 少强
冬至	斗 14 强	1 丈 3 尺	45 刻	55 刻	壁 8 太强	角 7 少强
小寒	牛 3 半强	1 丈 2 尺 4 寸 8 分	45 刻 6 分	54 刻 4 分	奎 15 少	亢 9
大寒	女 10 半强	1 丈 1 尺 3 寸 4 分	46 刻 7 分	53 刻 3 分	胃 4 半强	氐 13 太强
立春	危 4	9 尺 9 寸 1 分	48 刻 4 分	51 刻 6 分	昴 9 少	心 4 强

(8)二十四气表。

元嘉历载有二十四气表，分为气名、各气日所在度、日中时晷影长短、昼漏刻、夜漏刻、昏中星、明中星共七栏（景初历也有二十四气表。在第五章中未录）。其中“日所在度”、“昏中星”、“明中星”三栏用前二章介绍的公式可以算得，昼夜漏刻可与限数表中的数值对照验正。晷影长短虽然也是可以计算的，以前没有介绍过计算公式。

三、推五星法

元嘉历推五星法最大的贡献是打破了以往五星与日月同元法，即以往制定历法总要确定一个年份，在这一年，“日月如合璧，五星如联珠”，七曜都从同一点出发，如景初历的壬辰元、乾象历的己丑元等。元嘉历首创“五星各自为元”法，从历理说，更加切合实际了。

表 7.5　五星各元表

星名	后元始年	年名	迄元嘉二十年(443 年)积年
木	晋咸和元年(326 年)	丙戌	118 年(算上)
火	元嘉十二年(435 年)	乙亥	9 年(算上)
土	元嘉十一年(434 年)	甲戌	10 年(算上)
金	晋太元九年(384 年)	甲申	60 年(算上)
水	元嘉二年(425 年)	乙丑	19 年(算上)

1. 五星参数

景初历等给出的五星参数每星多达 14～15 个，元嘉历每星只给四个参数，其他可按算法自行推出。这四个参数是：

(1)合岁。

景初历名为合终岁数，是日星每两次会合之间相隔日数，与回归年日数的最小公倍数，折合成的年数。

(2)合数。

景初历叫做合终合数，是在 1 个合岁期间日星会合的次数。

(3)日度法。

景初历同名，意义也大致相同。景初历的日度法等于纪法与合数的乘积，元嘉历等于二分之一纪法（等于度法）与合数的乘积。

（4）室分。

景初历、乾象历都名为斗分，是合数与周天斗分（周天度数的畸零数）的乘积。本文曾称之为星斗分，以与周天的斗分相区别。景初历、乾象历等历法的度都是自斗宿起始，畸零数也归入斗宿之下，因称斗分。元嘉历的天度是自室宿起，畸零数归入室宿之下，就自然改名为室分了。

表 7.6　五星参数表

	木	火	土	金	水
合　岁	344	459	383	267	79
合　数	315	215	370	167	249
日度法	95760	65360	112480	50768	75696
室　分	23625	16125	27750	12525	18675

2. 五星推算法

（1）推算距所求年最近一次星合（末合）所在之年。

所给公式为〔参见第五章（5.67）式〕：

$$\frac{\text{星后元至所求年数}\times\text{合数}}{\text{合岁}}=\text{积合}\frac{\text{合余}}{\text{合岁}} \quad\cdots\cdots\quad (7.50)$$

$$\frac{\text{合余}}{\text{合数}}=\begin{cases}<1 & \text{末合在所求年（“其年”）}\\ 1 & \text{在前年（“往年”）}\\ 2 & \text{在大前年（“前往年”）}\\ \vdots & \vdots\end{cases} \quad\cdots\cdots\quad (7.51)$$

《律历志》说“多者以合数除之”，“多者”就是（7.51）式中的合余。别无可释。

（2）推末合所在星度。

$$\frac{(\text{合数}-\text{合余})\times\text{周天}}{\text{日度法}}=\text{积度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \quad\cdots\cdots\quad (7.52)$$

其中“合数－合余”名为度分，是分 1 周天为合数分时，末合所在的天度分，把合数分化为周天分就变成了（7.52）式的形式，参见第五章（5.76）

式。

(3)推末合所在日名。

本节 2(2)有了推算末合所在星度的公式(7.52),这里推所在日。由于日每天行 1 度,星度数就是日数,两者的区别仅在于始点不同,如图 7.2,星度是自雨水节气所在的室宿 2 度(即 B 点)起始,到末合 A 点的长度;日数则是自雨水节气所在日的夜半(图中 C 点)起始,到 A 点的长度。因此得:

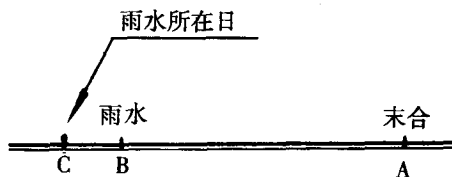



图 7.2 末合所在日图

$$日数=星度+雨水小余 \quad\cdots\cdots (7.53)$$

化同单位制后就是《律历志》所给公式:

$$积度+\frac{合数\times雨水小余+度余}{日度法}=整日数\frac{余}{日度法} \quad\cdots\cdots (7.54)$$

把"日度法=合数×度法"代入(7.54)式左端:

$$积度+\frac{度余}{日度法}+\frac{雨水小余}{度法}=整日数\frac{余}{日度法} \quad\cdots\cdots (7.55)$$

可以看出,(7.55)式就是(7.53)式的具体化,即(7.53)式计入单位后的形式就是(7.55)式,把(7.55)式的单位制化同,就成了(7.54)式。自雨水日名起算,"整日数"算外,就是所求日名。

《律历志》叙述(7.54)式说:"以合数乘其年内雨水小余,并度余为日余,满日度法从积度为日。"中华书局 1987 年版《宋书》把这段文字标点为:"以合数乘其年,内雨水小余……"使人很容易与(7.51)式中的"其年"相联系,如此就不可解了。

(4)求星见日法。

《律历志》说:"以法:伏日及余加星合日及余,满日度法成一日,命如前,星见日也。"

"以法"之"法",指"五星历步法"(参见下文)之"法";"伏日"与"星合日"是不同的,星合日必伏,伏日未必合,在日星相距约 10 度范围内,星伏不见,都是伏日。因而上段文字可用如下数学式表达:

$$伏日及余+星合日及余=(伏日+星合日)+\frac{伏日余+星合日余}{日度法}$$

$$=星见日\frac{见日余}{日度法} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.56)$$

由于“星合日”的日名是从雨水起算，星见日等于合日加伏日，所以星见日也是自雨水日名起算，如《律历志》所说：“命如前，星见日也。”“前”指本节2(3)中推“星合日”的方法。

(5)求星见度法。

与(7.56)式相仿佛：

$$伏行度及余+星合度及余=(伏行度+星合度)+\frac{伏行度余+星合度余}{日度法}$$

$$=星见度\frac{见度余}{日度法} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.57)$$

也是自雨水所在宿度为度始，“星见度”之外为为所求宿度。

(6)求星见后行度法。

中华书局1987年版《宋书·律历下》有一段描述计算法的公式，因为句、逗混乱，几不可读，兹更正如下：

“以星行分母乘见度余，满日度法得一分。乃日加所行分，分满其母成一度。逆顺母不同，当各乘度余。留者承前，逆则减之，伏不书度，经室去分。不足减者，破全度。”

第一句是指(7.57)式中的“见度余”与见后星行分相加的计算法。如木星“见度余”，分母是日度法，见后1日，行$\frac{4}{23}$度。求星行度时，须将二者相加：$\frac{4}{23}+\frac{见度余}{日度法}$。显然，须将分母化同，才能相加。《律历志》化同的方法是：

$$\frac{4}{23}+\frac{\frac{23\times见度余}{日度法}}{23}=\frac{4+\frac{23\times见度余}{日度法}}{23}$$

这种方法不是像今天的数学运算那样，先求23与日度法二者的公分母，而是把星见度余的分母也化为23，与星行分母一样。方法如《律历志》所说是“以星行分母(23)乘见度余，满日度法得一分”。这里“满日度法”所得之“一”，不是像(7.56)式中那样为1日，而是1分。分满23才

是1日。所以，下文才有“乃日加所行分（每过1日，加4分），分满其母（23）成一度”。

遇到逆行变顺行或顺行改逆行的情形时，一般逆、顺行速的分母不同，遇逆行将“见度余”与逆行分母相乘，顺行再与顺行分母相乘，叫做“各乘度余”。仍以木星为例：按（7.56）式求出“见日余”后，星顺行，日行 $\frac{4}{23}$ 度，以星行分母（23）乘见度余，满日度法得1分，每日加所行分4，115日后留26日改逆行，逆行之前，星行分为：

$$\frac{23\times 见度余}{日度法}+4\times 115$$

分满23为1度，除去整度（20）后，余分仍是 $\frac{见度余}{日度法}$。改逆行后分母为7，用7乘见度余后，再与每日逆行分相减，就是后文说的“逆则减之”。

此前还有一句“留者承前”，留时不进不退，星行度无增无减，承前行度不变，叫做“留者承前”。

所谓“伏不书度”，在“五星历步法”中“初与日合而伏”，伏时星所在度不标示出来。因为每合度数不同，可由（7.52）式计算出来，不必标出。

“经室去分”及“不足减者，破全度”无须再释。

这样得星见后行度分的计算式：

$$\begin{aligned}星见后行度分&=星见度\frac{星见度余}{日度法}+\sum\frac{星行分\times 星行日数}{星行分母}\\&=星见度\frac{星见度余}{日度法}+\frac{星行分_1\times 星行日数_1}{星行分母_1}+\frac{星行分_2\times 星行日数_2}{星行分母_2}+\cdots\cdots\\&=星见度\frac{\frac{星见度余\times 星行分母_1}{日度法}+星行分_1\times 星行日数_1}{星行分母_1}+\frac{星行分_2\times 星行日数_2}{星行分母_2}\\&\quad+\cdots\cdots\end{aligned}\tag{7.58}$$

3. 五星行步

（1）木星。

初与日合而伏

顺行　16日41780分　　行度　2度77847分5

晨见东方	顺行 $\frac{4}{23}$度/白	115 日	行 20 度
	留	26 日	
	逆行 $\frac{1}{7}$度/日	84 日	行 −12 度
	留	26 日	
	顺 $\frac{4}{23}$度/日	115 日	行 20 度
夕伏西方再合	顺行	16 日 41780 分	行度 2 度 72847.5 分
星一终		398 日 83560 分	行 33 度 59935 分

(2)火星。

初与日合而伏			
	顺行	71 日 24812.5 分	行度 54 度 49430 分
晨见东方	顺疾 $\frac{5}{7}$度/日	108.5 日	行 77.5 度
	小迟 $\frac{4}{7}$度/日	126 日	行 72 度
	大迟 $\frac{2}{7}$度/日	42 日	行 12 度
	留	12 日	
	逆 $\frac{3}{10}$度/日	60 日	行 −18 度
	留	12 日	
	顺迟 $\frac{2}{7}$度/日	42 日	行 12 度
	小疾 $\frac{4}{7}$度/日	126 日	行 72 度
	大疾 $\frac{5}{7}$度/日	108.5 日	行 77.5 度
夕伏西方再合	顺行	71 日 24812.5 分	行度 54 度 49430 分
星一终		779 日 49625 分	行 414 度 33500 分
		除去 1 周天	定行 49 度 17375 分

(3)土星。

初与日合而伏			
	顺行	18 日 4482.5 分	行度 2 度 46847.5 分
晨见东方	顺 $\frac{1}{12}$度/日	84 日	行 7 度
	留	36 日	

	逆行	$\frac{1}{17}$度/日	102 日	行 −6 度
	留		36 日	
	顺	$\frac{1}{12}$度/日	84 日	行 7 度
夕伏西方再合	顺行		18 日 4482.5 分	行度 2 度 46847.5 分
星一终			378 日 8965 分	行度 12 度 93695 分

(4)金星。

初与日合而伏				
	顺行		41 日 49684.5 分	行度 51 度 49684.5 分
夕见西方	顺疾	$1\frac{3}{13}$度/日	91 日	行 112 度
	小迟	$1\frac{2}{13}$度/日	91 日	行 105 度
	大迟	$\frac{11}{15}$度/日	45 日	行 33 度
	留		8 日	
	逆行	$\frac{2}{3}$度/日	9 日	行 −6 度
夕伏西方	逆	$\frac{2}{3}$度/日	6 日	行 −4 度
日星合	逆	$\frac{2}{3}$度/日	6 日	行 −4 度
晨见东方	逆	$\frac{2}{3}$度/日	9 日	行 −6 度
	留		8 日	
	顺行	$\frac{11}{15}$度/日	45 日	行 33 度
	小疾	$1\frac{2}{13}$度/日	91 日	行 105 度
	大疾	$1\frac{3}{13}$度/日	91 日	行 112 度
晨伏东方日星再合	顺行		41 日 49684.5 分	行度 51 度 49684.5 分
星一终			583 日 48601 分	行度 583 度 48601 分
				除去 1 周天 定行 218 度 36076 分

其间日、星凡二合，平均每合 291 日 49684.5 分，行星 291 度 49684.5 分。

(5)水星。

初与日合而伏			
	顺行	17 日 71210.5 分	行度 34 度 71210.5 分
夕见西方	顺疾	$1\frac{1}{3}$度/日　18 日	行 24 度
	顺迟	$\frac{5}{7}$度/日　7 日	行 5 度
	留	4 日	
夕伏西方	逆行	11 日	行 −6 度
与日合	逆行	11 日	行 −6 度
晨见东方	留	4 日	
	顺迟	7 日	行 5 度
	顺疾	18 日	行 24 度
晨伏东方 再与日合	顺行	17 日 71210.5 分	行 34 度 71210.5 分
		115 日 66725 分	行星 115 度 66725 分

其间日、星二合，平均每合 57 日 71210.5 分，行星 57 度 71210.5 分。

《律历志》"五星历步法"之末有几句话："盈加缩减，十六除月行分，日法除盈缩分，以减度分，盈加缩减。"[①] 意不可解。文中有两个"盈加缩减"，于"十六除月行分"之后应加句号或分号断开。但"步法"中无"月行分"，应是"日行分"之误；"十六"也是"十九"的误文。"十九除日行分"，意思是五星每日行分（如木星"日行$\frac{4}{23}$"，逆"行$\frac{1}{7}$"之类）的分母都是 19，即单位制都是 1 度＝19 分，日行分除 19 以后才能化为度分。下一句"日法除盈缩分"，"日法"可能是"日度法"之误，"盈缩分"指星与日合时的"日余"数，除以日度法之后才能化为"度分"（单位制与周天度分中的度分相同，1 度＝304 分）。以上所说，虽可勉强成解，改动太大，不见得是原文的本意。

再一种解释就是：这两句是错简，从别处误入此处者。如"月行分"、

① 《宋书・律历志下》，中华书局 1987 年版，第 285 页。

“盈缩分”等词，与“五星步历法”绝无关涉，而二节3(2)“历先月法”中就有“以十六除月行分”的文字。

四、元嘉历的补充内容

以下内容与前文不相连属，因称“补充内容”，是后来补入的文字。

1. 推卦

就是景初历说的“推卦用事日”。推法是：“因雨水大小余，加大余六，小余三百十九。小余满三千六百四十八成日。”以下“日满二十七……”“校勘记”说是“错简”，不去管它。

按乾象历、景初历中“推卦用事日”法，元嘉历的回归年日数($365\frac{75}{304}$)除以六十卦，得：$365\frac{75}{304}\div60=6\frac{319}{3648}$日。如此以上引文有两种解释法：一是元嘉历认为，六十四卦中的四正卦(坎、离、震、兑)各主一季，其余六十卦分统一年日数，各得$6\frac{319}{3648}$日。所以说“因雨水大小余，加大余六，小余三百一十九，小余满三千六百四十八成日”。以次得卦所统之日。第二种解释法是，元嘉历也像乾象历、景初历一样，都采用京房旧法，使四正卦分主约$\frac{73}{80}$日，四正卦之前的晋、井，大富、颐各主约$5\frac{14}{80}$日，其余五十六卦各主$6\frac{7}{80}$日。把分母换成元嘉历的元法(3648)，以上各数字约略为$\frac{3327}{3648}$日、$5\frac{640}{3648}$日、$6\frac{319}{3648}$日。显然，按后一种解释，以上引文必有许多脱漏文字。

2. 漏刻法

按《律历志》所载何承天的奏章说：旧用景初历的漏刻法，春分、秋分昼夜漏不同，冬至前后对应日的昼夜漏刻也不同，而且，昼夜漏长短变化没有规律，突增骤减，都是不对的。朝廷批复，改用元嘉历的新漏刻法，昼夜漏刻数见前引表7.4。从中可见已改变了景初历的缺陷，冬至前后，夏至前后对应节气的昼夜漏刻数相同(如冬至前后的大雪与小

寒、小雪与大寒、立冬与立春等的昼夜漏刻数都彼此相同)，春分、秋分的昼夜漏刻也彼此相同。此外，漏壶改用25箭，大约每15日换1箭。

3. 月行阴阳法

是宋文帝刘义隆命著作令史吴赀，仿照刘登《乾嘉历》的"月行三道法"制定的，作为元嘉历的补充颁行。

(1)阴阳历表。

表7.7 月行阴阳历表

阴阳历	损益率	兼数
一日	益17	初
二日(前限余665，微分1738)	益16	17
三日	益15	33
四日	益12	48
五日	益8	60
六日	益4	68
七日	益1	72
八日	损2	73
九日	损6	71
十日	损10	65
十一日	损13	55
十二日	损15	42
十三日(后限余2019，微分1079)	损16	27
分日(2685.5)	损16大(大者，5371分之3472)	11

元嘉历认为月亮行天1周，出入黄道2次(1出1入)，即在行1周天的日期内，半在黄道北，半在黄道南。在黄道南为阳道，北为阴道，阴阳道各占半周天。月行阳道或阴道(半周天)所需天数〔即阴(阳)历1周日数〕为：

$$\frac{\text{周天}}{2}\div\text{月周}=\frac{111035}{2}\div 4064=13\,\frac{2685.5}{4064}\text{日}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(7.59)$$

由此可知，表7.7所列为月行阳道或阴道1周的时期内(13日2685.5分日)逐日运行情形。与乾象历一样，"损益率"栏的数据是该日月亮靠近或远离黄道的度分数，靠近为损，远离为益。单位为分，1度=

12 分。“兼数”是月亮进退黄道距度分的累积值，表中最大为 73 分＝6 度 1 分，这是黄、白道相去的最大距离。

前后限的计算法参见第四章二节 5(1)，先求朔合分(每月交会对应的周天分)：

$$\text{朔合分}=\frac{\text{周天}}{2}\times\frac{\text{会数}}{\text{会月}}=\frac{111035}{2}\times\frac{160}{939}=9459\frac{1598}{1878} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7.60)$$

再求限分(朔合分的一半)：

$$\text{限分}=\frac{\text{朔合分}}{2}=\frac{160\times111035}{939\times4}=4729\frac{1738}{1878} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7.61)$$

月亮走过限分所需的时日就是前限：

$$\text{前限}=\frac{\text{限分}}{\text{月周}^{①}}=\frac{4729\frac{1738}{1878}}{4064}=1\frac{665\frac{1738}{1878}}{4064}\text{日} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7.62)$$

得数是 1 日余，所以表中前限在第二日，括号中说有余分 665，微分 1738。从(7.62)式可知，余分的分母是月周(4064)，微分的分母是 1878，元嘉历称为微分法，数目等于会月的 2 倍。

阴(阳)历 1 周减前限得后限，即：

$$\text{后限}=13\frac{2685.5}{4064}-1\frac{665\frac{1738}{1878}}{4064}=12\frac{2019\frac{1079}{1878}}{4064}\text{日} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7.63)$$

后限 12 日余，表 7.7 中落在第 13 日，且说有余分 2019，微分 1079。与前限一样，余分分母是月周(4064)，微分分母是微分法 1878。

(2)主要参数。

《律历志》所给共三个：历周、差率和微分法。前面说过，微分法是前、后限中微分的分母，数目大小等于会月的 2 倍。其余两个：

历周。是阴(阳)历一周的分数。前述(7.59)式算出阴(阳)历 1 周日数(即度数)为 $13\frac{2685.5}{4064}$度，化为分数：$13\frac{2685.5}{4064}=\frac{55517.5}{4064}$度。其中 55517.5 分就是历周。

差率。等于月行交周与月行周之和，即：

差率＝朔望合数＋会月

---

① 月周是月亮每 304 年行天的周数，也是每日行天分数。

参见第四章(4.52)式。在元嘉历中：

朔望合数＋会月＝80＋939＝1019

《律历志》中的数据却是：差率＝10190，单位制比乾象历缩小了10倍。

(3)推入阴阳历术。

《律历志》所给公式分两步，第一步求大分，由大分制定入阴历还是入阳历：

$$\frac{(\text{入纪积月}-m\cdot\text{会月})\times\text{会数}+\text{所入纪交会差}}{\text{微分法}}\times\text{周天}=\text{大分}\frac{\text{微分}}{\text{微分法}} \qquad (7.64)$$

其中若：大分$-n\cdot$周天＜历周，入阳历。

大分$-n\cdot$周天＞历周，入阴历。

m、n都是自然数或0，且满足0＜入纪积月$-m\cdot$会月＜会月，0＜大分$-n\cdot$周天＜周天。

第二步求入历日：

$$\left.\begin{aligned}&\text{若入阳历：}\quad \frac{\text{大分}-n\cdot\text{周天}}{\text{月周}}=\text{入历日}\frac{\text{日余}}{\text{月周}}\\&\text{若入阴历：}\quad \frac{\text{大分}-n\cdot\text{周天}-\text{历周}}{\text{月周}}=\text{入历日}\frac{\text{日余}}{\text{月周}}\end{aligned}\right\} \qquad (7.65)$$

对(7.64)、(7.65)式的解释可与乾象历推入阴阳历的公式对照〔参见第四章(4.54)～(4.56)式〕。彼处是分三步推算，第一步求入会月公式是$\frac{\text{上元积月}}{\text{会月}}=m\frac{\text{会余}}{\text{会月}}$，会余是所求入会月数。这一步与(7.64)式分子中括号内的运算是等效的，区别只在于乾象历从上元积月起算，元嘉历从入纪月起算。

乾象历算法的第二步是把入会月化为日行交周分，方法是：$\dfrac{\text{会余}\times(\text{朔合分}+\frac{\text{微分}}{\text{微分法}})}{\text{周天}}=n\dfrac{\text{朔合余}}{\text{周天}}$。除以周天，是为了以分子中除去周天分，只留剩余的不满周天分的部分(朔合余)。把求朔合分的公式〔第四章(4.48)式〕代入上式左端：

$$\frac{\text{会余}\times\frac{\text{周天}\times\text{朔望合数}}{\text{会月}}}{\text{周天}}=\frac{\text{会余}\times\text{朔望合数}}{\text{会月}} \qquad (7.66)$$

把微分法＝2×会月代入(7.64)式左端得：

$$\frac{(\text{入纪积月}-m\cdot\text{会月})\times\text{会数}+\text{所入纪会差}}{2\times\text{会月}}\times\text{周天}$$

$$=\frac{(\text{入纪积月}-m\cdot\text{会月})\times\text{朔望合数}+\text{所入纪会差}}{\text{会月}}\times\text{周天}$$

…………………………………………………………（7.67）

(7.66)和(7.67)相比较有以下不同：

第一，(7.66)式中的“会余”与(7.67)式中的“入纪积月 $-m\cdot$ 会月”不同，前者是由元初起算产生的，后者则是由纪初起算产生的。倘若所求年入于第一纪，两者并无差别，若是入于其他各纪，交会差就不相同。为此，在(7.67)式又增加一个数据“所入纪会差”。从入纪年起算，加上此数后就与从元初起算相同了。

第二，(7.67)式多乘了个“周天”分，或者说是(7.66)式比(7.67)式多除了个周天分。(7.66)式除周天分是为了把交会分中大于周天分的部分除去，只留“朔合余”。(7.67)式不除周天分是由于元嘉历把交会分中多于周天分的部分除掉放在下一步，即在(7.65)式进行，而乾象历在(4.55)式中就动手了。

从以上分析可知(7.64)式与乾象历求入阴阳历三个公式中的前两个大致是相同的(除了没有除周天分，此外全部相同)。

由于乾象历在(4.55)式中除去了周天分，(4.56)式中直接除月周(月亮的每日行分)就得到了入阴阳历日数；元嘉历则要减去周天分后才除月周。

总之，元嘉历推入阴阳历的二步公式，形式虽与乾象历的三步式有所不同，意义是完全相同的。

从所入纪纪首日名起算，(7.65)式算得的“入历日”数外第一日就是所求年正月朔入阴阳历的日名。

(4)推次月朔入历日名。

若按(7.64)、(7.65)式求入阴阳历日，次月与前月相比，在(7.64)式中的区别是入纪积月增加1个月，由此推交会分的增加时，需要知道所入纪的交会差，对于不同纪，此数不同，算起来很麻烦。前面说过，(7.64)、(7.65)式与乾象历推入阴阳历的三步公式是相同的，那么用它

计算元嘉历入阴阳历日数也是一样的。仿照乾象历推次月入阴阳历的计算法可知，次月比前月会余多1〔据(4.54)式〕；由于会余多1，朔合余多（朔合分 + $\frac{微分}{微分法}$）〔据（4.55）式〕，而朔合分 + $\frac{微分}{微分法}$ = $\frac{周天\times朔望合数}{会月}$；次月比前月入历多出的日数就应是：$\frac{周天\times朔望合数}{会月\times月周}$日。代入元嘉历的相应参数值得：$\frac{111035\times80}{939\times4064}$ = $\frac{8882800}{3816096}=2\frac{1331\frac{1598}{1878}}{4064}$日。

所以，求次月朔入历日，只要在算得的前月入历日和日余之上加入此数即得，就是《律历志》说的"求次月，加二日，日余一千三百三十一，微分一千五百九十八"，自然还应该说：日余满月周(4064)入日，微分满微分法(1878)入日余。《律历志》把这两句话省略了。

此外，所得若满阴(阳)历1周，即$13\frac{2685.5}{4064}$日，也应除去之。并且，原入阳历，变为入阴历；原入阴历，变为入阳历。《律历志》叙述为"日满十三去之，除日余如分日(指表7.7中的分日2685.5分)，阴阳历竟互入端。""历竟互入端"，阴历毕入阳历"端"，阳历毕入阴历"端"。"竟"是完毕的意思，与上句"日满十三去之"相连，中华书局标点本把此句点入下句，不妥。

《律历志》又说："入历在前限余前，后限余后者，月行中道。"即入历$1\frac{665\frac{1738}{1878}}{4064}$日之前，或入历$12\frac{2019\frac{1079}{1878}}{4064}$日之后，由于月去黄道度数(兼数)很小，近似认为月行黄道(即所谓"中道")。

(5)求朔弦望定数。

就是求在定朔、定弦、定望时，月与黄道距离的度分数。前面说过，这要先求出定朔弦望入阴阳历的日分数〔参见第四章二节5(4)〕，再查表就能得到所求的"定数"了。定朔弦望等于平朔弦望加减入迟度历的盈缩定积分数，那么，定朔弦望入阴阳历的日分数，等于平朔弦望入阴

阳历的日分数和它入迟疾历的盈缩定积分数入阴阳历的日分数之和。即第一步：

平朔弦望入阴阳历的日、日余±平朔弦望入迟疾历的盈缩定积分入阴阳历大分、小分＝定朔弦望入阴阳历日和日余……………… (7.68)

第二步：由定朔弦望的入阴阳历日和日余，查表并计算得所求距黄道度分。

先看第一步算法：平朔弦望入阴阳历的算法见本节3(3)、(4)。(3)是推平朔入阴阳历法，(4)是由某月平朔入阴阳历数加2日余得到次月平朔的入阴阳历数，那么加2日余的二分之一得某月望的入阴阳历数，加2日余的四分之一得上弦，加四分之三得下弦。总之，平朔弦望的入阴阳历数算是已知的。

平朔弦望的入迟疾历数可由本章二节4(2)中的公式算出，包括日和日余二项。查表7.3得到由于入历日和日余产生的迟疾数、盈缩定积分，算法见前(7.36)式。因此，平朔弦望入迟疾历的盈缩定积分数也可以认为是已知的。下面求盈缩定积分入阴阳历数。

前面说过，盈缩分化为日乘日进分(月交分)就是它入阴阳历数，元嘉历没有日进分的参数，只有差率，而差率和日进分的关系是：

$$日进分=\frac{差率\times通数}{会数}$$

式中通数是指1纪章数($\frac{608}{19}=32$)，不是本章中的朔策分子(22207)；会数是指一会章数($\frac{会月}{章月}=\frac{939}{235}$)，也不是指本章中的会数180(在其他历法中，此数叫做会率，不称会数)。

盈缩定积分化为日的方法是：$\frac{盈缩定积分}{日法}\div差法$。单位是日(或度)，为与日进分单位相同，再乘章法19(每度＝19分)。

这样，盈缩定积分入阴阳历数就是：

$$\frac{盈缩定积分\times章法}{日法\times差法}\times\frac{差率\times通数}{会月/章月}=\frac{盈缩定积分\times章法\times差率\times通数\times章月}{日法\times差法\times会月}$$

其中日法：752＝16×47，16与分子中的通数32约简，通数变为2。与章月235相乘得470，约等于分母中会月的二分之一，日法变成了47(通

法）。上式变成：

$$\frac{\text{盈缩定积分}\times\text{章法}}{\text{通法}\times\text{差法}}\times\frac{\text{差率}}{2}=\text{盈缩定积分入阴阳历数} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (7.69)$$

《律历志》叙述上式说："各置入迟疾历盈缩定积分，以章岁乘之，差法除之。"显然后面还应有一句"半差率乘也"，否则，不能算是入阴阳历数。

在第四章二节5(4)有"求朔望定数"法，内容与这一部分完全相同，也漏掉了乘日进分(或差率)。区别在于乾象历更加粗疏，直接把"入迟疾历盈缩大小分"(小分变微分)加入"阴阳历日余"，什么"章法乘之"、"差法除之"，全都没有。不像文字脱漏，似乎本来如此。若果真这样，乾象历与元嘉历的优劣也就于是乎可分了。

(7.69)式计算所得，整数为大分，余数乘微分法以后化为微分〔如后(7.70)式〕，而后与平朔弦望入阴阳历的日余相加减，与乾象历一样是"盈减缩加"。即(7.69)式中的盈缩定积分若是盈积分，与平朔弦望入阴阳历日余相减，是缩积分则相加〔如后(7.71)式〕。相减时，若不够减，破"入阴阳历整日"为分，加入日余，而后再减。用文字式表示如下：

$$\frac{\text{盈缩定积分}\times\text{章法}\times\text{差率}}{\text{通法}\times\text{差法}\times 2}=\text{大分}\frac{\text{余数}}{\text{通法}\times\text{差法}\times 2}$$

$$=\text{大分}\frac{\dfrac{\text{余数}\times\text{微分法}}{\text{通法}\times\text{差法}\times 2}}{\text{微分法}}=\text{大分}\frac{\text{微分}}{\text{微分法}} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (7.70)$$

其中：$\text{微分}=\dfrac{\text{余数}\times\text{微分法}}{\text{通法}\times\text{差法}\times 2}$

$$\text{平朔入阴阳历日余}\mp\text{大分}\frac{\text{微分}}{\text{微分法}}=\text{定朔入阴阳历日余}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7.71)$$

平朔入阴阳历整日没有写入以上公式中。在(7.71)式的运算中，左端两项的微分相加若大于微分法，入大分；两项大分相加若大于月周，则入平朔入阴阳历日余，成为定朔入阴阳历日。小于月周，则由平朔入阴阳历日直接转为定朔入阴阳历日。

定朔入阴阳历日及日余既知，所求定数由下式算得：

$$\text{兼数}\pm\frac{\text{定日余}\times\text{损益率}}{\text{月周}}=\text{加时定数} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (7.72)$$

其中“兼数”由定朔入阴阳历日从表 7.7 中查得；“定日余”即定朔入阴阳历日余”。求弦望时，则是定弦或定望入阴阳历日余；“损益率”也由表 7.7 查得，损率兼数后用“－”号，益率兼数后用“＋”号；“加时定数”就是距黄道度分数。

定弦、定望的距黄道度分数可仿照以上定朔求法，由(7.70)、(7.71)、(7.72)式计算出来。

(6)推夜半入历。

本节 3(3)、(4)讲合朔入阴阳历，此处讲合朔日夜半入阴阳历。推算法与乾象历同〔参见第四章二节 5(5)〕：

$$\text{夜半入历}=\text{合朔入历日及余}-\frac{\text{差率}\times\text{朔小余}}{\text{微分法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.73)$$

(7)求次日夜半入历。

如第四章所说，每过 1 日，入阴阳历数增加如日进分。元嘉历无日进分参数，可按乾象历中的公式把它计算出来〔参见第四章二节 5(1)〕：

$$\text{日进分}=\text{退分}+\text{月行分} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.74)$$

其中：

$$\text{退分}=\frac{\text{通数}\times(\text{朔望合数}-\text{会岁})}{\text{会数}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.75)$$

此二式中有的参数是元嘉历所无，如会岁、月行分等，有的名称虽同，意义不同，如通数、会数等。按照乾象历中各参数的意义，代入元嘉历的基本数据，把以上参数逐一计算出来：

月行分即月周，乾象历的月周指每纪的月行周数；只有如此，月周才等于月行分。元嘉历的月周是半纪月行周，非是。所以：

$$\text{月行分}=\text{每年月行周}\times\text{纪法}=\frac{254}{19}\times 608=8128\text{。}$$

通数为 1 纪章数(元嘉历的通数为朔策分子)：$\frac{608}{19}=32$。

会数为 1 个会岁所含章数。

会岁为会月折合成的年数，对元嘉历：

$$=\text{会月}\div\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}=\frac{\text{会月}\times\text{章岁}}{\text{章月}}=\frac{939\times 19}{235}=\frac{17841}{235}=75\,\frac{216}{235}\text{。}$$

那么，会数$=\frac{会岁}{19}=\frac{939}{235}=3\frac{234}{235}$。

代入(7.75)和(7.74)两式，得：

$$退分=\frac{32(80-75\frac{216}{235})}{3\frac{234}{235}}=\frac{32\times959}{939}=32\frac{640}{939}$$

$$日进分=32\frac{640}{939}+8128=8160\frac{640}{939}$$

把日进分除以月周 8128 化为日得：

$$\frac{日进分}{月周}=\frac{8160\frac{640}{939}}{8128}=1\frac{32\frac{640}{939}}{8128}=1\frac{16\frac{320}{939}}{4064}日 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.76)$$

头日定数加此数即得次日定数，如《律历志》所说："求次日，加一日，日余十六，小分三百二十。小分如会月(939)从余，余满月周(4064)去之，又加一日。""又加一日"是说，除了按(7.76)式的计算结果，在头日入阴阳历日数中增加1日之外，由于日余超过了月周4064，在头日入阴阳历日数中再加1日。当然要从日余中减去4064，以余数作新的日余。

《律历志》又说："历竟，下日余满分日去之，互入历初也。不满分日者，值之。加余一千三百九十四，小分七百八十九半，为入次历。""历竟"就是到了阴阳历的末尾。即求次日入历，加入1日16分320小分，再次日再加，如此不止。直加到入阴(阳)历日数为13，日余>0，该日入于阴阳历的分日或分日以后，就是"历竟"。这时有两种情形，一是日余>分日，即入历日余超过了2685.5，这时从入历日余中减去2685.5分，余数入于下一周的阴阳历。上周为阳历，下一周就是阴历，反之亦然。像这样，阳历完了入阴历历初，阴历完了入阳历历初，就是所谓"互入历初也"。第二种情形是日余<分日。因未超出阴阳历1周，可置之不论，仍按没有"历竟"时的情形计算，欲入次历，须再过1日。设某日入阴阳历日，日余大分、小分分别是x、y、z，每过1日，x增1，y增16，z增320(如图7.3)。当$x+1=13$，$y+16>$分日，即$y+16-2685.5>0$

$x+1$
$y+16-2685.5$
$z+320$

图 7.3 次日入历数

时，设$y+16-2685.5=A$，A 为入下一周阴阳历数。当$x+1=13$，$y+16-2685.5<0$时，未入下周历，仍按历未竟时计算。当$y+16-2685.5<0$，欲入下周历，须从$x+1$借1日，化为4064分，入于y。入历日变为x（如图7.4），y变为$y+1394.5$。小数（0.5）化为469.5分入于z，因分母为939，0.5等于469.5分。y变为$y+1394$，z变为$z+789.5$。x如仍不小于13，就入下周历了，入历数是日余大分加1394，小分加789.5。

$$x+1-1=x$$
$$y+16-2685.5+4064=y+1394.5\rightarrow y+1394$$
$$z+320+469.5=z+789.5$$

图7.4　再加入下周历

(8)求夜半定日。

就是求在夜半定度（或叫做定夜半度）时，月距黄道度分数，第四章也有此目〔参见第四章二节5(7)〕，所给公式(7.74)似不如元嘉历细致。为清楚起见，再从头解释一番：

求夜半定度时黄、白道距，从理论上讲可分作三步：

第一步先求夜半定度。它等于以下两部分之和差，即：

夜半定度＝夜半平行度及余±夜半平行度入迟疾历的盈缩数。 …………………… (7.77)

那么，夜半定度的入阴阳历数也应由两部分组成，即第二步的计算式应是：

夜半定度入阴阳历数＝夜半平行度及余入阴阳历数±夜半平行度及余入迟疾历盈缩数的入阴阳历数 …………………… (7.78)

等式右边第一项可按本章四节3(6)和(7)中的公式计算，所得包括两项：夜半平行度及余入阴阳历日及日余。第二项由盈缩数乘日进分得到，所得只有日余（日余满月周得整日）。两项加后所得也有两项：一是夜半平行度及余入阴阳历的整日数，二是夜半平行度及余入阴阳历的日余加减它的迟疾盈缩数入阴阳历日余。由此可得第三步求法：

夜半定日＝夜半平行度及余入阴阳历的整日对应的兼数±（夜半平行度及余入阴阳历日余±夜半平行度及余的迟疾盈缩数入阴阳历日余）×损益率 …………………… (7.79)

括号内两项加减之前，须将单位制化同；乘损益率后再与兼数单位化同（除以月周）。将单位化同后的(7.79)式就是第四章中求夜半定日的公式(4.63)。

前面说元嘉历提供的求夜半定日的公式更加细致，主要是对括号内第二项的表达更加周详了。它是这样叙述的："以朔小余减入迟疾历日余，不足一日，却得周日，加余四百一十七，即月夜半入历日及余也。"末句应是"即月夜半入迟疾历日及余也"。即引文是讲推算夜半入迟疾历日数及日余的。本章二节4(2)有推合朔入迟疾历的公式(7.32)，可作如下变换：

$$\frac{\text{朔积分}+\text{入纪迟疾差}-n\cdot\text{通周}}{\text{日法}}=\text{入历日数}+\frac{\text{日余}}{\text{日法}}$$

$$\frac{(\text{积日分}+\text{朔小余})+\text{入纪迟疾差}-n\cdot\text{通周}}{\text{日法}}=\text{入历日数}+\frac{\text{日余}}{\text{日法}}$$

$$\frac{\text{积日分}+\text{入纪迟疾差}-n\cdot\text{通周}}{\text{日法}}=\text{入历日数}+\frac{\text{日余}-\text{朔小余}}{\text{日法}}$$

…………………………………………………………………… (7.80)

(7.80)式的左端显然是夜半入迟疾历数，它的日数与合朔入历日数相等，日余等于合朔入历日余减朔小余所得差。以上引文的第一句意义就是讲：夜半入迟疾历的日余等于"以朔小余减（合朔）入迟疾历日余"。

倘若不够减，应从"入历日"中借1日，化为分（数目等于日法），并入迟疾历日余，再减。按通常文法应叙述为："不足，加日法而减之，却一日。"《律历志》只有"不足一日"四字，显见文有脱漏。

"却一日"是指从入历日中借1日之后，入历日减少了1日，或"却后一日"。所借日化为日法分并入日余。但当所借之日是"周日"（迟疾历的最后日）时，周日只有417分，不能化为日法752分，只有417分加入日余。对这一层意思，《律历志》说："却得周日，加余四百一十七。"

得到夜半入迟疾历日和日余之后，入迟疾历的盈缩数等于入历日对应的盈缩积分和入历日余的盈缩数之和，即：

$$\text{夜半入迟疾历盈缩数}=\text{入历日之盈缩积分}\pm\text{入历日余}\times\text{损益率}$$

…………………………………………………………… (7.81)

《律历志》称(7.81)式右端为定积分。

定积分化日后乘日进分为夜半迟疾盈缩数入阴阳历数，就是

(7.79)式括号中第二项值。

定积分(盈缩数)化日:先除日法化为日度(单位制 1 度＝19 分),再乘 16,化为周天分(单位 1 度＝304 分,缩小了 16 倍),再除以月周(每日行分),就化成了月行日。再与日进分相乘,即:

$$\frac{\text{定积分}\times 16}{\text{日法}\times\text{月周}}\times\text{日进分}=\text{定积分入阴阳历日余}$$

前文说过,若每纪(608 年)月行周数(8128)为月周,元嘉历的日进分是 $8160\,\frac{640}{939}$,代入上式:

$$=\frac{\text{定积分}\times 16}{752\times 8128}\times 8160\,\frac{640}{939}=\frac{\text{定积分}\times 16\times \overset{478930}{\cancel{7662880}}}{\underset{47}{\cancel{752}}\times 8128\times 939}$$

$$=\frac{\text{定积分}}{47}\times\frac{\cancel{16}\times 478930}{\underset{508}{\cancel{8128}}\times 939}\approx\frac{\text{定积分}}{\text{通法}}\times 1.004\approx\frac{\text{定积分}}{\text{通法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7.82)$$

因此,《律历志》说:定积分"满通法为大分"。"大分"就是本节 3(3)"推入阴阳历术"中的大分。不满通法的余数要化为小分,方法是余数乘会月。因微分分母是微分法,等于 2 倍会月,小分与微分是同级的。

$$\frac{\text{定积分}}{\text{通法}}=\text{大分}\frac{\text{余数}}{\text{通法}}=\text{大分}\frac{\frac{\text{余数}\times\text{会月}}{\text{通法}}}{\text{会月}}=\text{大分}\frac{\text{小分}}{\text{会月}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7.83)$$

《律历志》说:"不尽以会月乘之,如法为小分。""如法"之"法"显系指(7.83)式中的通法。

(7.83)式中的大分、小分,就是夜半迟疾历盈缩数入阴阳历日余,亦即(7.79)式括号中的第二项。《律历志》以下叙述就与乾象历相同了:

"以盈加缩减(夜半平行度)入阴阳(历)日余,盈不足进退日而定也。以定日余乘损益率,如月周,以损益兼数,为夜半定数。"

其中说的"定日余",指(7.79)式,括号内的部分:夜半入阴阳历日余与夜半迟疾盈缩数入阴阳历日余之和。"和"是指代数和,或加或减,减时若不够减,也要从入阴阳历整日中借 1 日。加后所得大于月周,化为整日入"入阴阳历日数"中去,就是所谓"盈不足进退日而定也"。"盈"指加后大于月周,"进"1 日;"不足"即不够减,要"退"1 日。《律历志》这一部分叙述用文字式表示如下:

$$兼数 \pm \frac{(入阴阳历日余 \pm 大分\frac{小分}{会月}) \times 损益率}{月周}$$

$$= 夜半定数 \quad \cdots\cdots (7.84)$$

与(7.79)式对照观看，式中各项意义自明。

从以上解释可知，元嘉历把求"夜半定日"中"平夜半迟疾盈缩数入阴阳历日余"这一项的算法讲得很清楚，先由合朔入迟疾历日余求夜半入迟疾历日余〔(7.80)式〕，再由入迟疾历日和日余求出入历盈缩数，即所谓"定积分〔(7.81)式〕，然后算出定积分入阴阳历日余的近似值来。至此迟疾盈缩数入阴阳历日余才计算出来。此数既出，(7.79)式中其他各项都不必再解释，直接用(7.84)式算出所求的"夜半定日"就非常容易了。

(9)求昏明数。

与乾象历求法相同〔参见第四章二节5(8)〕：

$$明时数 = \frac{所近节气夜漏数}{200} \times 损益率 \quad \cdots\cdots (7.85)$$

$$昏时数 = 损益率 - \frac{所近节气夜漏数}{200} \times 损益率 \quad \cdots\cdots (7.86)$$

$$= (1 - \frac{所近节气夜漏数}{200}) \times 损益率$$

$$明定数 = 夜半定数 \pm 明时数$$

$$= 夜半定数 \pm \frac{所近节气夜漏数 \times 损益率}{200} \quad \cdots\cdots (7.87)$$

$$昏定数 = 夜半定数 \pm 昏时数$$

$$= 夜半定数 \pm (1 - \frac{所近节气夜漏数}{200}) \times 损益率 \quad \cdots\cdots (7.88)$$

(10)求月去黄道度。

这一部分是第四章"求月去极度"的前半节。

前面讲了推算朔、弦、望定数，夜半定数，昏、明定数都是求的月距黄道数，这些数是用兼数表示的。兼数的单位是分，单位制是1度=12分。这一节是要把兼数分化为度。方法很简单，把前所得兼数除12即得。小数部分按12分法命名为少、半、太，强、弱之类，如《律历志》所述(参见第三章图3.10)

以上可见，何承天历虽有改作，多未施行。施行者，大致属乾象历余绪，是古历、旧历交替过程中的历法。

何承天历自宋元嘉二十二年(445年)施行，迄齐及梁天监中(510年)，将近七十年。

第八章　祖冲之大明历的贡献

南北朝是中国古历转变到旧历的重要时期，而祖冲之的大明历是中国第一部典型的旧历时期的历法。

祖冲之《大明历》载于《宋书·律历志下》，据志载，表呈朝廷在刘宋大明六年(462年)，由于受同僚戴法兴等人非难，未及施行。梁天监中正式颁行，直到南陈灭亡。

由祖冲之献历表所称，大明历的特点有五，即所谓"改易之意有二，设法之情有三"。前者指改变闰法和设立岁差，这是中国历法史中的两大变革。后者指"以子为辰首"，不像以往始于寅；以甲子年为上元；七曜运行，皆始上元。这三条设法今日看来，都无所谓，有的(如"七曜同元")甚至可以说是倒退。但这些都是末节，与他的贡献相比不过是尺玉微瑕。

一、大明历诸参数

1. 朔望月系统

大明历取朔望月 $29\frac{2090}{3939}$日，即：朔策 $=29\frac{2090}{3939}=\frac{116321}{3939}$日。

其中分子 116321 为"月法"，分母 3939 为"日法"。

2. 回归年系统

回归年天数取 $365\frac{9589}{39491}$日，即：回归年 $=365\frac{9589}{39491}=\frac{14423804}{39491}$日。

其中 9589 为"岁余"，39491 为"纪法"。按惯例 14423804 应该叫做"周天"，但大明历另设周天为 14424664，姑且称前者为"岁分"(此名为笔者所拟)。周天比岁分大 860 分，1 岁不及 1 周天。因此，冬至点岁岁西移 860 分(每度 39491 分)，约 45.92 年移 1 度，就是大明历采用的岁

差，戴法兴批评说它“四十五年九月率移一度”，其实是45年11月左右移1度。

3. 岁余

一个回归年除去6甲子（360日），余$5\frac{9589}{39491}$日，而$5\frac{9589}{39491}=\frac{207044}{39491}$。其中207044叫做“余数”。$5\frac{9589}{39491}$为1年没数，每没日数为：

$$365\frac{9589}{39491}\div5\frac{9585}{39491}=\frac{3605951}{51761}=69\frac{34442}{51761}\text{日}$$

其中3605951为“没分”，51761为“没法”。

4. 闰月周期

大明历采用的闰月周期是每391年144闰。其中391年为章岁，144为章闰。每年所含朔望月数为$12\frac{144}{391}$，即分1月为391分，每年12个月之外，另有月分144，置为“闰月”。把这144分平均入12月中，每月有闰分12分，12名为“闰法”。

又$12\frac{144}{391}=\frac{4836}{391}$。每391年4836个月，4836名为“章月”。

已知纪法39491，$\frac{\text{纪法}}{\text{章岁}}=\frac{39491}{391}=101$，即每纪101章。

同样设元法592365，$\frac{\text{元法}}{\text{纪法}}=\frac{592365}{39491}=15$，即1元＝15纪＝1515章。

5. 近点月系统

大明历采用的近点月为$27\frac{14631}{26377}\text{日}=\frac{726810}{26377}$。其中726810为“通周”，26377为“通法”。

6. 交会周期

大明历不立会月、会率，而把阴阳历1周作为交会周期，为此立参数会周。若把月亮每日行分取为通法（26377）分（类似于元嘉历等历法中的月周），那么，月行阴、阳历各一周的总分数就是会周（717777）。前面说过计算阴（阳）历周期的公式是：

$$\frac{周天}{2} \div 月周 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.1)$$

大明历的计算公式是：

$$\frac{会周}{2} \div 通法 = \frac{717777}{2} \div 26377 = \frac{358888.5}{26377} = 13\frac{15987.5}{26377} \cdots\cdots\cdots \quad (8.2)$$

后面将会看到：358888.5 叫做"交数"，15987.5 叫做"日余"。阴阳历各 1 周，共 $27\frac{5598}{26377}$日，为交点月。比近点月小。

大明历的朔望合数取为$\frac{1}{2}$朔望月$=14\frac{3014.5}{3939}$日，与阴(阳)历 1 周的差叫做"前限"，即：

$$前限 = \frac{1}{2}朔望月 - \frac{1}{2}\ \frac{会周}{通法}$$

$$= 14\frac{3014.5}{3939} - 13\frac{15987.5}{26377}$$

$$= 14\frac{3014.5 \times 2029}{3939 \times 2029} - 13\frac{15987.5 \times 303}{26377 \times 303}$$

$$= 1\frac{1272208}{26377 \times 303}$$

$$= 1\frac{4198\frac{214}{303}}{26377}$$

$$= 1\frac{4198\frac{428}{606}}{26377}日$$

后限＝阴(阳)历 1 周－前限

$$= 13\frac{15987.5}{26377} - 1\frac{4198\frac{428}{606}}{26377}$$

$$= 12\frac{11788\frac{481}{606}}{26377}日$$

计算前限、后限的方法曾经有两种：一是乾象历直到何承天元嘉历的方法，由朔合分、限分得前限、后限；再就是杨传景初历的方法，由会率求朔望合数作前限，会通(或称会月等)与朔望合数的差作人交限，为

后限。祖冲之法另辟蹊径，求朔望合数不由会率。这样，不必再以会月除会率为交食周期（大多直接以一交日数为周期），给交蚀的计算别开一天地，而且使运算更加简便了。

还应该说明的是，(8.1)、(8.2)式虽然形式雷同，内容却不同，大明历的月周不等于通法，周天也不等于会周。甚至连比例也不相同①。

7. 微小分

还有一对参数小分法和行分法：小分法＝1717，行分法＝23。两者乘积等于纪法，即：纪法＝行分法×小分法＝1717×23＝39491。这是在计算日行若干回归年比相同周天数少行多少分时，为处理余数采取的一种方法〔参见本章二节3(3)〕：缩小分母（纪法）后再除，获得二级、三级商。

8. 差率

差率＝39。乾象历、元嘉历都有差率。前者等于朔望合数与会月的和，后者等于二者和的10倍。都没有实际意义，不过是运算过程中的一个比例数而已。大明历的差率是个比例数，数值大小等于日法(3939)的一百零一分之一。

9. 虚分

就是斗分数，大明历周天起于虚宿初度，因名为虚分。周天/纪法＝$14424664/39491=365\frac{10449}{39491}$，其中斗分数10449名为虚分。

二、计算法

1. 气朔闰的计算

(1)推朔术，即推算所求年天正月朔日名。方法与以前的其他历法

---

①大明历闰法是391年144闰，每年朔望月数是$12\frac{144}{391}$，日和月的相对速度比是$1:12\frac{144}{391}$，日每天行1度，月对日行$12\frac{144}{391}$度，恒星速度是$13\frac{144}{391}$度/日，或$13\frac{144}{391}$周/年。那么，每纪行周$13\frac{144}{391}\times39491=527927$，这应是大明历的月周。由此列比例式："周天：会周"应该等于"月周：通法"。实际却不相等，这主要是周天和岁分不同造成的。

相同，分作三步：

第一步求积月：

$$\frac{\text{上元以来年数}\times\text{章月}}{\text{章岁}}=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}} \cdots\cdots \quad (8.3)$$

闰余在247（等于章岁减闰余之数）以上，所求年有闰。

第二步求积日：

$$\frac{\text{积月}\times\text{月法}}{\text{日法}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{日法}} \cdots\cdots \quad (8.4)$$

小余在1849以上（此数为日法和朔余的差3939－2090），天正月大，否则是小月。

第三步由积日求朔日大余：

积日－60n＝大余（n为自然数或0，且使0≤大余≤60）。

以元首日名甲子起算，大余算外就是所求日名。

（2）推次月朔日名。大明历每月$29\frac{2090}{3939}$日，求次月，在头月大、小余上加此数即得，即：

头月大余＋29＝次月大余（次月大余大于60则除去之，以余数为大余）……（8.5）

头月小余＋2090＝次月小余（次月小余若大于日法3939，则化为整日入大余，以余数为小余）……（8.6）

由次月大余求次月朔日名如前法。

（3）求弦望日名。由于$29\frac{2090}{3939}\div 4=7\frac{1507\frac{1}{4}}{3939}$日，求上弦：

朔日大余＋7＝上弦大余（满60则除去之）……（8.7）

朔日小余＋$1507\frac{1}{4}$＝上弦小余（满日法则入大余）……（8.8）

求望日：

上弦大余＋7＝望日大余（满60除去之）……（8.9）

上弦小余＋$1507\frac{1}{4}$＝望日小余（满日法则入大余）……（8.10）

求下弦：

望日大余＋7＝下弦大余（满60除去之）……（8.11）

望日小余$+1507\frac{1}{4}=$下弦小余(满日法则入大余) ………… (8.12)

由大余推日名如前法。

(4)推闰月。由本节1(1)推知所求年有闰、无闰后,倘若有闰,本节推算闰月在该年的位置,即推算是闰几月。推法与前述各历同。

$$\frac{\text{章岁}-\text{闰余}}{\text{闰法}}=\text{闰月序数}\frac{\text{余数}}{\text{闰法}} \quad \cdots\cdots (8.13)$$

闰余为(8.3)式的运算结果之一,此外,由于采取天中置闰法,闰月位置还受中气制约,(8.13)式算得的闰月序数有进退1月的可能性。所以,算出闰月序数后,再由中气位置检验之,该月无中气,才是真闰月。否则,由中气定闰月所在。

闰月序数是闰月的月序数,不是闰月名。自天正月起算,序数是几,第几月是闰月。闰月名则由前月序数加"闰"字构成,如前月是五月,下月闰,称闰五月。

(5)推冬至日名。同样用冬至甲子日法:

$$\frac{\text{上元以来积年}\times\text{余数}}{\text{纪法}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots (8.14)$$

积日$-n\cdot 60=$冬至大余(n为自然数或0,且满足$0\leqslant$冬至大余$\leqslant 60$)
………………………………………… (8.15)

由冬至大余推冬至日名如前法。

(6)推其余诸气日名。由于1气$=15\frac{8626\frac{5}{6}}{39491}$日:

次气大余=头气大余+15(满60则除去之)………………… (8.16)

次气小余=头气小余$+8626\frac{5}{6}$(满纪法则入大余) ………… (8.17)

(8.17)式中的分子"5",《律历志》称为小分,小分满6入小余。由大余推日名如前法。

2. 杂推

(1)推五行用事日。五行分主全年,每行所主:$365\frac{9589}{39491}\div 5=73\frac{1917.8}{39491}$日。

而一年四季，每季：

$$365\frac{9589}{39491}\div 4=91\frac{12270}{39491}\text{日}$$

因而，每季分别自四立（立春、立夏、立秋、立冬）始，木、火、金、水四行各主 $73\frac{1917.8}{39491}$ 日，每季所余 $18\frac{10352.2}{39491}$ 日（$91\frac{12270}{39491}-73\frac{1917.8}{39491}=18\frac{10352.2}{39491}$ 日）归土王所主，四季土王所主也是 $73\frac{1917.8}{39491}$ 日（$18\frac{10352.2}{39491}\times 4=73\frac{1917.8}{39491}$ 日）。四立日名是已知的，那么，由冬至大、小余，推算五行所主初日的日名，也就是判定土王初日的大、小余。方法是：

冬至后全年余三个节气，共 $45\frac{25880.5}{39491}$ 日，减去末尾土王所主 $18\frac{10352.2}{39491}$ 日，余 $27\frac{15528.3}{39491}$ 日（$45\frac{25880.5}{39491}-18\frac{10352.2}{39491}=27\frac{15528.3}{39491}$ 日）。即：

冬至大余＋27＝冬季土王初日大余（满 60 除去之） …………（8.18）

冬至小余＋15528.3＝冬季土王初日小余（小余满纪法入大余） …………（8.19）

自冬季土王初日起，一季（$91\frac{12270}{39491}$ 日）之后为春季土王所主，即：

冬季土王初日大余＋91＝春季土王初日大余（满 60 除去之） …………（8.20）

冬季土王初日小余＋12270＝春季土王初日小余（满纪法入大余） …………（8.21）

再加得夏季、冬季。

由大余推日名如前法。

以上算式中（8.19）式与《律历志》小有出入，《律历志》小余加15528，脱漏小数 0.3。

（2）推没术。因《律历志》有“命日以冬至”的话，所求为冬至后的第一个没日到冬至的日数。由以前说过的对没的理解，应采取如下算法：

$$\left(1-\frac{冬至小余}{纪法}\right)\times\frac{没分}{没法}=积日\frac{日余}{没法}$$

积日满甲子周(60)则除去之。余为没日距冬至日数。自冬至日名起算，算外就是所求没日。把上式左端变换为《律历志》叙述的形式：

$$\left(1-\frac{冬至小余}{纪法}\right)\times\frac{没分}{没法}=\frac{没分-冬至小余\times\frac{没分}{纪法}}{没法}$$

《大明历》没分：3605951，纪法：39491。$\frac{没分}{纪法}=\frac{3605951}{39491}\doteq 91.31$，约略等于 90，代入上式得：

$$\frac{没分-冬至小余\times 90}{没法}=积日\frac{日余}{没法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8.22)$$

(8.22)式就是《律历志》描述的公式，惟一不同是《律历志》把(8.22)式中的"积日"称为"日"(为避免混淆，笔者所改)。

(3)求次没。前面说过，每没 $69\frac{34442}{51761}$日，由头没求次没，加此数即得：

$$积日+69=次没积日 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8.23)$$

$$日余+34442=次没日余 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8.24)$$

照例，次没积日满 60 则除去之，次日日余满没法入积日。自冬至起算，积日算外为所求日名。

此外，所求没日日余为 0 时，此没日称为"灭"日。

3. 推日月度分

(1)推日所在度。即推算天正十一月朔日夜半时，日在天球上的位置(赤道度分数)。积日数就是日行度数，因而得公式：

$$\frac{朔积日\times纪法-n\cdot周天}{纪法}=积度\frac{度余}{纪法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8.25)$$

《律历志》把(8.25)式左端分子中的"朔积日×纪法"叫做"度实"。此外，(8.25)式中 n 为自然数，且使左端分子大于(或等于)0，小于周天。

所得积度自虚宿初度起始，依次命以各宿度数，至某宿不能尽该宿度，算外为入该宿度。即所求天正十一月朔夜半日所在度。

(2)求次月。即求次月朔夜半日所在度。

头月为大月：头月积度＋30＝次月度 ………………………… (8.26)

头月为小月：头月积度＋29＝次月度 ………………………… (8.27)

《律历志》称“次月度”为“入虚去度分”。

(3)求行分。《律历志》所给公式是：

$$\frac{\text{度余}}{\text{小分法}}=\text{行分}\frac{\text{小分}}{\text{小分法}} \qquad (8.28)$$

$$\frac{\text{行分}}{\text{行分法}}=\text{度}\frac{\text{余}}{\text{行分法}} \qquad (8.29)$$

“度余”是(8.25)式的计算结果之一。为明了“行分”的意义，从(8.25)式分析起：

(8.25)式右端：$\frac{\text{度余}}{\text{纪法}}=\frac{\text{度余}}{\text{小分法}\times\text{行分法}}=\frac{\text{度余}/\text{小分法}}{\text{行分法}}$

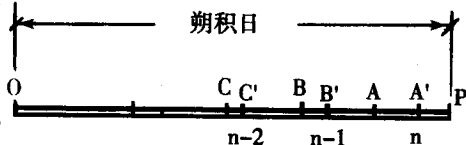
分子与(8.28)式左端相等，用右端代入：

$$=\frac{\text{行分}\frac{\text{小分}}{\text{小分法}}}{\text{行分法}}$$

再代入(8.29)式的右端：$=\text{度}\frac{\text{余}\frac{\text{小分}}{\text{小分法}}}{\text{行分法}}$

可见行分、小分都是(8.25)式中度余的一部分，为何叫做“行分”呢？

图 8.1 行分图

如右图 8.1，O 为上元，P 为所求年天正月夜半，OP 为朔积日。由于大明历周天大于岁分，P、A、B、C……为岁分点，而 A'、B'、C' 是相应的周天 O 分点。

(8.25)式之中，“朔积日×纪法$-n$・周天”相当于 $A'P$ 的长度。显然，$A'P$ 是日行超过 n 周天，或进入第 $n+1$ 周天以后所经度分数。《律历志》只把 $A'P$ 中的零分称为行分和小分，而把整度称为日所在度〔(8.25)式中叫做“积度”〕，而事实上度和小分也是行度、行小分。

(4)求次日行分。由以上分析，日行分是(8.25)式中的度余，日行度则是(8.25)式计算得的积度。此日的日行比头日增 1 度，行分不变。即：

次日行度＝头日积度＋1 ………………………………… (8.30)

《律历志》说："求次日，加一度。"就是指的(8.30)式。《律历志》又说："入虚去行分六，小分一百四十七。"这句话是说求日所在宿度时，若经虚宿除了去掉整度之外，还要去掉周天零分。乾象历认为周天度始于斗宿(牛前5度)，周天度的零分(145分)在斗宿末，称为斗分，《律历志》说"经斗除分"。元嘉历周天始于室宿2度，周天度畸零分(75分)在室宿末，《律历志》说"经室去度分"。《大明历》以周天始于虚宿初度，周天度畸零分在虚宿前，《律历志》便说"入虚去度分"[①]〔见本章二节3(2)〕。

此处讲"入虚去行分六，小分百四十七"，与"入虚去度分"是一样的。"去度分"指周天度的零分10449分(大明历周天为365度10449分。1度＝39491分)，化为行分、小分后就是"去行分六，小分百四十七"：

$$\frac{10449}{39491}=\frac{10449}{1717\times 23}=\frac{6\frac{147}{1717}}{23}$$

(5)推月所在度术。即推算天正十一月朔日夜半月所在宿度分。自乾象历以下都是以朔积日乘以月亮的恒星速度，减周天度得到。只有四分历除此之外，还提供了由朔小余计算月夜半度的方法。大明历就是按此法计算的。

如图8.2，合朔时日月同度都在A点，夜半与合朔相差时间为$\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}$，在这样长的时间内，日行度为$\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}\times$日速，等于$AB$长度；月行度为$\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}\times$月速，等于$AC$长度。(8.25)式已算得夜半日度，那么：

$$\begin{aligned}\text{夜半月度}&=\text{夜半日度}-BC=\text{夜半日度}-(AC-AB)\\&=\text{夜半日度}-\left(\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}\times\text{月速}-\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}\times\text{日速}\right)\end{aligned}$$

① 《宋书·律历志下》，中华书局1987年版，第293页。

$$=夜半日度-\left[\frac{朔小余}{日法}\times(月速-日速)\right]$$

月、日速都指相对于恒星的速度，而"月速－日速"是"月对日速度"，代入上式：

$$夜半月度=夜半日度-\frac{朔小余}{日法}\times月对日速 \quad\cdots\cdots\quad (8.31)$$

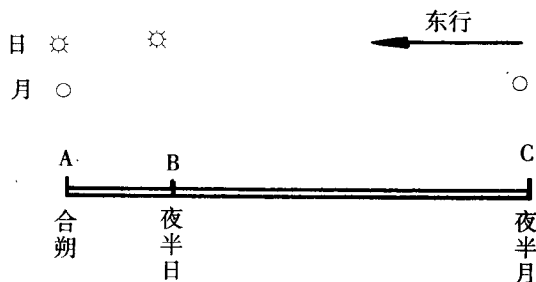



图 8.2　夜半月位图

对于以往历法，月对日速等于每个回归年的月数，如四分历等历为 $12\frac{7}{19}$度/日。大明历周天、岁分不同，月对日速也不同，可以这样推算：日绕天 1 周需$\frac{周天分}{纪法}$日，月绕地 1 周需$\frac{月法}{日法}$日，日、月速度比即月对日速度为：

$$\frac{周天分}{纪法}\div\frac{月法}{日法}=\frac{周天分\times日法}{纪法\times月法}$$

代入(8.31)式：

$$夜半月度=夜半日度-\frac{朔小余}{日法}\times\frac{周天分\times日法}{纪法\times月法}$$

$$=夜半日度-朔小余\times\frac{周天分/月法}{纪法}$$

$$=夜半日度-朔小余\times\frac{124\ \frac{860}{月法}}{纪法}$$

$$=夜半日度-\frac{(124\times朔小余)\frac{860\times朔小余}{月法}}{纪法}$$

$$=\text{夜半日度}-\frac{\text{度余}\frac{\text{微分}}{\text{月法}}}{\text{纪法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.32)$$

其中度余＝124×朔小余，860×朔小余为微分。

(8.32)式就是《律历志》所述公式。

(6)求次月。即求次月夜半月度。头月朔夜半月度加 30 天月行度或 29 天月行度，分别得大、小月的次月朔夜半月度。

上节说月对日速为$\frac{\text{周天分}\times\text{日法}}{\text{纪法}\times\text{月法}}$，月速(对恒星速度)为：

$$\frac{\text{周天分}\times\text{日法}}{\text{纪法}\times\text{月法}}+1$$

$$\text{大月：}(\frac{\text{周天分}\times\text{日法}}{\text{纪法}\times\text{月法}}+1)\times30 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.33)$$

$$\text{小月：}(\frac{\text{周天分}\times\text{日法}}{\text{纪法}\times\text{月法}}+1)\times29 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.34)$$

代入数据后化简，对于(8.33)式：

$$(\frac{14424664\times3939}{39491\times116321}+1)\times30=\frac{14424664\times3939\times30}{39491\times116321}+30$$

$$=\frac{124\,\frac{860}{116321}\times3939\times30}{39491}+30$$

$$=\frac{14653953\,\frac{77967}{116321}}{39491}+30$$

$$=401\,\frac{2792\,\frac{77967}{116321}}{39491}$$

减去周天度($\frac{14424664}{39491}=365\,\frac{10449}{39491}$)：

$$401\,\frac{2792\,\frac{77967}{116321}}{39491}-365\,\frac{10449}{39491}=35\,\frac{31834\,\frac{77967}{116321}}{39491}\text{度}$$

即是说，头月若是大月，头月朔夜半月度分加 35 度 31834 分 77967 微分，就得到次月朔夜半月度分。《律历志》称分为“度余”。

对于(8.34)式：

$$\left(\frac{14424664\times3939}{39491\times116321}+1\right)\times29$$

$$=401\frac{2792\frac{77967}{116321}}{39491}-\left(\frac{14424664\times3939}{39491\times116321}+1\right)$$

$$=401\frac{2792\frac{77967}{116321}}{39491}-13\frac{14573\frac{14231}{116321}}{39491}$$

$$=387\frac{27710\frac{63736}{116321}}{39491}$$

照例除去1周天：

$$387\frac{27710\frac{63736}{116321}}{39491}-365\frac{10449}{39491}$$

$$=22\frac{17261\frac{63736}{116321}}{39491}\text{度}$$

即是说，头月若是小月，头月朔夜半月度分加22度17261分63736微分，就得到次月朔夜半月度分。

得到夜半度后，从虚初度始，依次除去各宿度数，经虚宿时还要除去周天零分(10449分)，即所谓“经虚去度分”。至某宿所余度不足减该宿度，余度就是入该宿度数。

4. 迟疾历

(1)迟疾历表：大明历迟疾表数据较复杂(见表8.1)。

表分4栏，中华书局1987年版《宋书・律历志下》“校勘记”〔五二〕点明了每栏数据的计算法：

$$\text{损益率数}=\frac{|\text{月平行分}-\text{月实行分}|\times\text{日法}}{\text{通法}}\quad\cdots\cdots\quad(8.35)$$

表 8.1　大明历迟疾表

月行度	损益率	盈缩积分	差法
一日 14°行分 13	益　70	盈初	5304
二日 14°行分 11	益　65	盈　1842316	5270
三日 14°行分 8	益　57	盈　3550706	5219
四日 14°行分 4	益　47	盈　5058208	5151
五日 13°行分 22	益　34	盈　6297857	5066
六日 13°行分 17	益　22	盈　7202691	4981
七日 13°行分 11	益　6	盈　7772710	4879
八日 13°行分 5	损　9	盈　7940952	4777
九日 12°行分 22	损　24	盈　7707415	4675
十日 12°行分 16	损　39	盈　7072100	4573
十一日 12°行分 11	损　52	盈　6035007	4488
十二日 12°行分 8	损　60	盈　4663100	4437
十三日 12°行分 6	损　65	盈　3090302	4403
十四日 12°行分 4	损　70	盈　1383580	4369
十五日 12°行分 5	益　67	缩　457069	4386
十六日 12°行分 7	益　62	缩　2230755	4420
十七日 12°行分 10	益　55	缩　3870514	4471
十八日 12°行分 14	益　44	缩　5309385	4539
十九日 12°行分 19	益　32	缩　6480404	4624
二十日 13°行分 1	益　19	缩　7316608	4709
二十一日 13°行分 7	益　4	缩　7817996	4811
二十二日 13°行分 13	损　11	缩　7917607	4913
二十三日 13°行分 19	损　27	缩　7615440	5015
二十四日 14°行分 1	损　39	缩　6901495	5100
二十五日 14°行分 6	损　52	缩　5872735	5185
二十六日 14°行分 10	损　62	缩　4499159	5253
二十七日 14°行分 12	损　67	缩　2857732	5287
二十八日 14°行分 14①	损　74	缩　1082379	5321②

其中“月平行分一月实行分”，校勘者称为“损益率小分”。

① 脱小分 1010，算法见后。
② 应作 5331，说见后文。

$$盈缩积分数=(各日盈缩率小分\times 101-30)\times 39+34(或 35)+各日前盈缩积分 \quad\cdots\cdots (8.36)$$

其中"(各日盈缩率小分×101－30)×39＋34(或 35)",校勘者称为"各日之盈缩分"。

$$差分=各日月实行分-日行分(391) \quad\cdots\cdots (8.37)$$

下面对以上三式做些说明。

(8.35)式中的"月平行分",就是月的平均速度(平均每日行分)。亦即本节 3(6)中说的月对恒星速度:

$$\frac{周天\times 日法}{纪法\times 月法}+1$$

单位是度/日,命 1 度＝章岁分(391 分),月的平均速度表达式可以写为:

$(\dfrac{周天\times 日法}{纪法\times 月法}+1)\times 章岁 \doteq 5227.29$,取整数为 5227。自然科学史研究所的陈美东及紫金山天文台的张培瑜在 1987 年的一篇论文中曾给出上式[①]。事实上,由于取值精确度很小,上式可以不用,直接把岁分作周天,用与以往历法相同的方法,直接由$(\dfrac{回归年天数}{朔望月天数}+1)$得到。

"月实行分",就是表中的"月行度",度下小字为行分,分母是行分法 23。为了与平均行分 5227 的分母(章岁 391)齐同。要把行分乘 17,变成分母为 391 的普通分。

(8.35)式右端分子中"|月平行分－月实行分|"表示二者差的绝对值。运算中,平行数大,平行减实行;实行数大,则用实行减平行。

问题在于乾象历、元嘉历的损益率都是月平行与实行分差,大明历为何还要乘日法、除通法?前述陈、张论文说,大明历损益率的公式是:$\dfrac{(A_m-B)\times C}{B}$。其中 A_m 为月实行分,B 为平行分,C 为$\dfrac{A_m-B}{B}$的一个"特定"分母值,等于 2×章岁。而损益率的含义是"月亮相对于恒星运行 1 分时,月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差"。由

① 参见陈美东、张培瑜著《月离表初探》,《自然科学史研究》第 6 卷第 2 期。

此可知，大明历的损益率与前此以往的历法不同，它表示的是：月亮实行、平行分差相对于平行分的变化率。而实际情形是 $C\neq 2$ 章岁，而等于日法；B 也不是月平行分，而是通法[①]。

乘日法、除通法仅仅是为运算方便，并无理论意义。在求入历日和日余时〔参见本节 4(2)〕，要把朔积日乘通法，得到的日余分扩大了"通法分"倍，由日余求损益数时就要缩小"通法分"倍。此外，朔积日每日等于日法分，作日余等于缩小了"日法分"倍，求损益数时要扩大"日法分"倍。若不将表中数据缩小通法倍，扩大日法倍，在以后求盈缩数的运算公式中也要有这两步运算。在前述乾象历、元嘉历中，计算迟疾盈缩数都要除上一个差分（或叫做"定差分"），而大明历则没有这类参数，直接用日余乘损益率，虽然也除一个差率，已如前述，它只是个比例数，与乾象历、元嘉历的差分、定差分根本不同。所以，(8.35)式中乘日法、除通法只是把本该在运算过程中完成的工作在表中固定下来，从而使运算简单化，属于运算技巧。

(8.36)式右端分为二部分：当日盈缩分及该日以前盈缩分的累积数。第一项"各日盈缩率小分"指当日实行分与平行分之差，分母是章岁。如 1 日实行度分 $14\frac{13}{23}$（14 度行分 13），减平行度分（近似值）$13\frac{144}{391}$，得：$14\frac{13}{23}-13\frac{144}{391}=\frac{5695}{391}-\frac{5227}{391}=\frac{468}{391}$。其中 468 就是迟疾历第一日的"盈缩率小分"，同样可算得第二日的"盈缩率小分"是 434（算法：$14\frac{11}{23}-13\frac{144}{391}=\frac{434}{391}$），第三日的"盈缩率小分"是 383（$14\frac{8}{23}-13\frac{144}{391}=\frac{383}{391}$）等。

"当日盈缩分"的算式：（各日盈缩率小分 $\times 101-30$）$\times 39+34$（或 35）＝各日盈缩率小分 $\times$ 日法 -1136（或 1135）。其中"39"为差率。乘日法是为了与损益率一致；不除以统法是由于运算过程中不乘统法；减

---

①若取 $B=5227$（月平行分），$C=2$ 章岁，$\frac{C}{B}\approx\frac{\text{日法}}{\text{通法}}$。但大明历不直接用 C/B，而用它们的近似值，与理不合，陈、张公式不是大明历的原意。

1136（或 1135）是个修正数，因各日盈缩率小分＝实行分－平行分，平行分＝$\frac{周天\times日法}{纪法\times月法}+1\approx5227.28834/391$。分子约为 5227.28834，实际用 5227，实行分少减了 0.28834。乘日法后，少减了 0.28834×3939＝1135.77126≈1136（或 1135）。值得注意的是，要使修正值在 1135～1136 之间，平行分至少要计算到小数后第四位，而算式中只取整数。祖冲之这位把 π 值计算到小数后 6～7 位之间的大数学家处处表现出他精细的头脑来。

既然修正值是为弥补（实行分－平行分）×日法产生的误差，当平行分大于实行分，上式误差不是少减了 1136（或 1135），而是多减了同样的数值，这时（8.36）式中“当日盈缩分”这一部分应该变成：

（平行分－实行分）×3939＋1136（或 1135）

它与“该日以前盈缩分的累积数”之间的关系也发生了变化，不是相加，而是相减。（8.36）式变成了如下形式：

盈缩积分数＝各日前盈缩积分数－[（各日盈缩率小分×101＋30）×39－34（或 35）]…………………………………………………… （8.38）

如表 8.1 中九～十四日的盈缩积分就要用（8.38）式计算，一～八日用（8.36）式计算。

例如求第九日盈缩积分，把第八日下“各日盈缩率小分”59，和“九日前的盈缩积分数”7940952 代入（8.38）式得：

盈缩积分数＝7940952－[（59×101＋30）×39－34]
＝7940952－[59×3939＋1136]
＝7707415（与表中数据相等）

由于十五日自盈转缩，“该日以前盈缩分的累积数”小于“当日盈缩分”，（8.36）式又变成：

盈缩积分数＝（各日盈缩率小分×101＋30）×39－34（或 35）－各日前盈缩积分。………………………………………… （8.39）

盈缩积分自盈转缩，成了负数，当日与日前累积都是缩，上式自十六～二十二日变为：

盈缩积分数＝（各日盈缩小分×101＋30）×39－34（或 35）＋各日前盈缩数 ………………………………………………………… （8.40）

由于第二十二日实行又大于平行，自第二十三日以后，(8.26)式变为：

盈缩积分数＝各日前盈缩数－[(各日盈缩小分×101－30)×39＋34(或35)] …………………………………… (8.41)

从(8.38)～(8.41)式可见，求盈缩积分的公式中，加减号无一不是变化的，大要是：各日盈缩率小分与各日前盈缩积分，同名(同是盈或同是缩)相加，异名(一盈一缩)相减。计算当日盈缩分的加减号，取决于“各日盈缩小分”，各日盈缩分是“盈”(实行大于平行)，要减去修正值〔减30，加34(或35)〕；各日盈缩分是缩(平行大于实行)，要加修正值〔加30，减34(或35)〕。

由以上公式重新验算表中盈缩积分值，“七日”盈缩率7772710。今按公式(8.36)验算，加34得7772710，加35得7772711。但据“校勘记”说：710，各本并误作111。表明原文为111，改为711、710皆可。那么改一字比改两字好，应作711。即七日盈缩率应是7772711。

十三日盈缩积分：盈3090302。按(8.38)式验算，用“－34”，得3090303；用“－35”，得3090304。计算十二日盈缩积分刚用过“－35”，不应连续使用。所以，十三日盈缩积分是3090303。原文错一字。

二十四日盈缩积分6901495。按(8.41)式验算，用“＋34”，得6911495。原文“九”后错一字。

再由二十八日缩积验算该日损率和月行度。损率本可用(8.35)式验算，结果是，其余各日损益率都是正确的，只有二十八日损率是72.4，原文是74，二者不符。还有二十八日月行度，根据乾象历、元嘉历等历法的经验，于“行分十四”之外，不大可能没有小分。所以，一并用二十八日缩积值来检验。

基本出发点是：迟疾一周，盈缩数积分应该是0，不盈不缩。28日缩积是二十七日以前盈缩数的累积值，那么，二十八日当日盈缩小分等于二十八日缩积。即：

$$(\text{实行}-\text{平行})\times 3939-1136=1082379$$

$$\text{实行}-\text{平行}=\frac{1083515}{3939}=275\,\frac{290}{3939}\text{分}$$

迟疾 1 周共 $27\frac{14631}{26377}$ 日，此为在 $\frac{14631}{26377}$ 日内的实平差。那么，第二十八日全天实平差为：

$$275\frac{290}{3939}\times\frac{26377}{14631}=\frac{1083515\times 26377}{3939\times 14631}=\frac{1953378\frac{1637}{14631}}{3939}$$

$$=495\frac{3573\frac{1637}{14631\times 3939}}{3939}$$

$$\doteq 495\frac{3573}{3939}$$

已知平行为 5227 分，所以，二十八日全天实行：

$$5227+495\frac{3573}{3939}=5722\frac{3573}{3939}\text{分}\doteq 14\frac{14\frac{1010}{1717}}{23}\text{度}$$

即 28 日“月行度”为 14 度行分 14，小分 1010。小分满小分法(1717)入行分，行分满行分法(23)为度。

前面既知二十八日全天实平差为 $275\frac{290}{3939}\times\frac{26377}{14631}$，损率是：

$$275\frac{290}{3939}\times\frac{26377}{14631}\times\frac{\text{日法}}{\text{通法}}=\frac{1083515}{14631}$$

$$=74\frac{821}{14631}\doteq 74$$

二十八日“差法”，据(8.37)式等于实行分－日行分 $\doteq 5722-391=5331$ 分。

“校勘记”说应是 5321 分，还说“21”，各本并误作“31”，“惟局本是，与校算合”。是校勘者弄错了，校书岂是易事。

下边解释计算法。

(2)推入迟疾历术。《律历志》公式是：

$$\frac{\text{通法}\times\text{朔积日}-n\cdot\text{通周}}{\text{通法}}=\text{入历日}\frac{\text{日余}}{\text{通法}} \qquad (8.42)$$

其中，“通法×朔积日”，《律历志》称为“通实”；n 为自然数，且使 $0\leqslant$ 通法×朔积日 $-n\cdot$ 通周 $<$ 通周。

(8.42)式的基本思路是，从朔积日中除去近点月周数，剩余部分就是入迟疾历日数。即：

$$\text{朔积日}-n\cdot\frac{\text{通周}}{\text{通法}}=\frac{\text{通法}\times\text{朔积日}-n\cdot\text{通周}}{\text{通法}}$$

这就是(8.42)式左边的代数式。

由于朔积日是从上元甲子起算，(8.42)式所得入历日也自甲子起算，算外为所求年天正十一月朔日夜半入迟疾历日名。

(3)求次月。即已知头月朔日夜半入迟疾历日和日余，求次月朔日夜半入迟疾历日名。

次月比头月，大月增30日，小月增29日。朔增1月，求迟疾历也应多减1周。即：

$$\text{大月}:30-27\frac{14631}{26377}=2\frac{11746}{26377}\text{日}$$

$$\text{小月}:29-27\frac{14631}{26377}=1\frac{11746}{26377}\text{日}$$

$$\text{因而，大月}:\begin{cases}\text{头月入历日}+2=\text{次月入历日}\\\text{头月入历日余}+11746=\text{次月入历日余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8.43)$$

$$\text{小月}:\begin{cases}\text{头月入历日}+1=\text{次月入历日}\\\text{头月入历日余}+11746=\text{次月入历日余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8.44)$$

以上两式入历日大于27，入历日余大于14631，则除去之，运算如本节4(2)法。

(4)求次日。即已知头日(比如某月朔日)入历日和日余，求次日入历日和日余。

$$\begin{cases}\text{头日入历日}+1=\text{次日入历日}\\\text{次日入历日余与头日同}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8.45)$$

(5)求日所在定度：平均度加减入迟疾历的损益、盈缩数，得定度。因此，求定度分作如下几个步骤：

第一步，按本章公式(8.25)～(8.30)推算出某日夜半时，日所在度，此系平均度。

第二步，按本章(8.42)～(8.45)式算出该日入迟疾历日及日余。

第三步，算出在入历日及日余期间的损益盈缩数，加减平均值即得定度。

前二步算法都是已知的，运算结果：平行度及入历数也认为是已知的。本节内容在于给出第三步公式：

$$\text{平行度及余} \pm \frac{\text{夜半入历日余} \times \text{损益率} \pm \text{盈缩积分}}{\text{差率} \times \text{纪法}}$$

$$= \text{定度}\frac{\text{度余}}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots (8.46)$$

下边解释(8.46)式左端第二项分式为何能表示入迟疾历的损益盈缩数？

设每日增减数为(实行分－平行分)，入历日(n)对应的盈缩累积数应等于$\frac{\text{实行分}-\text{平行分}}{391}$(度)。入历日余对应的损益数为$\frac{\text{夜半入历日余}}{\text{统法}}\times\frac{\text{实行分}-\text{平行分}}{391}$。入历日及余总的损益盈缩数为两者之和：

$$\frac{\text{夜半入历日余}}{\text{统法}} \times \frac{\text{实行分}-\text{平行分}}{391} \pm \sum_{1}^{n}\left(\frac{\text{实行分}-\text{平行分}}{391}\right)_n$$

$$= \text{夜半入历日余} \times \frac{(\text{实行分}-\text{平行分}) \times \text{日法}}{\text{统法}} \times \frac{1}{391 \times \text{日法}} \pm$$

$$\sum_{1}^{n}(\text{实行分}-\text{平行分})_n \times \text{日法} \times \frac{1}{391 \times \text{日法}}$$

其中$\frac{(\text{实行分}-\text{平行分}) \times \text{日法}}{\text{统法}}$为损益率，$\frac{1}{391 \times \text{日法}} = \frac{1}{\text{差率} \times \text{纪法}}$，$\sum(\text{实行分}-\text{平行分})_n \times \text{日法}$为盈缩积分。代入上式得：

$$= \frac{\text{夜半入历日余} \times \text{损益率}}{\text{差率} \times \text{纪法}} \pm \frac{\text{盈缩积分}}{\text{差率} \times \text{纪法}}$$

$$= \frac{\text{夜半入历日余} \times \text{损益率} \pm \text{盈缩积分}}{\text{差率} \times \text{纪法}}$$

正是(8.46)式左端的第二项。中间“＋”、“－”号的选用可参阅二节4(1)中(8.38)～(8.41)式。与平行度及余之间“＋”、“－”号的选用原则是视第二项分式所得决定，盈“＋”，缩“－”。《律历志》说是“以盈加缩减平行度及余为定度(及余)”。

求次日定度仍按(8.46)式计算，此时平行度比头日增1日，入历日也增1日。增后从表8.1查得相应的损益率、盈缩积分，即可入算。

5. 阴阳历

(1)阴阳历表。大明历的交会周期为:$\frac{\text{会周}}{\text{通法}}$。其间月出入黄道各一次,即经历了阴阳历各一周。那么,阴历或阳历1周长度为:$\frac{\text{会周}}{2\times\text{通法}}=\frac{717777}{2\times26377}=13\frac{15987.5}{26377}$日。由其间逐日月亮距黄道度数编制成的表格为阴阳历表(见表8.2)。

表分三栏,一为日序数。二是损益率,为逐日月距黄道分,远离黄道为益,靠近黄道为损。第三栏为兼数,是损益率的累积数。后两栏单位都是分,单位制1°=12分。

由于阴(阳)历1周只有$13\frac{15987.5}{26377}$日,表中第十四日只有$\frac{15987.5}{26377}$日,损益率只有10分,由此可以算出全日损益率为16分3188小分(小分分母为6395):

15987.5∶26377=10∶全日损率

$$\text{全日损率}=\frac{263770}{15987.5}=16\frac{3188}{6395}\text{分}$$

表8.2 大明历阴阳历表

日序	损益率	兼数
一日	益 16	初
二日	益 15	16
三日	益 14	31
四日	益 12	45
五日	益 9	57
六日	益 5	66
七日	益 1	71
八日	损 2	72
九日	损 6	70
十日	损 10	64
十一日	损 13	54
十二日	损 15	41
十三日	损 16	26
十四日	损 16①	10

(2)推入阴阳历术。大明历所给公式是:

$$\frac{\text{通实}-m\cdot\text{会周}-n\cdot\text{交数}}{\text{通法}}=\text{入历日}\frac{\text{日余}}{\text{通法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8.47)$$

其中:通实=朔积日×通法,就是上元以来的朔积分;m、n都是自然数或0,且m能使$0\leqslant\text{通实}-m\cdot\text{会周}<\text{会周}$,$n$能使$0\leqslant\text{通实}-m\cdot\text{会周}-n\cdot\text{交数}<\text{交数}$。由于交数$=\frac{1}{2}$会周,通实$-m\cdot$会周<会周,$n$只可能是1或0。$n=0$,入阳历;$n=1$,入阴历。

---

① 脱小分3188。

自甲子起算，“入历日”算外，为所求年天正十一月朔日夜半入阴阳历的日名。

(8.47)式意义可以这样考虑：通实$-m\cdot$会周是从朔积分中减去交会周分，剩余的是不满1个交会周的分数，也就是所求朔日入于最近1个交会周期中的分数。除以通法后化为日数，当然就是所求入历日了。$n\cdot$交数只有在入交周分大于阴(或阳历)1周时才有用，减或不减都不改变入交周分的意义，可以不论。

与元嘉历、景初历等历法的求入阴阳历公式相比，(8.47)式最为简单，是祖冲之的一项发明。

(3)求次月。即求次月朔日夜半入阴(阳)历日名。相邻两月朔之间大月隔30日，小月隔29日，从头月朔到次月朔之间，朔增30或29日，阴阳历过2周($13\frac{15987.5}{26377}\times 2=27\frac{5598}{26377}$日)，净增数为：

$$\text{大月}:30-27\frac{5598}{26377}=2\frac{20779}{26377}\text{日}$$

$$\text{小月}:29-27\frac{5598}{26377}=1\frac{20779}{26377}\text{日}$$

因此，次月入历数：

$$\text{大月}:\begin{cases}\text{头月朔入历日}+2=\text{次月朔入历日}\\ \text{头月朔入历日余}+20779=\text{次月朔入历日余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (8.48)$$

$$\text{小月}:\begin{cases}\text{头月朔入历日}+1=\text{次月朔入历日}\\ \text{头月朔入历日余}+20779=\text{次月朔入历日余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (8.49)$$

日余满通法(26377)入整日；日满13，日余满15987.5过阴(或阳)历1周，则除去之，原在阴历改入阳历，原在阳历改入阴历。就是《律历志》说的“阳竟入阴，阴竟入阳”。

若由头日入历求次日入历数，朔增1日，入历日也增1日，其余不变。即只要在头日入历日中加1日即得次日入历日，日余不变。

(4)求朔望差。这一小节是推算夜半到合朔点及望之间的日分数。夜半到合朔间分数为朔差；夜半到望之间分数为望差。

由二节1(1)知，夜半到合朔之间的日数为$\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}$，把此数分母化为通法，分子表示的日分数(1日$=$通法分)，就是所求朔差：

$$\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}=\frac{\text{朔小余}\times 2029}{\text{日法}\times 2029}=\frac{\text{朔小余}\times 2029/303}{\text{通法}}$$

其中分子：

$$\frac{\text{朔小余}\times 2029}{303}=\text{日余}\frac{\text{余数}\times 2}{606}=\text{日余}\frac{\text{小分}}{606} \quad \cdots\cdots \quad (8.50)$$

为朔差。分母化为通法是为了能与入历日余相加减。

从合朔到望的间距等于半个朔望月日数，即 $14\frac{3014.5}{3939}$日。分母也化为通法，加上朔差，就是夜半到望的日分：

$$\text{朔差}+14\frac{3014.5}{3939}=\text{朔差}+14\frac{3014.5\times 2029}{3939\times 2029}$$

$$=\text{朔望}+14\frac{3014.5\times 2029/303}{\text{通法}}$$

其中分式中的分子化简：$\frac{3014.5\times 2029}{303}=20186\frac{125}{606}$。与朔差一样，20186 为日余，125 为小分。分别与朔差中的日余、小分相加，得望差。即：

$$\begin{cases}\text{朔差日}+14=\text{望差日}\\ \text{朔差日余}+20186=\text{望差日余}\\ \text{朔差小分}+125=\text{望差小分}\end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (8.51)$$

其中小分满 606 入日余，日余满通法入整日。

《律历志》说："又加之，后月朔也。"如图 8.3，A、C 为两个相邻的合朔点，B 为望，D、E 为夜半。AD 为朔小余，分母化为通法后就是朔差了。$AB=BC=\frac{1}{2}$朔策，$DA+AB$ 是望差。从图可见，《律历志》说的"又加之"是指加"$\frac{1}{2}$朔策"，即上文说的"加 14 日，日余 20186，小分 125"，而不是"加望差"；"后月朔也"是说后月的合朔点 C，而不是后月朔日夜半 E。

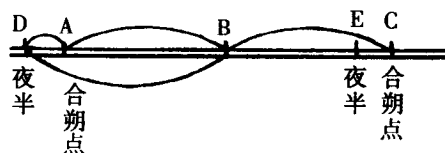



图 8.3　朔望差图

(5)求合朔月食。是推算合朔及望的入阴阳历日及余，并由此判断合朔是否交会，望日是否月食。

合朔入历的算法：前述(8.47)～(8.49)式都是求朔日夜半入历的公式。由二节5(2)可知：入阴阳历数＝朔积分－阴阳历周分，而合朔时朔积分＝朔积日分＋朔小余分。所以：

合朔入阴阳历数＝(朔积日分＋朔小余分)－阴阳历周分

＝(朔积日分－阴阳历周分)＋朔小余分

≐朔日夜半入历分＋朔差 …………………… (8.52)

同样：

望时入历数＝朔日夜半入历分＋望差 ……………………… (8.53)

对于(8.52)、(8.53)式，《律历志》说："置朔、望夜半入阴阳历日及余，有半者去之，置小分三百三。以(朔望)差数加之。"[①] "有半者去之"是说日余之中有"半"这样的字〔如本节5(3)中"日余一万五千九百八十七半则去之"〕，就去掉不用。不是舍弃，而是换作小分303。因小分分母是606，小分303等于日余分之"半"。

对(8.52)、(8.53)两式运算过程和结果的处理办法同前："小分满六百六从日余，日余满通法(26377)从日，日满一历($13\frac{15987.5}{26377}$日)去之。命日算外，则朔望加时入历也。"

《律历志》又说，所得朔望加时"入历一日，日余四千一百九十八，小分四百二十八以下；十二日，日余一万一千七百八十八，小分四百八十一以上，朔则交会，望则月食"。意思是(8.52)、(8.53)式算得的入历日及余满足：

$$\text{入历日及余} < 1\frac{4198\frac{428}{606}}{26377}\text{日}$$

$$\text{或}\quad \text{入历日及余} > 12\frac{11788\frac{481}{606}}{26377}\text{日}$$

对于朔日，则日月交会；对于望日，则发生月食。其中$1\frac{4198\frac{428}{606}}{26377}$日

---

① 引文标点符号与中华书局1987年版《宋书·律历志》略有不同。

和 $12\dfrac{11788\frac{481}{606}}{26377}$ 日，就是乾象历、元嘉历等历法中说的前限、后限。

(6)求合朔、月食定大小余。是在已知夜半入迟疾历日及日余的条件下，求合朔或望时的定大、小余。《律历志》所给公式分两步：一先求合朔、望时的入迟疾历日及日余；二是把由于入迟疾历日及日余产生的行度差(损益、盈缩数)加入本朔望小余，得到定小余。

第一步很简单，把夜半入迟疾历数加上朔、望差，就得到了合朔、望时的入迟疾历数：

$$\text{夜半入迟疾历日}+\frac{\text{夜半入迟疾历日余}+\text{朔(望)差日余}}{\text{通法}}$$
$$=\text{合朔(望)时加时入迟疾历日及日余} \qquad (8.54)$$

第二步公式是：

$$\text{本朔(望)小余}\pm\frac{\text{盈缩积分}\pm\text{加时入迟疾历日余}\times\text{损益率}}{\text{差法}}$$
$$=\text{合朔(望)定小余} \qquad (8.55)$$

“本朔(望)小余”指的是按前(8.4)、(8.6)～(8.12)式求得的朔或望时小余，即朔或望日夜半到合朔(或望)时的日分零数。

(7)求合朔、月食加时。本节5(6)求出了合朔、月食的定大、小余，大余定日，小余定时刻。这一小节是求加时时刻，所以只用小余。

$$\frac{\text{定小余}\times 12}{\text{日法}}=\text{辰次序数}\frac{\text{辰余}}{\text{日法}} \qquad (8.56)$$

“辰次序数”由子时起算，算外为所加辰。

(8.56)式余数“辰余”可以继续按以前说的12等分法划分为少、半、太及少强、半弱，半强、太弱，太强等。按四等分之，得少、半、太等名：

$$\frac{\text{辰余}\times 4}{\text{日法}}=\text{分次序数}\frac{\text{分余}}{\text{日法}} \qquad (8.57)$$

所得“分次序数”1为少，2为半，3为太，自4起入下辰。“分余”再三分之，得强弱数：

$$\frac{\text{分余}\times 3}{\text{日法}}=\text{强弱数}\frac{\text{强弱余}}{\text{日法}} \qquad (8.58)$$

“强弱数”是1为强，2为弱。

每辰先四等分为少、半、太，再各三等分之，为强弱，此为12等分

法，各等分命名法参见图 3.10：

(8)求月去日道度。就是求月距黄道度。公式为：

$$兼数 \pm \frac{入阴阳历日余 \times 损益率}{通法} = 定分\frac{分余}{通法} \quad \cdots\cdots (8.59)$$

“定分”为月去黄道分，单位制是 1 度＝12 分。所以，把定分化度的公式是：

$$\frac{定分}{12} = 黄道度\frac{度余}{12} \quad \cdots\cdots (8.60)$$

度余也用 12 等分法分作少、半、太等。按前(8.57)、(8.58)式的格式，4 等分将分子乘 4，3 等分乘 3，所以，4 等分为：

$$\frac{度余 \times 4}{12} = \frac{度余}{3} \quad \cdots\cdots (8.61)$$

就是《律历志》说的“不尽(指除 12 得黄道度以后有剩余)三而一，为少、半、太”。“三而一”是运算结果，其实是“四而一”才能得少、半、太。

再继续则分为 3 分，1 分为强，2 分为少弱等。

《律历志》又说，月去日道“阳历在表，阴历在里”。即月入阳历在黄道南(表)，入阴历在黄道北(里)。前面说过，这是一种规定：上元时如此，以后不得不如此。

(9)二十四气表。与元嘉历的二十四气表相比，不是各节气时的日所在度，其余各栏目名称相同，而列入数据小有参差。显著特征是继承了元嘉历成果，晷影、漏刻都以冬夏至为对称点，前后相同，不像景初历一样紊乱。表略。

(10)求昏中星、明中星。《律历志》说，求法是：“各以度数加夜半日所在，则中星度也。”“度数”指二十四气表中各节气下所列昏、明中星度数，如冬至昏中星度 $82\frac{21}{23}$度、明中星度 $283\frac{8}{23}$度等。如此，《律历志》所给公式是：

某节气附近某日之昏、明中星度是：

$$昏中星度 = 表列昏中度数 + 该日夜半日度 \quad \cdots\cdots (8.62)$$

$$明中星度 = 表列明中度数 + 该日夜半日度 \quad \cdots\cdots (8.63)$$

三、推五星术

1. 五星参数

见下表：

表 8.3　五率表

木率	火率	土率	金率	水率
15753082	30804196	14930354	23060014	4576204

五率是星1合积日与纪法的乘积。

2. 五星算法

(1)推五星术。此节是推算星合所在日名。《律历志》公式是：

$$\frac{\text{五星率}-(\text{度实}-n\cdot\text{五星率})}{\text{纪法}}=\text{入岁日}\frac{\text{日余}}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.64)$$

其中"五星率"指在表8.3中所推星的星率；"度实"见本章二节(3)1，等于朔积日×纪法；n 为自然数或0，且满足 $0\leqslant$ 度实 $-n\cdot$ 五星率 $<$ 五星率。

所得"入岁日"自岁首(天正十一月朔日)起算，算外为星合日的日名。

(2)求星合度。

$$(\text{天正朔日积度}+\text{入岁日})+\frac{\text{天正朔积度余}+\text{入岁日余}}{\text{纪法}}-n\cdot 365\frac{9589}{39491}$$

$$=\text{星合度}\frac{\text{度余}}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.65)$$

n 为自然数或0，且使：$0\leqslant$(8.65)式左端 $<365\frac{9589}{39491}$ 日。所得"星合度"自虚宿初度起算，算外为星合所在度。

(3)求星见日术。星合而伏，伏若干日而后见，所以星见日应由星合日加伏日得见日：

$$(\text{星合日}+\text{伏日})+\frac{\text{星合日余}+\text{伏日余}}{\text{纪法}}=\text{星见日}\frac{\text{日余}}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8.66)$$

"星合日"也是自星所入岁天正十一月朔日名起算，算外为星见所在日。伏日及余见"五步"。

(4)求星见度术。日亦度，(8.66)式推星见日，亦是推星见度。

$$(\text{星合度}+\text{伏度})+\frac{\text{星合度余}+\text{伏度余}}{\text{纪法}}=\text{星见度}\frac{\text{度余}}{\text{纪法}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8.67)$$

所得“星见度”自虚宿初度起算，依次除去各宿度，待不满某宿度时，算外为入该宿度数。

(5)行五星法。此节讲五星运行于二十八宿之间的推算要点：一是把五星行度余化为行分、小分，统一单位制。二是五星留、逆的计度法。三是出入虚宿加减虚分的方法，顺行过虚宿，除了要从星见(或星合)度中减去虚宿 10 度之外，还要减周天畸零分$\frac{10449}{39491}$(周天度分为 365$\frac{10449}{39491}$度$=\frac{14424664}{39491}$)；逆行过虚宿则要加上此数。由于：

$$\frac{10449}{39491}=\frac{10449/1717}{23}=\frac{6\frac{147}{1717}}{23}\text{度} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8.68)$$

所以，《律历志》说：“从行入虚，去行分六，小分百四十七；逆行出虚，则加之。”

(8.68)式左端分母为纪法，与前面算出的星合见度余的结构形式相同，所以，也可把(8.68)式当做度余化行分的公式，如《律历志》所说：“以小分法(1717)除度余(10449)，所得(6)为行分，不尽(指余数 147)为小分。”

3. 五步(即五星运行步法)

木星。

初与日合而伏				
	顺行	16 日 17832 分		行度 2°37504′(1°=39491′，后同)
晨见东方	顺行	4 分/日	112 日	行度 19°11′(1°=23′，后同)
	留		28 日	
	逆行	3 分/日	86 日	行度 −11°5′
	留		28 日	
	顺行	4 分/日	112 日	行度 19°11′
夕伏西方	顺行	16 日 17832 分		行度 2°37504′
	与日再合			
+)				
	星一终398 日 35664 分			行度 33°度余 25215

火、土、金、水四星行步略。

附:《宋书·律历志》所载其他制历者

尚书郎张衡"参案仪注,考往校今,以为《九道法》最密"[①]。

"魏文帝黄初中,太史丞韩翊以为《乾象》减斗分太过,后当先天,造《黄初历》,以四千八百八十三为纪法,一千二百五为斗分。其后尚书令陈群奏,以为……韩翊首建《黄初》,犹恐不审,故以《乾象》互相参校。历三年,更相是非……竟无时而决。"[②]

"晋武帝泰始元年,有司奏……改《景初历》为《泰始历》,奏可。"[③]

"晋武帝时,侍中平原刘智推三百年斗历改宪,以为《四分法》三百年而减一日,以百五十为度法,三十七为斗分,饰以浮说,以扶其理。江左中领军琅邪王朔之以其上元岁在甲子,善其术,欲以九万七千岁之甲子为开辟之始,何承天云'悼于立意者也'。"[④]

---

① 《宋书·律历志》,中华书局1987年版,第229~230页。

② 同上书,第231页。

③ 同上书,第259页。

④ 同上书,第260页。

第九章　北朝一部诸家共制的历法——正光历

正光历载于《魏书·律历志上》，系综合屯骑校尉张洪、荡寇将军张龙祥、校书郎李业兴、附马都尉卢道虔、太极采材军主卫洪显、殄寇将军胡荣、雍州沙门统道融、司州河南人樊仲遵、定州钜鹿人张僧豫九家历法而成，九家之中，以张龙祥、李业兴历为主。

张龙祥历的研制最早可上溯到北魏孝文帝在位时的太和年间（477～499 年），张龙祥之父张明豫为太史令受命研制新历。直到魏孝明帝正光元年（520 年）始颁行天下。一直行用到北周天保年初（550 年）。

正光历初拟名神龟历，又以壬子年为上元，称壬子元历。

一、上元及参数

1. 上元

《正光历》以壬子年为上元。

（1）“上元壬子至鲁隐公元年己未，积十六万六千五百七年，算外。”

按：自上元壬子到鲁隐公元年己未 166507 年，除去 2775 甲子（166500 年），余 7 年。自壬子起算，算外第 8 年为己未。所以称鲁隐公元年在“算外”，即在积年 166507 年之外的意思。

又说：“入甲申纪以来，至隐公元年己未（前 722 年）积四万五千三百七，算外。”

按：正光历以 363600 年为 1 元，60600 年为 1 纪，1 元＝6 纪，每纪各以纪首日名命名，分别为甲子、甲戌、甲申、甲午、甲辰、甲寅。甲申为第三纪。上元以来至鲁隐公元年积 166507 年，除去 2 纪（121200 年），余 45307 年。所以说是入于甲申纪 45307 年，算外。

（2）“壬子元以来至北魏正光三年（522 年），岁在壬寅，积十六万七

千七百五十，算外。”

按：167750 年除去 2795 甲子（167700 年），余 50 年，自壬子起算，算外第 51 年恰为壬寅，与正光三年年名相合。

又：鲁隐公元年为公元前 722 年。正光三年为公元 522 年。相距 1244 年，而二者距上元壬子的积年差：167750－166507＝1243 年，加上正光三年本年在内，也是 1244 年。

“壬子岁入甲申纪以来，至今孝昌二年（526 年）岁在丙午，积四万六千五百五十四，算外。”

按：孝昌二年上距鲁隐公元年 1247 年（孝昌二年不包括在内）。前云入甲申纪至鲁隐公元年己未以来 45307 年，那么至孝昌二年丙午的积年为：45307＋1247＝46554 年。孝昌二年不包括在内，故称“算外”。

“从壬子元以来，至今大魏孝昌三年（527 年）岁次丁未，积十六万七千七百五十六，算上。”

按：前云孝昌二年入甲申纪 46554 年，孝昌三年当入甲申纪 46554 年，加上本年在内（“算上”）为 46556 年。上元壬子到甲申纪首尚有二纪 121200 年。因此说：上元壬子制孝昌三年的积年为：121200＋46556＝167756 年。故包括孝昌三年在内，《律历志》才说是“算上”。

“壬子岁入甲申纪以来，至今大魏孝昌三年岁次丁未，积四万六千五百五十六，算上。”

按：积年数是前段释义。惟此句首“壬子岁”三字似衍，或者“岁”字为“元”字之误。

2. 主要参数

以前诸历屡及者不再释。

（1）章蔀纪元。

本历以 363600 年为 1 元，元法：363600，1 元 3 统，每统 121200 年。统法：121200，1 统 2 纪，每纪 60600 年。纪法：60600，1 纪 10 蔀，每蔀 6060 年。蔀法：6060，1 蔀 12 章，每章 505 年。章法：505。

每章（505 年）有 186 个闰月，章闰：186。那么每年月数为 $12\frac{186}{505}$月 $=\frac{6246}{505}$月，每章月数为 6246，即章月：6246。由此可推知，蔀月 74952，纪

月 749520，统月 1499040，元月 4497120。

（2）回归年与朔望月。

本历每个回归年 $365\frac{1477}{6060}=\frac{2213377}{6060}$ 日，1477 为斗分，2213377 为周天分。蔀法 6060 又名度法。

1 个朔望月 $29\frac{39769}{74952}=\frac{2213377}{74952}$ 日，74952 为日法；$29\frac{39769}{74952}$ 为经月，其中 29 为大余，39769 为小余。日法与蔀月相等。那么，周天分必与 1 蔀日数（蔀日）相等。蔀日又名月通、通数等。

一年有二十四节气，二十四为气法。

若以回归年除以朔望月得每年月数：

$365\frac{1477}{6060}\div 29\frac{39769}{74952}=\frac{74952}{6060}=12\frac{186}{505}$ 月

平年设 12 个月，186 分置为闰月。505 年置 186 个闰月，年、月恰尽，因名 505 为章法，186 为闰余，这些都与前面相符。

（3）交会周期。

该历交会周期的重要参数是会通：12989904，意义是交会一次的月行分数。因而能除以日法化为度：$\frac{12989904}{74952}$ 度（或日）。再除以朔望月日数，得到交会一次所需月数：$\frac{12989904}{74952}\div 29\frac{39769}{74952}=\frac{12989904}{2213377}=\frac{\text{会通}}{\text{周天}}$。按照以往惯例，可以把会通叫做“会月”，周天叫做“会率”，二者相除，等于 $5\frac{1923019}{2213377}$ 月/会。分子、分母各除以公约数 96234，将得数四舍五入，取整数得 $5\frac{20}{23}$，这就是三统历、四分历的交食周期；各除以 1176，也是四舍五入后取整数得 $5\frac{1635}{1882}$，这是乾象历的交食周期。都是近似值。《律历志》小字注[①] 说正光历以 $5\frac{20}{23}$ 月为 1 会等，误。

① 见《魏书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 2664 页。

前面说，交会 1 次所需日数为$\frac{会通}{日法}=\frac{12989904}{74952}=173\frac{23208}{74952}$日/交。其中 173 为会数，23208 为会余。显然，会数为非交会次数，而是交会 1 次所需日数(亦即每交日数)，或者说是每交月行度数。月行此数所需日比此数小得多，所以交不必会。

(4)近点月。

正光历的近点月是 $27\frac{41562}{74952}=\frac{2065266}{74952}$日。其中 27 为周日，41562 为周日余；2065266 为通周。

月每日行度 $13\frac{186}{505}=\frac{6751}{505}$度。其中 6751 为小周，是月每 505 年的行天周数。每一蔀之年 6060 年的行天周数 6751×12=81012 叫做“月周”。

二、推算日月运行法

1. 推月朔术

(1)先推算积月：

$$\frac{入纪年\times章月}{章岁}=积月\frac{闰余}{章岁} \cdots\cdots (9.1)$$

所求年不在“入纪年”内。

(2)再算积日：

$$积月\times每月日数=\frac{积月\times通数}{日法}=\frac{朔积分}{日法}=积日\frac{小余}{日法} \cdots\cdots (9.2)$$

$$积日-n\cdot 60=大余 \cdots\cdots (9.3)$$

n 为自然数或 0，且使 $0\leqslant 积日-n\cdot 60<60$。数以纪首日名起算，大余算外为所求年天正月朔日名。

(3)推上弦、下弦、望术。正光历$\frac{1}{4}\times$朔望月$=7\frac{28680\frac{1}{4}}{74952}$日。因而：

$$朔大余+7=上弦大余 \cdots\cdots (9.4)$$

$$小余+28680\frac{1}{4}=上弦小余 \cdots\cdots (9.5)$$

小余满月法 74952 人大余，小分(1)满 4 入小余。大余满 60 除去之，算外为上弦日名。

再加得望，三加得下弦，四加即加上一个朔望月日数，得下月朔。推法皆与上弦推法同。

2. 推气闰术

即推算二十四气和闰月法。

(1)推二十四气术。正光历每年 $365\frac{1477}{6060}$日，除去 6 甲子(360 日)余 $5\frac{1477}{6060}=\frac{31777}{6060}$日。$5\frac{1477}{6060}$为一年没数，31777 为余数。又一气日数为：$365\frac{1477}{6060}\div 24=15\frac{1324\frac{1}{24}}{6060}$日。因得求冬至等节气日名法：

$$\frac{\text{入纪年}\times\text{余数}}{\text{蔀法}}=\text{积没}\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}} \quad (9.6)$$

$$\text{积没}-n\cdot 60=\text{冬至大余} \quad (9.7)$$

自所入纪首日名起算，冬至大余算外为所求年冬至日名

$$\text{冬至大余}+15=\text{次气大余} \quad (9.8)$$

$$\text{小余}+1324\frac{1}{24}=\text{次气小余} \quad (9.9)$$

其中小余满蔀法(6060)入大余，小分满 24 入小余。大余满 60 则 去之，自纪首日名起算，大余算外为次气日名。

按(9.8)、(9.9)式或每加一次得次气，可依次求出 24 气日名。

(2)推闰术。

$$\frac{(\text{章岁}-\text{闰余})\times\text{岁中}}{\text{章闰}}=\text{闰月序数}\frac{\text{余}}{\text{章闰}} \quad (9.10)$$

其中闰余为所求年积月余分。满章岁即可置为闰月，所以“章岁－闰余”为设置闰月尚缺少的闰月分数。$\frac{\text{章闰}}{\text{岁中}}$为每月所有的闰分数，用它去除尚缺闰分数，就得到闰月所在的月序数。

《律历法》还说(9.10)式中，余$>\frac{1}{2}$章闰，即所谓“余半法以上”，也算作 1 月。用四舍五入法。自天正十一月起算，“闰月序数”算外为闰月

所在月。该月究竟有无闰月，还要进一步用中气位置检验，无中气者是真闰月。

(3)节气、月份分配表。

表 9.1 节气、月份分配表

月序	十一	十二	一	二	三	四	五	六
节气名		小寒	立春	惊蛰	清明	立夏	芒种	小暑
中气名	冬至	大寒	雨水	春分	谷雨	小满	夏至	大暑
月序	七	八	九	十	十一			
节气名	立秋	白露	寒露	立冬	大雪			
中气名	处暑	秋分	霜降	小雪				

由于采用“无中置闰法”，只有中气与月序有固定关系，如冬至所在必是十一月，大寒所在必是十二月，雨水所在必是一月(寅正月)等，节气与月序则无固定关系。一般情形每月有二个节气(节气、中气各一个)，特殊情形只有一个。有节气无中气者为闰月；有中气无节气者不论。

3. 推交会术

(1)推合朔、交会、月蚀去交度术。这一节是求天正十一月合朔时却去交度及余。合朔周期与交会周期的差就是所求的却去交度，叫做“却”去交度是由于合朔点在后，交会点在前，所求去交度数如同是合朔点“退却”的度数。《律历志》的公式是：

$$\frac{\text{入纪朔积分}+\text{交会差分}-n\cdot\text{会通}}{\text{日法}}=\text{朔去交度}\frac{\text{度余}}{\text{日法}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (9.11)$$

其中“交会差分”是自上元以来到入纪以前朔积分与会通差；n 是自然数或 0，且使((9.11)左端分子大于(或等于)0，小于会通。

(2)求次月去交度术。头月合朔距次月合朔的度数是 $29\frac{39769}{74952}$度，(9.11)式既已求得头月合朔距交会点的度及余，次月合朔距交会点的度及余应是：

$$\text{头月合朔的却去交度}+29=\text{次月合朔却去交度}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (9.12)$$

头月合朔的却去交余＋39769＝次月合朔的却去交度余 ……… (9.13)

所得度余满日法(74952)入度。度及余满会数($\frac{会通}{日法}=173\frac{23208}{74952}$)则除去之。

(3)求望去交度术。朔望相距 $14\frac{57360.5}{74952}$度($\frac{1}{2}\times$朔望月)。因此：

朔去交度＋14＝望去交度 ……………………………………… (9.14)

朔去交度余＋57360.5＝望去交度余 ………………………… (9.15)

同样，所得度余满日法(74952)入整度，度及余满会数($173\frac{23208}{74952}$)则除去之。若度余不足减，取整度1化为日法分入度余，再减。这个步骤可用如下文字式表示：由于度余＜23208，取1度化为分入度余，再减，即：

日法＋度余－会数余＝日法－会数余＋度余＝会虚＋度余 … (9.16)

其中，会虚＝日法－会数余＝74952－23208＝51744。

(9.16)式就是《律历志》说的“余若不足减者，减度一，加会虚”。

前面说过，只有朔或望的去交度入了限(小于前限，大于后限)，才能交会或月蚀(朔则交会，望则月蚀)。正光历的前后限是这样计算的：

$$\frac{1}{2}\times朔策=\frac{1}{2}\times 29\frac{39769}{74952}=14\frac{57360.5}{74952}度。$$

度14，度余57360.5，叫做“朔望合数”，作为前限。

$$会数及余－前限=(173-14)+\frac{23208-57360.5}{74952}$$

$$=158\frac{40799.5}{74952}度$$

度158，度余40799.5，叫做“入交限”。

正光历认为朔、望去交度分小于以上“朔望合数”或大于入交限时，朔则交会，望则日食。

这里前限、后限的求法为何与乾象历等历的求法不同?它们能作为前限、后限吗? 大约主要是为了使运算简单化。朔策的$\frac{1}{2}$除以月周(每日月行分)等于1日余，与乾象历等历的前限大致相等。虽小有差异，为

此产生的距黄道度的误差很小很小，对交食效果的影响也就微乎其微，而这样做避免了求朔望合数(等于会率的二分之一，与正光历的朔望合数不同)、朔合分、限分等一连串运算，利远大于弊。

(4)交会差表。

表 9.2 之中的交会差度和度余是相应纪初始时朔积分与交会周分之差。显然，交会纪差为 49 度 36744 分(1 度=74952 分)。每隔一纪加此数，每纪都是以前各纪的累积和，满会数(173 度 23208 分)则除去之。交会纪差的计算法是：

表 9.2 交会差表

纪名	合朔时月位	交会差	
		度	度余
甲子纪	日月如合璧，交中		
甲戌纪	在日道里	49°	36744
甲申纪	在日道里	98°	73488
甲午纪	在日道里	148°	35280
甲辰纪	在日道里①	24°	48816
甲寅纪	在日道里②	74°	10608

$$\frac{\text{每纪朔积分}-n\cdot\text{会通}}{\text{日法}}=\frac{\text{纪月}\times\text{通数}-n\cdot\text{会通}}{\text{日法}}$$

$$=\text{交会纪差度}\frac{\text{度余}}{\text{日法}} \quad\cdots\cdots (9.17)$$

代入数值：$=\dfrac{6246\times120\times2213377-n\cdot12989904}{74952}$

$$=\frac{1658970329040-n\cdot12989904}{74952}$$

$n=127712$，代入上式得：

$$=\frac{3709392}{74952}$$

$$=49\,\frac{36144}{74952}$$

因 n 为偶数，加纪差后，所得只要不大于会数，前后月位必同。否则相异。

表中注释①、②是笔者所加，自甲子纪到甲辰纪，又过了 1 个交会

① “里”为“表”之误。

② 同上。

点，月原在日道里，至甲辰纪首已穿过日道到了日道表。甲辰、甲寅纪首月都在日道表。

(5)求交道所在月。“交道”即“交子黄道处”，本节是求天正月朔之后的第一个黄白交点在本年的第几月。《律历志》公式是：

$$\frac{\text{会数及余}-\text{十一月朔却去交度及余}+\text{十一月朔小余}}{\text{日法}}$$

$$=\text{交道日}\frac{\text{日余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (9.18)$$

(9.18)式左端可写成如下形式：

$$\text{会数}\frac{\text{余}}{\text{日法}}-\text{十一月朔却去交度}\frac{\text{余}}{\text{日法}}+\frac{\text{十一月朔小余}}{\text{日法}}$$

$$=(\text{会数}-\text{十一月朔却去交度})\frac{\text{会数余}-\text{去交度余}}{\text{日法}}+\frac{\text{十一月朔小余}}{\text{日法}}$$

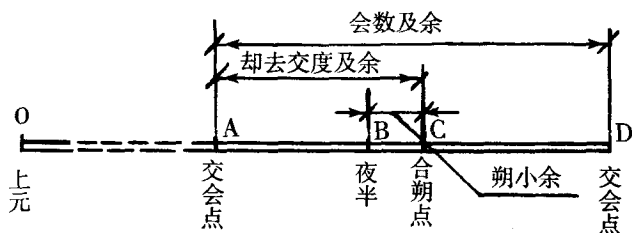



图 9.1　交道所在图

(9.18)式的意义可由图 9.1 说明：图中 A、D 是天正十一月合朔点 C 前后两个相邻的交会点，其间距离 AD 等于会数及余。AC 是由(9.11)式求出的合朔却去交度及余。B 为合朔度半，BC 为朔小余。(9.18)式所表示的其实就是：

$AD-AC+BC=BD$

BD 表示的度及余，就是合朔后的交点到朔日夜半之间的日和日余。所以，《律历志》说：“命起往年十一月，如历月大小除之，不满月者为入月，算外，交道日。”意思是在 BD 之间可能包含若干个月，有大有小，是大月从 BD 之中除去 30 日，小月除去 29 日，最后至某月 BD 剩余的不足 1 月的日数，便是交道入于该月的日数。算外为交道所在日。

《律历志》又说：“交在望前者，其月朔则交会，望则月蚀，交在望后

者亦其月月蚀，后月朔则交会。交正在望者，其月月蚀既，前后朔皆交会；交正在朔者，日蚀既，前后望皆月蚀。”

这段话可由本节3(3)中的内容解释，其中说朔或望的去交度小于前限，或大于后限者，朔则交，望则蚀。而前限等于朔望月的一半14度余。因此，(9.18)式中所求的朔后交点无论在某月的任何一日，与它相邻的两个朔、望点之间的距离都不大于半个朔望月，因此，必然是非交即结。若交点恰好在合朔点或望点上，在它前后的两望或两朔与它相距恰巧等于半个朔望月，也可以说是在前限之内，所以会有两蚀或两交。而交点所在的朔或望必然是日蚀既或月蚀既了，全蚀为既。

由以上可知，连续两月发生月蚀是可能的。似乎每次日全蚀的前后两个望日必有月蚀。理论如此，事实上这种情况很难发生。因为月蚀与看到月蚀是两码事。首先，虽有月蚀，而时在白日，等于不蚀。其次，月蚀是月入地影发生的，地影有本影、半影之分。若月蚀不深，很难看得清楚。全日蚀前后的两个望日都在交限边沿上，与日影几乎是擦边而过，很难说是月蚀。

(6)求后交月及日。即推算所求年天正朔日之后第二个交会点所在月及日。一、二两个交会点之间相隔日数等于会数和余。因此有：

$$\begin{cases}\text{前交入月日数}+\text{会数}=\text{后交入月日数}\\\text{前交月月日余}+\text{会数余}=\text{后交入月日余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(9.19)$$

“后交入月日余”大于日法(74952)则化为整日，增入“后交入月日数”。同样，从后交入月日数中依次减去若干个月的日数，自前交所在月减起，逢大月减30日，逢小月减29日，即所谓“如历月大小除之”。直减到某月，不能再减时(剩余的后交入月日数已不足1月)，后交入月日数的剩余数就是入于该月日数。

(7)推月在日道表里术。月在日道(黄道)南为表，北为里。月去交度分积满会通一次，过日道一次，在日道表里变换一次；积满2倍会通，过日道二次，在日道表里变换二次；由表(或里)变为里(或表)，又由里(或表)变为表，与初变前相比，等于不变。推广开来可以说，月去交度分不满会通或者积满偶数倍会通，月位与纪首同(纪首在表则表，纪首在里则里)；去交度分满奇数倍会通，则月位与纪首异(纪首在表则在里，

纪首在里则在表)。基于以上认识《律历志》的表达式是:

$$\frac{入纪朔积分+纪交会差分-2n\cdot 会通-m\cdot 会通}{日法}$$

$$=十一月朔却去交度\cdot\frac{度余}{日法}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(9.20)$$

其中 n 为自然数或 0,若设 A=入纪朔积分+纪交会差分$-2n\cdot$会通。那么,n 应使 $0\leqslant<2\cdot$会通。$m=0$ 或 1:当 $o\leqslant A<$会通时,$m=0$;会通 $\leqslant A<2\cdot$会通时,$m=1$。

满足以上条件后,《律历志》说,$m=0$ 时,天正十一月朔与纪首月位同;$m=1$ 时,与纪首月位异。又:

会数及余－十一月朔却去度及余＝前去度及余

两端展开:

$$(会数-十一月朔却去交度)\frac{会余-度余}{日法}=前去度\frac{余}{日法}\cdots\cdots\quad(9.21)$$

"前去度"即前去交度,是对"却去交度"而言,对于所求年十一月朔而言,已经过去的日子在后,称为"却",尚未到来的日子为"前"。

前去交度指合朔到前交会点之间的度数,即图 9.1 中 CD 的长度。欲确定前交点的位置,又有:

$$前去度及余+十一月朔小余=前去度\frac{余}{日法}+\frac{朔小余}{日法}$$

$$=前去度\frac{余+朔小余}{日法}=交道日\frac{日余}{日法}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(9.22)$$

把(9.21)式代入(9.22)式后可知,(9.22)式与前述的(9.18)式是完全相同的。得到的交道日及余自然是从所求年天正十一月朔日夜半到朔日以后第一个交会点之间的度分,或日及日余数,由日数可以确定此交点的位置(所在月序及日序),如同《律历志》所说:"命起十一月,如历月大小除之,不满月者为入月日及余。算外,交道日。"解释见本节 3(5)。

《律历志》还说:"其交在朔后望前者,朔,月在小道表里与十一月同,望则反矣。若交在望后朔前者。望与十一月同,后月朔则异矣:望在里则朔在表。"

这段文字在看了图 9.2 后自会明白。要点是 A、A' 都是十一月朔之

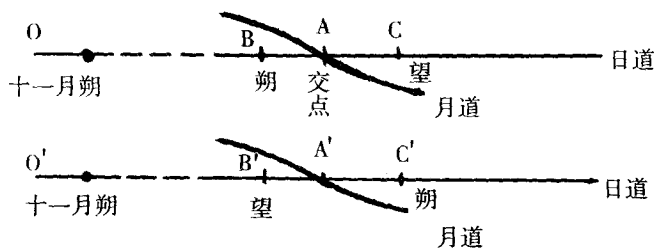



图 9.2　交道表里图

后的第一个交点，中间别无交点，只有过交点，月位才有变动。

(8)推交会起角术。参见第五章二节4(5)及图5.5。为更明确起见，原文应增改数字如下：

“其月在外道，先会后交者，(月)亏从东南角起；先交后会者，(日)亏从西南角起。其月在内道，先会后交者。(月)亏从(东)北角起；先交后会者。(日)亏从西北角起。”(括号内为增改字)

如景初历一般，领会这段文字的关键是：“先交后会”只讲“交”，“会”的情形由“交”推知；“先会后交”只讲“会”，“交”的情形由“会”推知。“交”是日蚀，“会”是月蚀。而日蚀起始的部分只能在日的西半边，月蚀起始的部分只能在月的东半边。

正光历此段又说：“凡日月蚀，去交十五为限，十以下是蚀也；十以上亏蚀微少，光影相接而已。”在景初历中，这一段是“求去交度术”中的文字，说的是“去交度十五以上，虽交不蚀”，十以下才叫做“蚀”，十到十五因“亏蚀微少，光相及而已”。正光历把它移到此处，抄袭之迹十分明显。

(9)推蚀分多少术。基本思想是景初历所说“去交度十五以上，虽交不蚀”。交蚀最多定为15分(分数越多，所蚀越深)，区别是明确指出“置入交限十五度”，与以去交度十五为不偏食限是一样的。所给公式是：

15度－朔(或望)去交日(亦“度”)分＝蚀度分 …………………… (9.23)

朔望去交日(亦度)分的求法见本章二节3(1)～(3)。

4. 推合朔入历迟疾盈缩

(1)推合朔入历迟疾术。就是推算合朔入迟疾历日及余的方法，与景初历等历同。公式是：

$$\frac{\text{入纪朔积分}+\text{纪下迟疾差分}-n\text{通周}}{\text{日法}}=\text{入历日}\frac{\text{日余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9.24)$$

其中 n 为自然数或 0，且使(9,24)式左端分子大于或等于 0，小于通周。n 通周叫做“积周”。得数“入历日”自所入纪首日名起算，算外为所求年天正十一月合朔入迟疾历的日名。

(2)迟疾差数表。(9.24)式中的“纪下迟疾差分”就是从此表变得的所入纪下的迟疾差(日和日余)数。数据计算法用景初历公式，先算迟疾纪差〔参见第五章(5.2)式〕。

$$\text{迟疾纪差}=\text{通周}-(\text{纪月}\times\text{通数}-n\cdot\text{通周})$$

正光历的区别是把上式除以日法，化分为日和日余，即：

$$\frac{\text{通周}}{\text{日法}}-\frac{\text{纪月}\times\text{通数}-n\cdot\text{通周}}{\text{日法}}=\text{迟疾纪差日}\frac{\text{日余}}{\text{日法}} \cdots\cdots\cdots\cdots (9.25)$$

式中通周 2065266，纪月 749520，通数 2213377，日法：74952。代入(9.25)式：

$$\frac{2065266}{74952}-\frac{749520\times2213377-n\cdot2065266}{74952}$$

命 $n=803271$，得：

$$27\frac{41562}{74952}-27\frac{20250}{74952}=\frac{21312}{74952}$$

照例，第一纪即甲子纪首的迟疾差不由算法，是实测而得，以后每纪递减 21312 分(1 日＝74952 分)。就得到了表 9.3 中各栏数据。

表 9.3　迟疾差表

纪名	迟疾差	
	整日	日余[①]
甲子纪	24 日	63568
甲戌纪	24 日	42256
甲申纪	24 日	20944
甲午纪	23 日	74584
甲辰纪	23 日	53272
甲寅纪	23 日	36960

(3)求次月入历日术。头月入历日及余加一个朔望月($29\frac{39769}{74952}$日)，减一个近点月数($27\frac{41562}{74952}$日)，得次月入历日及余。即：

$$\text{头月入历日及余}+29\frac{39769}{74952}\text{日}-27\frac{41562}{74952}\text{日}$$

$$=\text{头月入历日及余}+1\frac{73159}{74952}\text{日}=\text{次月入历日及余}$$

或者：

$$\begin{cases}\text{头月入历日}+1=\text{次月入历日}\\ \text{头月入历日余}+73159=\text{次月入历日余}\end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots (9.26)$$

---

① 日余分母：74952(日法)。

次月入历日余满日法(74952)入整日，日满 27 以上当除去之，相应也要从日余之中除去周日余(41562 分)，若日余不够减，退 1 日，加周虚。其实就是入历数满 1 个近点月则除去之。设入历日为 x，日余为 y，可列如下算式：

$$x\frac{y}{\text{日法}}-27\frac{\text{周日余}}{\text{日法}}=(x-27)\frac{y-\text{周日余}}{\text{日法}}$$

若 $y<$周日余，右端从整数中退 1 化为日法分入分子：$(x-28)\frac{y+\text{日法}-\text{周日余}}{\text{日法}}=(x-28)\frac{y+\text{周虚}}{\text{日法}}$。周虚＝日法－周日余＝74952－41562＝33390。

当 $x=27$，日余<周日余，从整日中不可能“减一日”，“加周虚”，此种情形为“入历值”。乾象历称为“直(值)周日”，意思是用迟疾历表周日栏中数据即可运算。$x=27$，日余>周日余，除去 27 和周日余后，入于迟疾历 1 日，须用表初(1 日)数据计算。

(4)求望入历术。求得合朔入历日及余以后，加半个朔望月即得望日入历日及余，加后得数若大于近点月则除去之。

$$\text{合朔入历日及余}+\frac{1}{2}\times\text{朔望月}=\text{望日入历} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9.27)$$

或者：

$$\begin{cases}\text{合朔入历日}+14-29m=\text{望日入历} & \cdots\cdots (9.28)\\ \text{合朔入历日余}+57360.5-74952n=\text{望入历日余} & \cdots\cdots (9.29)\end{cases}$$

(9.28)式中的 m 是自然数或 0，且使 0≤(9.28)式左端<27；(9.29)式中的 $n=1$ 或 0，并使 0≤(9.29)左端<74952。当 $n=1$ 时，(9.28)式右端加 1。当 $m\geq1$ 时(9.29)右端减周日余。

(5)迟疾表。

表 9.4　正光历月行迟疾表

日序	月行迟疾度及分	损益率	盈缩并	盈缩积分
一日	14°361′	益 680′	盈初	盈积分
二日	14°300′	益 619′	盈 680′	盈积分 7550′
三日	14°236′	益 555′	盈 1299′	盈积分 14422′
四日	14°176′	益 490′	盈 1854′	盈积分 20584′
五日	14°99′	益 418′	盈 2344′	盈积分 26024′
六日	13°471′	益 285′	盈 2762′	盈积分 30665′

续表

日序	月行迟疾度及分	损益率	盈缩并	盈缩积分
七日	13°266′	益 80′	盈 3047′	盈积分 33829′
八日	13°61′	损 125′	盈 3127′	盈积分 34717′
九日	12°439′	损 252′	盈 3002′	盈积分 33329′
十日	12°338′	损 353′	盈 2750′	盈积分 30531′
十一日	12°237′	损 454′	盈 2397′	盈积分 26612′
十二日	12°136′	损 555′	盈 1943′	盈积分 21572′
十三日	12°35′	损 656′	盈 1388′	盈积分 15410′
十四日	11°464′	损 732′	盈 732′	盈积分 8127′
十五日	12°36′	益 655′	缩初	
十六日	12°109′	益 582′	缩 655′	缩积分 7272′
十七日	12°189′	益 502′	缩 1237′	缩积分 13734′
十八日	12°290′	益 401′	缩 1737′①	缩积分 19309′②
十九日	12°392′	益 299′	缩 2140′	缩积分 23759′
二十日	12°496′	益 195′	缩 2439′	缩积分 27079′
二十一日	13°118′	益 68′	缩 2634′	缩积分 29244′
二十二日	13°243′	损 57′	缩 2702′	缩积分 29999′
二十三日	13°388′	损 202′	缩 2645′	缩积分 29366′
二十四日	14°29′	损 348′	缩 2443′	缩积分 27123′
二十五日	14°174′	损 493′	缩 2095′	缩积分 23259′
二十六日	14°287′	损 606′	缩 1602′	缩积分 17786′
二十七日	14°312′	损 631′	缩 996′	缩积分 11058′
周日	14°339′小分 9684	损 650′小分 9684③	缩 365′	缩积分 452′④

逐栏数据的算法见《律历志》“校勘记”〔一一〕，不赘。表中错误如注①～④。惟周日实行度及损益率栏数字算法须作说明。

周日盈缩并：“缩 365′”，是二十七日以前损益率之和，到周日余分(41562)完了时，应该盈缩适尽，即是说周日余分(41562)之内损 365 分，那么，周日全天(74952 分)损若干？此比例式极易解出：

$$\text{周日全天损率}=\frac{\text{盈缩并}\times\text{日法}}{\text{周日余}}=658\,\frac{9684}{41562}\text{分} \qquad (9.30)$$

① 1737′，误，应为 1739′。十七日缩积 1237＋益率 502＋1739。

② 19309′，误，应为 19307′。缩积 1739×日法 74952÷小周 6751＋19307。

③ 650′，误，应为 658′。实行分－平行分＝14°339′－13°186′＝1°3153′＝658′。

④ 452′，误，应为 4052′。缩积分 $365\times\frac{\text{日法 }74952}{\text{小周 }6751}=4052$。

即周日损率 658 分，小分 9684。小分分母为 41562(以周日余分为分母)，损率以章法 505 为分母。

周日实行度等于平行度加损率：

$$周日实行度=平行度+损率=13\frac{186}{505}+\frac{658\frac{9684}{41562}}{505}$$

$$=14\frac{339\frac{9684}{41562}}{505}\cdots\cdots\cdots\cdots(9.31)$$

得周日实行 14 度 339 分，小分 968 与表列相符。

(6)推合朔交会月蚀定大小余。基本思路是：在本朔望大小余之上加减与入迟疾历对应的盈缩数，即得定大小余。《律历志》公式是：

$$本朔望大余+\frac{本朔望小余\mp(盈缩积分\pm\frac{入历日余\times入历下损益率}{小周})}{日法}$$

$$=定大余\frac{定小余}{日法}\cdots\cdots\cdots\cdots(9.32)$$

(9.32)式证法如下文。

按上述基本思路：

$$定大小余=本朔望大小余\mp迟疾盈缩数\cdots\cdots\cdots\cdots(9.33)$$

迟疾盈缩数所盈越多，定大小余比本朔望大小余小得越多，所以(9.33)式右端是“干”号，表示迟疾盈缩数是盈数则减，是缩数则加。

迟疾盈缩数由两部分构成：一是与历日对应的盈缩积分，一是与入历日余对应的损益率。由迟疾表(表 9.4)的结构可知。“损益率”中损益二字完全是对盈缩积(即盈缩并，二者是一回事，仅单位制不同)而言：“益”则盈缩积是盈盈增、是缩缩增；“损”则盈缩数盈缩俱损。所以上述两部分之间用加减号：即：

$$迟疾盈缩数=盈缩积分\pm损益率分数$$

为了使上式成立，还应把盈缩积分和损益率的单位划同。前者单位制：1 度=74952 分，后者是 1 度=505 分。划同的方法可这样设想：先把损益除月亮的每日平行分(小周)，化为日，再乘以日法化为分。即 $\frac{损益率\times日法}{小周}$。那么，入历日余对应的损益率分数便是 $\frac{入历日余}{日法}\times$

$\frac{\text{损益率}\times\text{日法}}{\text{小周}}=\frac{\text{入历日余}\times\text{损益率}}{\text{小周}}$。上式应该写为：

$$\text{迟疾盈缩数}=\text{盈缩积分}\pm\frac{\text{入历日余}\times\text{入历下损益率}}{\text{小周}} \quad \cdots\cdots\cdots (9.34)$$

(9.34)式左端除以日法化为度，就能直接与本朔望小余相加减了。把它代入(9.33)式得：

$$\text{定大小余}=\text{本朔望大余}+\left(\frac{\text{本朔望小余}}{\text{日法}}\mp\frac{\text{盈缩积分}\frac{\text{入历日余}\times\text{入历下损益率}}{\text{小周}}}{\text{日法}}\right)$$

$$=\text{本朔望大余}+\frac{\text{本朔望小余}\mp\left(\text{盈缩积分}\pm\frac{\text{入历日余}\times\text{入历下损益率}}{\text{小周}}\right)}{\text{日法}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9.35)$$

这正是《律历志》所给公式。

(9.32)式括号内的部分叫做“定积分”，定积分为盈，前用“－”号；为缩，用“＋”号。若(9.32)式中的分式大于1，交会加时(定大小余)“在后日”，即在本朔望大余后1日(历法朔望是按本朔望大余确定的，在本朔望大余后1日，即比历法朔望晚1日)。若定积分是“缩”，又大于本朔望小余，应从本朔望大余中借1日，化为日法分，加入本朔望小余，而后再与定积分相减。这时的定大余比本朔望大余少1日，交会加时在本朔望前1日。月蚀发生的时间就由望日定大小余算得的定日加时确定。

(7)推加时术。1日74952分(等于日法)，化为十二时(辰)，每时得6246分，称为时法。

$$\frac{\text{定小余}}{\text{时法}}=\text{时数}\frac{\text{余}1}{\text{时法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9.36)$$

从子时起算，时数算外，为朔望加时，即朔望所在时辰。例如时数为10，从子时起算，时数算外为第11个时辰——戌时，加时在戌。

时数的余数(余1)可按12分法继续划分，首先4等分之：

$$\frac{\text{余}_1\times 4}{\text{时法}}=\text{分}_1\frac{\text{余}_2}{\text{时法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9.37)$$

因$\text{余}_1<\text{时法}$，当分_1为1、2、3，分别名为少、半、太。上例中，加时在戌少或戌半、戌太。

将余_2再分为三等分：

$$\frac{余_2\times 3}{时法}=分_2\frac{余_3}{时法}\quad\cdots\cdots\quad(9.38)$$

分$_2$必小于 2，当分$_2$为 1、2 时，分别名为强、弱，与所近分$_1$相比而得名。如分$_1$为戌少，分$_2$必在戌少、戌半之间。若分$_2$=1，靠近戌少，名为戌少强；若分$_2$=2，靠近戌半，名为戌半弱。余类推。

以上所推为朔望加时，若由二节 3(3)已推知朔望有蚀(朔交会，望月时)，以上所推便是交会、月蚀加时。《律历志》说："日之冲为破，月常在破下蚀。""日之冲"即与日相隔半周天的位置上。月蚀时，日月如冲，相距半周天。

(8)入历值周日者术。所谓"入历值周日"，就是本节 4(3)中说的"入历值"，指入历日满 27，而日余不满周日日余的情形，现求在此情况下的合朔交会月蚀定大、小余，所给公式是：

$$本朔望大余+\frac{本朔望小余+缩积分-\dfrac{(周日日余\times 损率+周日度小分)\times 入历日余}{小周\times 周日日余}}{日法}$$

$$=定大余\frac{定小余}{日法}\quad\cdots\cdots\quad(9.39)$$

前边说过，对于"入历值"的情形，仍用周日参数计算，把周日参数人入(9.32)式，由于周日盈缩积为缩积，括号前用"+"号；周日损益率为损率，盈缩积分后用"−"号，(9.32)式写成：

$$本朔望大余+\frac{本朔望小余+(缩积分-\dfrac{入历日余\times 损率}{小周})}{日法}$$

$$=定大余\frac{定小余}{日法}\quad\cdots\cdots\quad(9.40)$$

由于周日损率大分 658，另有周日度小分 9684，小分分母为周日日余(41562)，(9.40)式左端分子中的一项$\dfrac{入历日余\times 损率}{小周}$可作如下变化：

$$\frac{入历日余\times 损率}{小周}=\frac{入历日余\times(损率+\dfrac{周日度小分}{周日日余})}{小周}$$

$$=\frac{(周日日余\times 损率+周日度小分)\times 入历日余}{小周\cdot 周日日余}$$

将此式代入(9.40)式，就得了(9.39)式的形式。

(9.39)式与(9.32)式一样，当本朔望小余加缩分大于日法时，交蚀在本朔望后 1 日，《律历志》叫做“蚀后日”。推加时法同本节 4(7)。

5. 推合朔弦望度术

(1)推日度术：积度与积日数同，积度减周天，所余不满周天度者即所求日度。

$$\frac{\text{入纪朔积日}\times\text{日度法}-n\cdot\text{周天}}{\text{日度法}}=\text{日度}\frac{\text{余}}{\text{日度法}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.41)$$

日度法即度法(6060)，推法与以往诸历同。所得日度从牛前 12 度(即斗 15 度)起算，依次除去各宿度，不满宿者算外为所求年天正十一月朔日度半日所在宿度。

(2)推日度又法。图 9.3 冬至点 A 为周天度起点，到下一个冬至点 D 共 $365\frac{1477}{6060}$度。D 所在日夜半为 C 点，CD＝冬至小余。B 为所求半天正十一月朔日夜半。求 AB 的度数。显然，$AB=AD-(BC+CD)$，即：

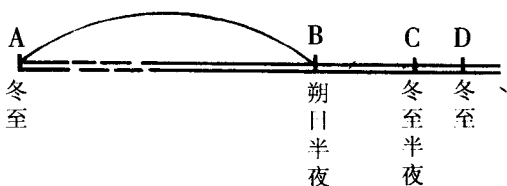



图 9.3　朔日日度推法

$$\text{所求日度}=\text{周天度分}-(\text{冬至距天正十一月朔日度半天数}+\text{冬至小余})\cdots\cdots \quad (9.42)$$

由于冬至距十一月朔的天数是 B 到 D 点所在日的天数，BC 天数不包括 D 所在日，所以，(9.42)式的精细写法是：

$$\begin{aligned}\text{所求日度}&=\text{周天度分}-(\text{冬至到朔日数}-1+\text{冬至小余})\\&=\text{周天度}-(\text{冬至到朔日数}-1)+\frac{\text{斗分}-\text{冬至小余}}{\text{日度法}}\end{aligned}\cdots\cdots \quad (9.43)$$

式中“斗分－冬至小余”，不够减时，从分式前的整数日中取 1 日，化为日度法(6060)分，加入斗分，而后再减。

所得日度分仍是从牛前 12 度起算，逐宿去之，至不满某宿度时，为入该宿度分。

(3)求次月日所在度术。

$$次月朔日夜半日所在度分=头月朔日夜半日所在度分+\left\langle\begin{array}{l}30\text{ 度(大月)}\\29\text{ 度(小月)}\end{array}\right. \qquad (9.44)$$

把本节5(1)、(2)算得的十一月朔日夜半日度分当做(9.44)式中的"头月朔日夜半日所在度分",利用(9.44)式依次可算得每个月朔的天度分。同样可得:

$$次日夜半天度分=头日夜半天度分+1\text{ 度} \qquad (9.45)$$

把本节5(1)、(2)求得的十一月朔日度分当做(9.45)式中"头日夜半天度分",利用(9.45)式,依次可求每天的日度分数。

由所得天度求宿度法同前,《律历志》还多加了一句话:"径斗去其分一千四百七十七。""径"为"经"字之误。正光历周天自斗5度始,斗分(1477)在斗后,所以要"经斗去分"。本节5(1)、(2)虽无此言,同样要"经斗去分"。对于正光历,凡求宿度都不可忘了这句话。言不必备,有一处点明了,其余都意在其中也就是了。

(4)推合朔日月共度术。以上所求都是夜半天度,把朔日夜半天度加上朔小余,就是合朔天度了。

$$合朔度分\rightarrow夜半度+(夜半分+朔小余) \qquad (9.46)$$

要使(9.46)式有可操作性,须将括号内两项单位划同。前者分母为日度法,后者分母是日法,把后者分母也化为日度法:

$$\frac{\frac{朔小余}{日法}\times日度法}{日度法}=\frac{\frac{朔小余\times章岁}{章月}}{日度法}$$

式中$\frac{朔小余\times章岁}{章月}$与夜半分的分母都是日度法,可以直接相加。再把它们除以日度法化为度,又可与夜半度相加。这样(9.46)式就成了如下的等式:

$$合朔度分=夜半度+\frac{夜半分+\frac{朔小余\times章岁}{章月}}{日度法} \qquad (9.47)$$

这就是《律历志》所给公式。其中$\frac{朔小余\times章岁}{章法}=大分\frac{小分}{章法}$,就是

《律历志》所说："以章岁乘朔小余，以章月除之，所得为大分，不尽为小分。"此外，夜半度、夜半分指的是本节5(1)、(2)推算出的天正十一月朔日夜半时日所在度分。

由合朔度分求宿度，如前法。

(5)求次月合朔共度术。头月合朔度分加一个朔望月($29\frac{39769}{74952}$)即得，仍须把朔望月零分($\frac{39769}{74952}$)的分母化为日度法(6060)，化法与本节5(4)同：

$$\frac{39769}{74952}=\frac{\frac{39769}{74952}\times \text{日度法}}{\text{日度法}}=\frac{\frac{39769\times \text{章岁}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}=\frac{3215\frac{2455}{6246}}{6060}$$

于是得：

$$\left.\begin{array}{l}\text{头月合朔度}+29=\text{次月合朔度}\\ \text{头月合朔分}+3215\frac{2455}{6246}=\text{次月合朔分}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.48)$$

其中3215为大分，2455为小分，小分满6246(章月)从大分，大分满蔀法(即日度法6060)从度。所得次月合朔度分目牛前12度起算，"宿次除之"，"经斗除其分"，即得次月合朔时日月所在宿度分。

(6)推月度术。推算天正合朔日夜半时，月所在度，应按下式推算：

$$\text{入纪朔积日}\times\text{每日月行度}-n\cdot\text{周天度}=\text{夜半月度分}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.49)$$

为了与周天度分母相同，每日月行度分子不用小周而用月周，(9.49)式可写为：

$$\text{入纪朔积日}\times\frac{\text{月周}}{\text{日度法}}-\frac{n\cdot\text{周天分}}{\text{日度法}}$$

$$=\frac{\text{入纪朔积日}\times\text{月周}-n\cdot\text{周天分}}{\text{日度法}}=\text{夜半月度}\frac{\text{分}}{\text{日度法}}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.50)$$

(9.50)式就是《律历志》所给公式，由夜半月度分求宿度如前法。

(7)推月度又法。本节5(4)推得合朔时度分，合朔时日月同度。现求夜半月度，只要算出合朔刻夜半间的月行度即得。如图9.4，A为合朔点，B为夜半点，$AB=$朔小余，夜半时日必在B，设夜半时月在C，在朔小余时间内，日行度$=AB$，月行度$=AC$。合朔时日月同处于A。显然：

图 9.4　夜半月度

$$\text{夜半月度分}=\text{合朔度分}-AC \quad \cdots\cdots (9.51)$$

关键是求出 AC。因 $AC:BA=\text{月速}:\text{日速}=\frac{\text{小周}}{\text{章岁}}:1$。而 $BA=\text{朔小余}/\text{日法}$,此比例式可解:

$$AC=\frac{BA\times\text{月速}}{\text{日速}}=\frac{\text{朔小余}\times\text{小周}}{\text{章岁}\times\text{日法}}=\text{度}\frac{\text{余}}{\text{章岁}\times\text{日法}}$$

$$=\text{度}\frac{\text{余}}{\text{章岁}\times\text{章月}\times 12}=\text{度}\frac{\text{余}/\text{章月}}{\text{日度法}}=\text{度}\frac{\text{大分}\frac{\text{小分}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}$$

与(9.47)式比较可知,它与合朔度分的单位制相同,可直接加减。代入(9.51)式得:

$$\text{夜半月度分}=\text{合朔度分}-\frac{\text{朔小余}\times\text{小周}}{\text{章岁}\times\text{日法}}$$

$$=\text{合朔度分}-\text{度}\frac{\text{大分}\frac{\text{小分}}{\text{章月}}}{\text{日度法}} \quad \cdots\cdots (9.52)$$

(9.52)式就是《律历志》所给公式。

(8)求次月度术。头月朔距次月朔大月 30 日,小月 29 日,月行度各为:

$$13\frac{186}{505}\times 30-\text{周天度}=401\frac{25}{505}-365\frac{1472}{6060}=35\frac{4883}{6060}\text{度}$$

$$13\frac{186}{505}-\text{周天度}=35\frac{4883}{6060}-13\frac{186}{505}=22\frac{2651}{6060}\text{度}$$

因此:

$$\text{次月朔月度分}=(\text{头月朔月度}+35)\frac{\text{头月朔月分}+4883}{6060}(\text{大月}) \quad \cdots\cdots (9.53)$$

$$次月朔月度分=(头月朔月度+22)\frac{头月朔月分+2651}{6060}(大月) \quad \cdots (9.54)$$

两式右端分满日度法(6060)从度，度分满周天度则去之。由所得月度分求宿度法如前。

(9)求次日月行度术。次日月行度等于头日月行度加月一日行度($13\frac{2232}{6060}$度)。即：

$$次日月行度分=(头日月行度+13)\frac{头日月行分+2232}{6060} \quad \cdots\cdots (9.55)$$

头日月行度分可由本节5(6)～(8)算得的朔日月行度充当，利用(9.55)式可依次算出每一日月行度分。

对(9.55)式得数的处理法，照例是分满日度法(6060)从度，度分满周天度去之。由所得"月行度分"，从牛前12度起，依次除去各宿度，还要"经斗除分"，到"不满宿者"，算外就是月所在宿度。

(10)求弦、望日所在度术。由本节5(4)、(5)求得的合朔日度分加四分之一朔望月($\frac{1}{4}\times 29\frac{39769}{74952}=7\frac{28680\frac{1}{4}}{74952}=7\frac{2318\frac{5298\frac{1}{4}}{6246}}{6060}$度，其中7为整度，2318为大分，5298为小分，$\frac{1}{4}$的分子1为微分)得上弦日度分，再加得望，三加得下弦，四加等于1个朔望月，得下月合朔。即：

上弦日度分=朔日日度分+7度+大分2318+小分5298+微分1 ……(9.56)

望日日度分=上弦日度分+7度+大分2318+小分5298+微分1 ……(9.57)

下弦日度分=望日度分+7度+大分2318+小分5298+微分1 ……(9.58)

次月合朔日度分=下弦日度分+7度+大分2318+小分5293+微分1 ……(9.59)

其中微分满4入小分，小分满章月(6246)入大分，大分满日度法(6060)入整度。所得日度分满周天度分则去之，由剩余的不满周天度的部分求所在宿度如前法(自斗前12度，"宿次除之"，"经斗去分"，"不满宿者，

算外”为宿度）。

（11）二十八宿度分表（略）。

6. 推五行、没灭、易卦、气候、上朔术

（1）推五行用事日。与以往诸历同法。分一年 $365\frac{1477}{6060}$日为五等分，得 $73\frac{295\frac{9\frac{3}{5}}{24}}{6060}$日，其中 295 为大分，9 为小分，$\frac{3}{5}$的分子 3 为微分。五行各主 1 等分，其中木、火、金、水四行所主各从二十四节气中的四立（木自立春、火自立夏、金自立秋、水自立冬）开始，$73\frac{295\frac{9\frac{3}{5}}{24}}{6060}$日之后，一季未了，尚余 $18\frac{1588\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{6060}$日，归土行所主，合四季之余，土行所主亦得 $73\frac{295\frac{9\frac{3}{5}}{24}}{6060}$日。

二节 2(1)“推二十四气术”已算出四立大小余，如此得木、火、金、水四行所主起始日名，各加一行主日可依次推出每季土王起始日名。

季春土王：立春大小余＋木王 73 日＋大分 295＋小分 9＋微分 3
＝季春土王所主起始日大、小余 ……………………… (9.60)

其中微分满 5 入小分，小分满 24 入大分，大分满日度法入整，所得大余满 60 则除去之，剩余的不满 60 的部分自纪首名起算，算外就是季春土王首日的日名。

夏季火王：季春土王始日大小余＋土王 18 日＋大分 1588＋小分 20
＋微分 2＝夏季火王所主起始日大、小余…………… (9.61)

“夏季火王所主起始日大、小余”就是立夏大、小余。式中数据的处理仍然是：微分满 5 入小分，小分满 24 入大分，大分满日度法入整日，整日（即大余）满 60 除去之。

余如此法，五行所主起始日可依次求得。

《律历志》还给出另一种计算法：土王所主起始日不由四立加 73 日余得到，而是由四立大、小余前推 18 日余得到。如图 9.5，土王始日(B)大、小余既可由立春(A)大、小余加 AB 得到，也可由立夏(C)大、小余减 BC 得到。后法《律历志》表达的公式是：

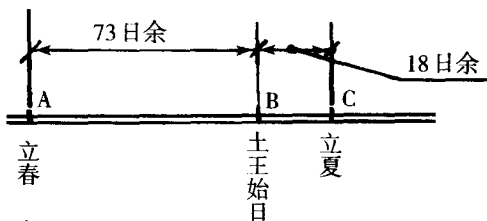



图 9.5　求土王另法

四季土王：四立大小余－大余 18－大分 1588－小分 20－微分 2
＝土王始日大、小余 ……………………………………… (9.62)

若分不足减，破大余 1 日为 6060 入大分，或破大分 1 分为 24 入小分、破小分 1 分为 5 入微分，然后再减。

若大余不足减，加 1 甲子 60 日然后减。所得大余从纪首日名起算，算外为土王起始日名。

(2)推没灭术。正光历一个回归年日数去 6 甲子得 $5\frac{1477}{6060}$ 日，$5\frac{1477}{6060}$ 为 1 年没数；每没日数为 $365\frac{1477}{6060}\div 5\frac{1477}{6060}=69\frac{20764}{31777}$ 日 $=\frac{2213377}{31777}$，其中 69 为没日，20764 为没余，31777 为没法[①]，周天 2213377 又称为没分。有了这几个参数就能计算了。

正光历与以前诸历一样，也是把冬至前积日当做积没，积没加 1 为冬至后的第 1 个没日。乘以每没日数(乘没分、除没法)，得此没日以前积日数，去掉若干甲子周(60 日的若干倍)，得此没日大余，这没日就是已知的了。《律历志》所给公式是：

$$\frac{(\text{冬至积没}+1)\times\text{没分}}{\text{没法}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{没法}} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (9.63)$$

$$\text{积日}-n\cdot 60=\text{大余} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (9.64)$$

① 《魏书·律历志》误为 31707，中华书局 1987 年版，第 2678 页。

其中 n 为自然数或 0。且使 $0\leqslant$ 积日 $-n\cdot 60<60$。小余和大余《律历志》分别称为没余和没日。为不使每没日数中的参数(没日 69、没余 20764)混淆,笔者改之。

从纪首起算,大余算外就是冬至后第 1 个没日始的日名。

(3)求次没术。既知第 1 没,加每没日数及余就是第 2 没,其余各没依次可求。

$$(\text{头没大余}+\text{没日})\frac{\text{头没小余}+\text{没余}}{\text{没法}}=\text{次没积日}\frac{\text{次没小余}}{\text{没法}}\quad\cdots\cdots\ (9.65)$$

照例,次没小余满没法入积日,次没积日满 60 则除去之,余为大余,大余算外为没日。

当算得的小余为 0 时,该没称为灭日。

(4)可名为"推没入月日术"(原文无题名)。是推算冬至后没,入于某月、某日的。如图 9.6,由于目的是求冬至后没 F,落在所求年中的某月某日,求出 F 距该年天正十一月朔日夜半的总日数,从中依次减去十一月后诸月日数(大月减 30 日,小月减 29 日),直到所余不足某月日数时,余数就是入于该月日数。所以,关键是算出 AF 或 AE 之间的总日数。

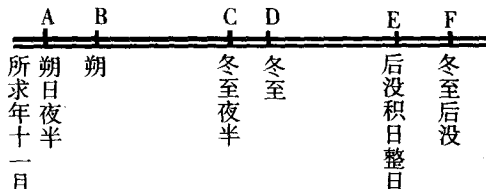



图 9.6　冬至后没入月、日

按《律历志》的说法,总日数等于"冬至去朔日(AC)加没日","冬至去朔日"很容易理解,可以由以前算出的冬至日名和十一月朔日名,查甲子表得到(数一数,其间相距几日);也可由冬至大余减十一月朔大余(若不足减,冬至大余加 1 甲子周 60 日后再减)得到。正光历中"没日"的概念最混乱,冬至后没到冬至之间日数为没日〔见本节 6(2)"推没灭术"〕,每没日数 69 为没日,没前积日也称没日〔见本节 6(3)"求次没术"〕。本处所说的没日,从图 9.6 看,应该指冬至到冬至后没之间的日数 DF。于是有:

$$\text{总日数}=\text{冬至去朔日数}+\text{没日}+\text{冬至小余日}=AC+DF+CD$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.66)$$

所以,《律历志》"没日"下还有一句"冬至小余满蔀法从没日"。"满"作"除"字更为贴切。没日(*DF*)的算法是:

$$\text{没日}=\frac{(\text{蔀法}-\text{冬至小余})\times\text{没分}}{\text{蔀法}\times\text{没法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.67)$$

此式作如下变化后,意义就易于明了:

$$\frac{(\text{蔀法}-\text{冬至小余})\times\text{没分}}{\text{蔀法}\times\text{没法}}=\frac{\text{蔀法}-\text{冬至小余}}{\text{蔀法}}\times\frac{\text{没分}}{\text{没法}}$$

$$=(1-\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}})\times\text{每没日数。}$$

前面说过,冬至以前的没数等于积没与冬至小余之和(积没 $\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}}$),积没为整数,$\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}}$是不足1没的畸零数。那么,冬至前第1个没日到冬至的日数应是$\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}}\times$每没日数,冬至后的第一个没日到冬至的日数则是$(1-\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}})\times$每没日数。所以,(9.67)式中的"没日"是指冬至到冬至后没之间的日数,即图9.6中的*DF*。

这样(9.66)式可表达为:

$$\text{总日数}=(\text{冬至大余}-\text{朔日大余})+\frac{(\text{蔀法}-\text{冬至小余})\times\text{没分}}{\text{没法}}$$

$$+\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}}=\text{冬至去朔日}+\text{没日}+\frac{\text{冬至小余}}{\text{蔀法}} \quad\cdots\cdots\cdots \quad (9.68)$$

右端为《律历志》公式,中间是笔者诠释的计算式。从算得的"总日数"中依次减去天正十一月以后诸月日数,像《律历志》所说:"命日天正十一月,如历月大小除之,不足除者入月算[①],命以朔,算外,即冬至后没日。"

求次没,只须在上面求得的总日数之上加1没日数 $69\frac{20764}{31777}$ 日即得。只是(9.68)式中冬至小余分母为蔀法,将1没日数的分母也化为蔀

① 原文"不足"后有逗号,误。见《魏书·律历志》,中华书局1987年版,第2678页。又同行下"加没没日六十九",应于二个没字之间加逗号或冒号。

法得：

$$69\,\frac{20764}{31777}=69\,\frac{\frac{20764}{31777}\times 6060}{6060}=69\,\frac{3959\,\frac{24697}{31777}}{6060}\text{日}$$

《律历志》把其中 69 称为没日，3959 称为没余，24697 称为没分。

加后仍“以历月大小除之”，就得到没所在月、日。

(5)推四正卦术。《易》有先天卦(即所谓伏牺所画卦)和后天卦(文王八卦)，前者以乾、坤、离、坎为四正向，后者以坎、离、震、兑为四正向。这里说的四正卦是后天卦中的坎、离、震、兑，因分主四方正向，因称四正卦。按五行论，四方与四季相联，所以，四正卦也分主四季：东方震卦主春季，故自二月中气春分始；南方离卦主夏季，故自五月中气夏至始；西方兑卦主秋季，故自八月中气秋分始；北方坎卦主冬季，故自十一月中气冬至始。

《律历志》说：“因冬至大小余，即坎卦用事日；春分，即震卦用事日；夏至，即离卦用事日；秋分，即兑卦用事日。”二分、二至日大、小余已算出，四正卦便是已知的。

(6)求中孚卦：中孚距冬至 $\dfrac{5530\,\frac{9\frac{1}{5}}{24}}{6060}$ 日，故自冬至大小余起坎卦用事，“加冬至小余五千五百三十，小分九，微分一”。中孚卦始用事。其中微分分母是 5(“微分满五从小分”)，小分分母是气法 24(“小分满气法从小余”)，小余分母为蔀法 6060(“小余满蔀法从大余”)。

四正卦之中坎卦之后的中孚卦如此，其余三正之后的解、咸、贲卦亦如此。公式是：

$$\text{分、至(或坎、离、震、兑)大余}+\frac{\text{分至小余}+5530\,\frac{9\frac{1}{5}}{24}}{\text{蔀法}}$$

$$=\text{中孚(解、咸、贲)等卦大余}\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}}\quad\cdots\cdots\quad(9.69)$$

所得中孚等卦大余自纪首日名起算，算外为中孚等卦起始用事日。

(7)求次卦。《律历志》说：“求次卦，加坎大余六，小余五百二十九，

小分十四，微分四。微分满五从小分，小分满气法从小余，小余满蔀法从大余。(大余)命以纪，算外，即复卦用事日。”意思是说，自坎卦用事末日到复卦用事始日相隔 $6\frac{529\frac{14\frac{4}{5}}{24}}{\text{蔀法}}$ 日。而坎、复之间是中孚卦，如此是说，中孚用事 $6\frac{529\frac{14\frac{4}{5}}{24}}{\text{蔀法}}$ 日。用公式表达为：

$$(\text{坎大余}+6)\frac{\text{坎小余}+529\frac{14\frac{4}{5}}{24}}{\text{蔀法}}=\text{中孚大余}\frac{\text{中孚小余}}{\text{蔀法}} \cdots\cdots\cdots \quad (9.70)$$

自纪首起算，“中孚大余”算外，为复卦用事日。

《律历志》又说：“其解加震，咸加离，贲加兑，亦如中孚加坎。”意思是说，东正震卦之后的第三卦解，南正离卦之后的第三卦咸，西正兑卦之后的第三卦贲都与坎后第三卦复一样。

如此是说：四正卦坎、离、震、兑自分、至始，各主 $\frac{5530\frac{9\frac{1}{5}}{24}}{6060}$ 日，接着由第二卦中孚、咸、解、贲主事，各得 $6\frac{529\frac{14\frac{4}{5}}{24}}{6060}$ 日，接着由第三卦复、姤、大壮、观用事，亦各得 $6\frac{529\frac{14\frac{4}{5}}{24}}{6060}$ 日……直到本季之末第十六卦晋、井、大畜、颐，所余只有：

每季日数($91\frac{7944\frac{1}{4}}{6060}$日)－正卦所主($\frac{5530\frac{9\frac{1}{5}}{24}}{6060}$日)－中孚等卦所

$$主=5\frac{1059\frac{5\frac{3}{5}}{24}}{6060}日$$

四正卦各与它们相加：$\frac{5530\frac{9\frac{1}{5}}{24}}{6060}+5\frac{1059\frac{5\frac{3}{5}}{24}}{6060}=6\frac{529\frac{14\frac{4}{5}}{24}}{6060}$日，与第三卦后各卦所主相同，如同四正卦各与其后卦合为一卦，六十四卦实同六十卦，六十卦分周天 $365\frac{1477}{6060}$日，每卦所得恰是 $6\frac{529\frac{4\frac{4}{5}}{24}}{6060}$日。从这一点看，与乾象历、景初历等历相同。

（8）十二月卦。六十四卦除去四正卦，余六十卦，平分入 12 月（不计闰月），每月得五卦。四正卦分别置于四仲月（分、至所在月：二、五、八、十一月）四仲月得六卦。卦月搭配见表 9.5。

（9）卦候与职官。大意是，每月五卦，配以五官，次序是天子居中，左三公，右诸侯、大夫、卿。周而复始循环排列。但并不以月为断。而是以四正卦为限隔，正卦居四方，为方伯。其后第一卦为三公，第二卦为天子，第三卦为诸侯，第四卦为大夫，第五卦为九卿，是为一周。第六卦又为三公……如此依次排列，循环不已。直到下一正卦，被“方伯”隔断而止。方伯之后，进入再一轮循环。

卦与候（气候）的关系，分作四类：九三应上九；九三应上六；六三应上六；六三应上九。气候特征各有六个字，依次是：清净、微温、阳风；绛赤、决温、阴雨；白浊、微寒、阴雨；麹尘、决寒、阳风。

为了把以上解释清楚，先介绍一些易卦的有关知识。

卦的基本单元是爻，爻分阴阳：用一条短横线表达的为阳爻，中间断开为二截的为阴爻。叠三爻成卦，是为八卦（或阴或阳，每三爻成一卦，只有八种组合形成，每种为一卦）。八卦之中，两两相叠成一卦，合六十四卦。这样，六十四卦系统中的每一卦都由二个单卦或六爻组成。二个单卦在下者为内卦、为体，在上者为外卦、为用。占卜时，以内卦（体

卦)为主,外卦(用卦)只能通过影响内卦(体卦)起辅助作用。六爻的次序是自下而上数,名为初爻、二爻……最上为第六爻,也叫做"爻位"。由于爻分阴阳,阴六阳九,为资区别,阴爻处在自下而上六个爻位上时,分别称为初六、六二、六三、六四、六五、上六;阳爻处在这六个爻位上则名为初九、九二、九三、九四、九五、上九。那么,所谓"九三应上九"是指第三、六爻都是阴爻的卦,如渐、蛊、旅、小畜等共十六卦属于这种情形。"九三应上六"是第三爻为阳,第六爻为阴的卦,如蹇、谦、升、小过等十六卦属于这种情形。"六三应上六"、"六三应上九",分别是第三、六爻皆阴及三爻阴、六爻阳的情形,也各有十六卦。

气象六字评语也分阴阳两类,清净、微温、阳风等都属阳,阴雨、白浊、微寒等都属阴。清净是天空晴明无云翳的意思;微温是对后文的"决温"而言,前者是温度渐升,后者则是骤然升高;阳风是晴天的风;阴雨指冷雨;白浊指寒气,如雾、霾之类;微寒同样是对决寒而言,前者指温度逐渐降低,后者指骤然变寒。此外,麹尘即麹扬尘,是天气干燥的意思。绛赤为暑气,也属阳。表气象的名词共十项,阳六阴四,阳多于阴。

卦与六字评语之间的内在联系是什么?《律历志》对阳风、阴雨已有解释:"诸卦上有阳爻者阳风,上有阴爻者阴雨。"意思是说,六十四卦中的任何一卦,它的"气象六字评语"中的后(下)两字评语,都是由该卦第六爻(上爻)决定的,第六爻是阳爻,评语为"阳风",阴爻为"阴雨"。只有这两种情形。例如:"九三应上九"与"六三应上六",第六爻都是阳爻,它们的六字评语中后两字都是"阳风";"九三应上六"、"六三应上六"的第六爻都是阴爻,后两字评语也就都是"阴雨"二字。

六字评语中的中间两字由体、用二卦的结合来判定。体卦(第三爻)为阳为"温",为阴为"寒",寒、温前一字则由用卦(第六爻)决定,用与体合(同阳、同阴)为"微"字(同阴为"微寒",同阳为"微温"),用与体异则为"决"字(三阳六阴为"决温",三阴六阳为"决寒"),只有这四种搭配。例如,"九三应上九":体为阳,用"温"字,用卦也是阳,则为"微温"。再如"九三应上六":体为阳,用"温"字,用卦为阴,与体卦异,则为"决温"。同样可以判定:"六三应上六"为"微寒","六三应上九"为"决寒"。

六字评语中的上两字是由中两字决定的,即上两字与中两字有固

表 9.5　六十四卦用事及职官气象表

	十一月						十二月				
卦名	未济	蹇	颐	坎	中孚	复	屯	谦	睽	升	临
卦象											
用事日	▽	▽	*	☆	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽
职官	诸侯	大夫	九卿	方伯	三公	天子	诸侯	大夫	九卿	三公	天子
气象	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨

	正　月					二　月					
封名	小过	蒙	益	渐	泰	需	随	晋	震	解	大壮
卦象											
用事日	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	*	☆	▽	▽
职官	诸侯	大夫	九卿	三公	天子	诸侯	大夫	九卿	方伯	三公	天子
气象	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨

	三　月					四　月					
封名	讼①	豫	蛊	革	夬	旅	师	比	小畜	乾	
卦象											
用事日	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	
职官	诸侯	大夫	九卿	三公	天子	诸侯	大夫	九卿	三公	天子	
气象	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风	

① 与兴和历、大衍历等对照，讼卦在豫卦之后，此在前，正之。

续表

	五月						六月				
卦名	大有	家人	井	离	咸	姤①	鼎	丰	涣	履	遯
卦象	䷍	䷤	䷯	䷝	䷞	䷫	䷱	䷶	䷺	䷉	䷠
用事日	▽	▽	*	☆	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽
职官	诸侯	大夫	九卿	方伯	三公	天子	诸侯	大夫	九卿	三公	天子
气象	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风

	七月					八月					
封名	恒	节	同人	损	否	巽	萃	大畜	兑	贲	观
卦象	䷟	䷻	䷌	䷨	䷋	䷸	䷬	䷙	䷹	䷕	䷓
用事日	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	*	☆	▽	▽
职官	诸侯	大夫	九卿	三公	天子	诸侯	大夫	九卿	方伯	三公	天子
气象	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	九三应 上九 清净 微温 阳风	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风

	九月					十月					
封名	归妹	无妄	明夷	困	剥	艮	既济	噬嗑	大过	坤	
卦象	䷵	䷘	䷣	䷮	䷖	䷳	䷾	䷔	䷛	䷁	
用事日	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	▽	
职官	诸侯	大夫	九卿	三公	天子	诸侯	大夫	九卿	三公	天子	
气象	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上九 清净 微温 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上九 麹尘 决寒 阳风	九三应 上六 绛赤 决温 阴雨	六三应 上六 白浊 微寒 阴雨	

☆：$\dfrac{5530\dfrac{9\frac{1}{5}}{24}}{6060}$日　　*：$5\dfrac{1059\dfrac{5\frac{3}{5}}{24}}{6060}$日　　▽：$6\dfrac{529\dfrac{14\frac{4}{5}}{24}}{6060}$日

① 《律历志》误为“始”（见《魏书·律历志》中华书局1978年版，第2679页），今改。

定的搭配关系。如白浊配微寒，清净配微温，麹尘配决寒，绛赤配决温。这四种搭配必居其一。

《易经》六爻重三、五，以第三爻代表内卦是可以理解的。外卦不用第五爻用第六爻，大约是利用它的变化属性，在《易经》看来，第六爻位高而危，最不稳定。所以，若把外卦作变卦使用，最有代表性的是第六爻。若自不变的角度考虑，第五爻比第六爻具有更大的代表性。但是，前面说过：内卦为体，外卦为用。体卦的属性是固定不变，用卦的属性则为变动不居，利用外卦就是利用它的这种特性，这应是用第六爻的基本原因。

这种用一爻代全卦的方法与后世——比如宋代邵雍的“梅花占”已完全不同了。

(10)推七十二候术。基本思路是分一周天为二十四气，每气三候，共七十二候。每候日数为：

$$365\frac{1477}{6060}\div 72=5\frac{441\frac{8\frac{1}{3}}{24}}{6060}\text{日}$$

七十二候自冬至始(冬至第一候候名“虎始交”)，冬至大小余每加此数得下候大、小余，自纪首日名起算，大余算外为该候始日名。

$$(\text{冬至大余}+5)\frac{\text{冬至小余}+441\frac{8\frac{1}{3}}{24}}{6060}=\text{次候大余}\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9.71)$$

(11)节候表。二十四节气与七十二候之间的对应关系从表[①]中一览可知〔计算法见于本节6(10)，表略〕。

(12)推上朔法。即推算上朔日的日名。公式是：

$$〔(\text{入纪年}-1)+8〕\times 6-n\cdot 60=\text{大余} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9.72)$$

正光历的“入纪年”是把所求年包括在内的，“入纪年－1”就是去掉所求年，只计算所求年以前的积年。减 $n\cdot 60$，与以前一样，是把其中满甲子周(60)的部分去掉。问题是〔(入纪年－1)＋8〕×6 的含义是什么？

---

① 见《魏书·律历志》，中华书局1987年版，第2579～2681页。

由于要从中减去甲子周，它首先是一种“积日”。入纪年乘6得积日。表明从每年除去若干甲子周后余6日，是以每年为366日，加$6\times 8=48$日，表示上朔在冬至后第48日，以冬至为十一月中气，48日后为正月初三，因此上朔是理想的全年第一朔正月朔后第三日。仅见于李业兴正光历和兴和历，为他历所无。查“上朔”之名始见于《宋书·符瑞志》，以凤凰昼鸣的日子为上朔，大约是北朝流行的一个吉祥日。

三、五星推法

1. 推五星六通诸参数

(1)上元积年。

上元壬子到鲁隐公元年(前722年)己未，积166507年(不包括鲁隐公元年)。

上元壬子到北魏孝明帝熙平二年(517年)丁酉，积167745年(不包括熙平二年)。

(2)五星周期。即五星每合所行分数(每年为周天分)。

木星(岁星)2416660；

火星(荧惑)4725848；

土星(镇星)2291021；

金星(太白)3538131；

水星(辰星)702182。

把五星周期分别除以周天分，就得到了每合岁数。例如木星每合岁数：

$$\frac{\text{木星周期}}{\text{周天分}}=\frac{2416660}{2213377}=1\frac{203283}{2213377}\text{岁} \quad\cdots\cdots (9.73)$$

除日度法得木星每合日数：

$$\frac{\text{木星周期}}{\text{日度法}}=\frac{2416660}{6060}=398\frac{4780}{6060}\text{日} \quad\cdots\cdots (9.74)$$

其余四星与此同。

2. 用五星参数进行的计算

(1)推冬至及冬至加时。

$$\frac{(\text{上元以来年数}-1)\times\text{周天}}{\text{蔀法}}=\text{冬至积日}\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}} \cdots\cdots \quad (9.75)$$

$$\text{冬至积日}-n\cdot 60=\text{冬至大余} \cdots\cdots \quad (9.76)$$

(9.76)式中 n 为自然数或 0，且使 0≤冬至大余<60。

在(9.76)式中“(上元以来年数－1)×周天”叫做“六通之实”。“上元以来年数”(包括所求年在内)的确定，大约与五星周期的公倍数有关，是由五星周期通分得到，乘以周天分后，又得日行分的公倍数，所以称六通实。

(9.76)式所得大余自甲子日起算，算外为所求年冬至日名。

(9.75)式中的$\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}}$是不足 1 日的部分，由此求冬至加时，方法是分 1 日分(等于蔀法:6060)为 12 等分，每等分(等于章岁:505)为一个时辰分数，除小余为冬至前的时辰数，算外为冬至所加时辰：

$$\frac{\text{小余}}{\text{章岁}}=\text{辰序}\frac{\text{余}}{\text{章岁}} \cdots\cdots \quad (9.77)$$

(2)前文说过，$\frac{\text{五星周期}}{\text{周天分}}$＝每合岁数，“五星周期”又称“五星数”。

(上元以来年数－1)÷每合岁数＝积合数

把每合岁数的表达式代入，把“积合数”中的整数与畸零数分开表示，得：

$$\frac{(\text{上元以来年数}-1)\times\text{周天}}{\text{五星数}}=\frac{\text{六通实}}{\text{五星数}}=\frac{\text{合余}}{\text{五星数}} \cdots\cdots \quad (9.78)$$

其中$\frac{\text{合余}}{\text{五星数}}$是不足 1 合的畸零数，可以这样理解：把每合分为“五星数”分，畸零数只有“合余分”。那么，“五星数－合余”等于积够 1 合还差多少分，即星距下合所差分数，《律志历》称为入岁度分：

$$\text{五星数}-\text{合余}=\text{入岁度分} \cdots\cdots \quad (9.79)$$

除以日度法(6060)，化为度：

$$\frac{\text{五星数}-\text{合余}}{\text{日度法}}=\frac{\text{入岁度分}}{\text{日度法}}=\text{晨夕合度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \cdots\cdots \quad (9.80)$$

“晨夕合度”就是所求年天正十一月冬至后星合(晨合或夕合)所在度(日)数。

金、水二星每合分为晨见和夕见，先晨见后夕见，晨(夕)见伏一次

也称为合(晨合或夕合)。而(9.80)式求出的“合”是自晨见到晨见,或自夕见到下次夕见之“合”,每合等于晨、夕合各一度。因此,由(9.80)式所得晨夕合度求晨合或夕合的方法是:

$$0<\text{晨夕合度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}<(\text{晨合或夕合})\text{每合日数及日余,为晨合。}$$

$$0>\text{晨夕合度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}>(\text{晨合或夕合})\text{每合日数及日余,为夕合。}$$

《律历志》的表示法是:

$$\text{晨夕合度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}-(\text{晨或夕合})\text{每合日数}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}\begin{cases}<0 & \text{晨见}\\ >0 & \text{夕见}\end{cases} \qquad (9.81)$$

“<0”,(9.81)式左端相减“无所得”(指不能得到正数);“>0”,左端相减有得数,《律历志》称为“得一”。所谓“得一”,就是能得到一个正数的意思,并非得数为1。

《律历志》又说:“若度余不足减,减合度算一,加日度法乃减之。”就是从整度中取出1度,化为日度法分,增入度余,尔后再减。

由(9.80)式所得“晨夕合度”求入宿度仍为旧法,“命起牛前十二度,宿次除之,不满宿者,算外”,为所求年天正十一月后晨夕合所入度及余。

(3)求星合月及日。即推算冬至后的星合发生在某月、某日。如图9.7,C为冬至点,BC为冬至小余,A为冬至所在月的朔日夜半,E为冬至后的第一次星合,DE为星合度余,CD为星合度。如今要算出AE等于多少日,从中减去冬至后逐月的日数(大月减30日,小月减29日),待到所余日数不足某月的日数,不能再减时,所余日数就是星合入于某月的日数。从图可知:

图9.7 冬至后合月日

$$AE=AB+CD+BC+DE$$

AB是冬至到朔日数,包括冬至日在内;CD是自冬至到星合日之

间的日数，也包括冬至日。冬至日计入两次，应从中除去1次，比如从 AB 中除去1日，上式变成：

$AE=(AB-1)+CD+BC+DE$。含义是：

$$十一月朔到冬至后星合日数=(冬至到十一月朔日数-1)+合度算+\frac{冬至小余}{蔀法}+\frac{合度余}{日度法} \quad (9.82)$$

其中的合度算就是前(9.80)式中的“晨夕合度”，合度余是(9.80)式中晨夕合度的“度余”。蔀法和日度法是一回事，都等于6060。(9.82)式就是《律历志》所给公式。

由“十一月朔到冬至后星合日数”求星合月日的方法已如前述，只要“从中减去冬至后逐月的日数”等即得。《律历志》叙述为：“命起天正十一月，如历月大小除之。不满月者，算外，星合月及日。有闰计之。”末尾四字是说，中间若有闰月，同样要减去闰月日数。

《律历志》此段算法首句“置冬至朔日数减一”不可解，宜在“冬至”后增“去”字。

(4)求后合月及日。本节2(3)所推是冬至后第一次星合所在月及日，这里是推第二次星合所在月及日。算法是求出第一次星合所在月朔到第二次星合之间的日数。再如第一次星合那样，从中逐月除去第一次星合所在月以后每个月的日数，也是逢大月除去30天，逢小月除去29天，到不能再除时，为所入月日数。

第一次星合所在月朔到第二次星合之间日数(设为 M)。等于第一次星合入于该月日数(设为 N)加上每合日数及余，《律历志》称为合终日数及余。合终日数的求法已见三节1(2)。

$$M=N+合终日数及余 \quad (9.83)$$

N 是本节2(3)中的计算结果，包括日和日余两部分，日余与合终日余相加，满日度法为1日。从前合所在月起，在 M 中逐月除去各月日数，至某月不足除，星合入该月。此时 M 所余日算外为入于该月日数。

对金、水二星，合终日数包括晨合、夕合各一次，因此，(9.83)式中把“合终日数及余”换作“晨合日数及余”，所得 M 是从星合一终所在月到夕合之间的日数，从中减去逐月日数，得到的夕合入月日。同样，再加夕合日数及余，得到的是晨合入月日。即：

$$M_1 = N + \text{晨合日及余} \quad \cdots\cdots (9.84)$$

$$M_2 = N + \text{晨合日及余} + \text{夕合日及余} \quad \cdots\cdots (9.85)$$

从 M_1 中减去逐月日数，得夕合入月日；从 M_2 中减去逐月日数，得晨合入月日。《律历志》叙述为“加晨得夕，加夕得晨”。

(5)求后合度。由本节 2(2)(9.80)式中求得的冬至后星合度及余，加上星每合度及余，得后合度及余。此是由冬至第一合求第二合所在度。可以推广开来，由任何前一合度及余求后合度及余，都可以在前合度及余之上加星每合度及余得到。星每合行度及余《律历志》中称为行星度及余〔其算法见本节 3(1)〕。

$$\begin{aligned} \text{后合度} &= \text{前合度算及余} + \text{行星度及余} \\ &= (\text{前合度} + \text{行星度})\frac{\text{前合度余} + \text{行星度余}}{\text{日度法}} \quad \cdots\cdots (9.86) \end{aligned}$$

“前合度余＋行星度余”满日度法化为 1 日，增入“前合度＋行星度”中(《律历志》“余满日度从度”)。由“前合度＋行星度”求入宿度的方法，《律历志》是从前合入宿度的基础上算起(所谓“命起前合度”)，从行星度及余中依次减去各宿度数如前法。还特别提到“径(经)斗去其分 1477”。斗分 1477 在 28 宿中的斗宿之后，减各宿度数至斗宿时，不可忘记，除减去斗宿的整度之外，另需减去斗分数。

3. 五星步法

每星步法都分两步叙述：一是介绍参数，二是介绍星一终期间的行步。下面把各星参数集中起来解释清楚，而每星行步因与以前诸历无大差异，不再解释了。

(1)参数。每星参数都有三种：合终日数及日余，行星度及度余，周虚(见表 9.6)。其中合终日数就是星每合所历日数，等于五星数(五星周期)除以日度法，已如前述。

表 9.6　五星行步参数

	合终日数	合终日余	行星度	行星度余	周虚
木星	398	4780	33°	3303	1280
火星	779	5108	49°	2154	952
土星	378	341	12°	4924	5719
金星	583	5151	291°	5605.5	909
水星	115	5282	57°	5671	778

其余各参数求法，先求合终日数、日余及周虚：

$$\frac{\text{五星数}}{\text{日度法}}=\text{合终日数}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}} \qquad (9.87)$$

$$\text{日度法}-\text{日余}=\text{周虚} \qquad (9.88)$$

对木星：$\frac{2416660}{6060}=398\frac{4780}{6060}$，其中 398 为合终日数，4780 为合终日余，6060－4780＝1280 为周虚。

对火星：$\frac{4725848}{6060}=779\frac{5108}{6060}$，其中 779 为合终日数，5108 为合终日余，6060－5108＝952 为周虚。

对土星：$\frac{2291021}{6060}=378\frac{341}{6060}$，其中 378 为合终日数，341 为合终日余，6060－341＝5719 为周虚。

对金星：$\frac{3538131}{6060}=583\frac{5156}{6060}$，其中 583 为合终日数，5151 为合终日余，6060－5151＝909 为周虚。

对水星：$\frac{702182}{6060}=115\frac{5282}{6060}$，其中 115 为合终日数，5282 为合终日余，6060－5282＝778，为周虚。

再求星行度及余。由于星一终是日、星再合，其间始、末时日星同度，若合终日数大于回归年日数，是日行速，星行迟。日行度等于合终日数及余，星行等于日行超过周天的部分，即：

$$\begin{aligned}\text{星行度及余}&=\text{合终日数及余}-\text{回归年日数及斗分}\cdot n\\&=(\text{合经日数}-n\cdot\text{归年日数})\frac{\text{合终日余}-n\cdot\text{斗分}}{\text{日度分}}\end{aligned} \qquad (9.89)$$

$n=1$ 或 2，取决于使 0≤行星度及余<回归年日数及斗分。

金、水二星的一终行度与日行度相等，即合终日数和日余等于星一终行度，但表 9.6 中所列金、水星行度等于晨合或夕合行度，等于星一终行度的二分之一，即：

$$金、水星行度及余=\frac{1}{2}=合终日数及余 \cdots\cdots (9.90)$$

对金星：行星度及余$=\frac{1}{2}\times 583\frac{5151}{6060}=291\frac{5605.5}{6060}$，其中 291 为行星度，5605.5 为行星度余。

对水星：行星度及余$=\frac{1}{2}\times 115\frac{5282}{6060}=57\frac{5671}{6060}$，其中 57 为行星度，5671 为行星度余。

(2)五星行步略。

由以上可见，正光历比祖冲之大明历晚出 60～70 年。大明历中的岁差术不但没有被发扬光大，反而被废止了，这是正光历的极大失误。它的贡献在于计算五星时，废除了日率、周率或岁数、合数等参数，将五星与日行通分，创立“六通实”的新概念，使五星参数有了统一的分母（日度法），使运算简单化了。

第十章　由正光历修补成的兴和历

按《魏书·律历志》记载，到东魏孝静帝(534～550年)时，正光历的计算结果与天象的差距已十分明显，齐献武王入邺后，命李业兴改正，时为兴和元年(539年)十月。搞成之后，献历表中有“运属兴和”的话，兴和纪年，统共不过四年，兴和历的编次是很仓促的。根据李业兴答信都芳的问难，新历不过是据以往观测，修改个别参数值，使历天不符的现象有所纠正，推历方法毫无创新。

一、主要参数

1. 上元以来积年

(1)上元甲子——春秋鲁隐公元年(前722年)己未，积292736年(包括鲁隐公元年在内)。

某甲子岁入甲戌纪124136岁(包括甲子岁)。

(2)上元甲子——东魏兴和二年(540年)庚申，积293997年(包括兴和二年)。

某甲子岁入甲戌纪，更沿续到兴和二年庚申，积125397年(包括兴和二年)。

2. 主要参数

(1)1元为1011600年，即元法＝1011600。1元＝3统，统法＝337200。1统＝2纪，纪法＝168600。1纪＝10蔀，蔀法＝16860。1蔀＝30章，章岁＝562。

(2)每562年有207闰，因而每年有$12\frac{207}{562}$个月。由此算得，每章(562年)6951个月，即章月＝6951。

(3)回归年为 $365\ \frac{4117}{16860}$ 日 $= \frac{6158017}{16860}$ 日，其中 4117 为斗分，6158017 为周天，16860 为度法(蔀法)。

除 6 甲子(360 日)后，余 $5\ \frac{4117}{16860} = \frac{88417}{16860}$ 日，为一个回归年的没数，其中 88417 为余数。

以没数除回归年日数得：$365\ \frac{4117}{16860} \div 5\ \frac{4117}{16860} = \frac{6158017}{88417}$ 日/没 $= 69\ \frac{57244}{88417}$ 日/没。其中 6158017 为没分(周天)，88417 为没法(余数)。

(4)1 个朔望月(又名经月)为 $29\ \frac{110647}{208530}$ 日 $= \frac{6158017}{208530}$ 日。其中 6158017 为通数(周天)，208530 为日法，110647 为经月余。日法－经月余＝208530－110647＝97883 为度分。

前面说每年有 $12\ \frac{207}{562}$ 个月，其中 12 个月有中气，12 名为岁中，是 1 岁中气数。那么 1 章(562 年)的中气数 6744 名为章中。

每年十二中气之外，还有十二节气，合为二十四节气。每个节气的日分数为 $365\ \frac{4117}{16860} \div 24 = 15\ \frac{3684\ \frac{1}{24}}{16860}$ 日。其中 $\frac{1}{24}$ 中的分子 1 为小分，分母 24 为小分法。

(5)每日(度)分为度法(16860)分，又划分为十二时辰，每个时辰得：$\frac{度法}{12} = \frac{16860}{12} = 1405$ 分，1405 名为气时法。

(6)交会周期取月出入黄道 1 次所历日分数，名为会通，会通＝36142807，除以日法得：$\frac{36142807}{208530} = 173\ \frac{67117}{208530}$ 日。其中 173 为会数，67117 为会余。日法－会余＝208530－67117＝141413 分，名为会虚。

传统的交会周期是 $5\ \frac{20}{23}$ 月，化为日：

$$5\ \frac{20}{23} \times 29\ \frac{110647}{208530} = \frac{831332295}{4796190} = 173\ \frac{1591425}{4796190} = 173\ \frac{69192.4}{208530}\text{日}$$

与前面算得的173 $\frac{67117}{208530}$日相比，每交减小了2075.4分，约相当于百分之一日。

(7)近点月取为27 $\frac{115631}{208530}=\frac{5745941}{208530}$日。其中27为周日，115630为周余，5745941为通周。日法－周余＝208530－115631＝92899，92899为周虚。

(8)前面说，每年有12 $\frac{207}{562}$个月，即日、月交12 $\frac{207}{562}$次，每交月行天1周，其间日自行天1周，月实行天13 $\frac{207}{562}$周，日月的速度比是1：13 $\frac{207}{562}$。已知日每天行1度。由此得月每日行天13 $\frac{207}{562}$度＝$\frac{7513}{562}$度，7513为小周。是1章岁562年中月亮行天的周数。那么一蔀(30章)的行天周数：7513×30＝225390周，名为月周。

(9)朔望间日数定为朔望合数：即$\frac{1}{2}$×朔望月＝$\frac{1}{2}$×29 $\frac{110647}{208530}$＝14 $\frac{159588.5}{208530}$日。只称其中的14为朔望合数，而把159588.5叫做度余。

以月出入黄道一次的日数减朔望合数为入交限，即173 $\frac{67117}{208530}$－14 $\frac{159588.5}{208530}$＝158 $\frac{116058.5}{208530}$日。其中158名为入交限数，116058.5名为度余。

二、计算日月运行产生的历日名数法

1. 推月朔弦望术

(1)推积月术。

$$\frac{(\text{入纪年}-1)\times\text{章月}}{\text{章岁}}=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}} \cdots\cdots \quad (10.1)$$

因每岁有$\frac{207}{562}$月的闰月，只要(10.1)式中的闰余在562－207＝355分

以上，加上本年闰分 207 就积满 562 分，可置 1 闰。所以，当闰余≥355 时，所求年有闰月，否则无闰。

每年有 207 分的闰分，均入 12 月，每月有 $\frac{207}{12}=17.25\approx17$ 分，当闰余在 562－17＝545 分时，所求年的第一个月（天正十一月）就可能是闰月，闰或不闰，由该月中气冬至的位置判定之。冬至在该月，该月不闰；落入下月朔（或二日）该月是闰月。《律历志》划的范围更宽些，以每年 562 分，每月约为 47 分，562－47＝515 分。认为只要闰余在 515 分以上，十一月就可能有闰。有闰还是无闰，最后由冬至位置判定。

这样做缺点很明显，每年闰分是 207 分，不是 562 分。但是也有合理性，因为由闰分 207 判定的闰月位置，由于月有大小，会有前后 1 个月的出入，最终须由该月中气位置判定。比如按理论计算，每月约为 29.5 日（一个朔望月的长度），过了这 29.5 日之后的中气所在，即下月朔有中气，下下月应该置闰。但是由于月有大小，上月可能安排为大月，共有 30 天。这样，中气落到了上月晦日（末日）。而下月又是小月，本来有 29.5 日，只安排 29 日就转为下下月，下一个中气也落到了下月后。下月本不该有闰，却不得不置为闰月了。即闰月从下下月提前一月。拖后 1 月的情形与此相类。

本来某年的第一个月（天正十一月）有闰，由于大小月的设置，中气位置有提前或拖后的可能，使闰月也有提前或拖后 1 月的可能，即会有 1 倍的误差。那么，计算时本应利用闰分 207，却采用了章法 562，误差也大约增加了 1 倍，与初始误差相当。即是说，用章法 562 代替闰分 207 并没使计算误差增大。

显然，这种情形只适用于推算第一个月是否置闰，推以后诸月应该用闰分 207。

（2）推积日术。本节 1（1）中已算出纪积月，由积月求积日应是：

$$\text{积月}\times\text{每月日数}=\frac{\text{积月}\times\text{通数}}{\text{日法}}=\text{积日}\frac{\text{小余}}{\text{日法}} \quad\cdots\cdots\quad (10.2)$$

$$\text{积日}-n\cdot 60=\text{大余} \quad\cdots\cdots\quad (10.3)$$

n 为自然数或 0，且使 0≤大余＜60。

从纪首日名起算，大余算外就是所求年天正十一月朔。

(3)求次月朔术。在已知的头月朔大、小余〔比如本节1(2)算得的十一月朔大、小余〕上，增加1个朔望月日数($29\frac{110647}{208532}$)即得：

$$(\text{头月大余}+29)\frac{\text{头月小余}+110647}{208530}=\text{次月朔大余}\frac{\text{小余}}{208530} \cdots\cdots (10.4)$$

照例小余满日法208530化整日入大余，大余满60除去之，从纪首日名起算，大余算外为次月朔日名。

此外，小余满虚分97883，与本月小余110647相加等于日法，大余增1。所以，本月为大月。若小于虚分，为小月。

(4)求上、下、弦、望术。$\frac{1}{4}$朔策$=7\frac{79794\frac{1}{4}}{208530}$日，朔日大、小余加此数得上弦，再加得望，三加得下弦，四加得下月朔。即：

$$(\text{朔大余}+7)\frac{\text{朔小余}+79794\frac{1}{4}}{208530}=\text{上弦大余}\frac{\text{上弦小余}}{208530} \cdots\cdots\cdots\cdots (10.5)$$

$$(\text{上弦大余}+7)\frac{\text{上弦小余}+79794\frac{1}{4}}{208530}=\text{望日大余}\frac{\text{望日小余}}{208530} \cdots\cdots (10.6)$$

$$(\text{望日大余}+7)\frac{\text{望日小余}+79794\frac{1}{4}}{208530}=\text{下弦大余}\frac{\text{下弦小余}}{208530} \cdots\cdots (10.7)$$

$$(\text{下弦大余}+7)\frac{\text{下弦小余}+79794\frac{1}{4}}{208530}=\text{下月朔大余}\frac{\text{下月朔小余}}{208530} \cdots\cdots (10.8)$$

以上四式之中都是小余满日法208530则入大余，大余满60除去之，自纪首日名起算，大余算外为所求日。

2. 推二十四气、闰术

(1)推二十四气术。先推冬至：

$$\frac{(\text{入纪年}-1)\times\text{余数}}{\text{蔀法}}=\text{积没}\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}} \cdots\cdots (10.9)$$

$$\text{积没}-n\cdot 60=\text{冬至大余} \cdots\cdots (10.10)$$

n为自然数或0，且使所得$0\leqslant\text{冬至大余}<60$。自纪首日名起算，大余算外为冬至日名。

(2)求次气术。由于每气日数为：$365\frac{4117}{16860}\div24=15\frac{3684\frac{1}{24}}{16860}$日。所以，在头气大、小余之上加此数得次气。即：

$$(\text{头气大余}+15)\frac{\text{头气小余}+3684\frac{1}{24}}{16860}=\text{次气大余}\frac{\text{次气小余}}{16860}\quad\cdots\ (10.11)$$

(10.11)式中"$\frac{1}{24}$"的分子1为小分，分母24为小分法。与"头气小余"相加后，小分满小分法24入小余，小余满日法16860入大余，大余满60除去之。自纪首日名起算，大余算外为次气日名。

由本节2(1)中算得的冬至大、小余，代入(10.11)式可依次求出二十四气每气日名。

(3)推闰术。由本节1(1)，积月余分是"闰余"分，差"章岁－闰余"分不足1月，而每月闰分为$\frac{\text{章闰}}{12}$，那么：

$$(\text{章岁}-\text{闰余})/\frac{\text{章闰}}{12}=\frac{(\text{章岁}-\text{闰余})\times12}{\text{章闰}}=\text{闰月序数}\frac{\text{月余}}{\text{章闰}}\quad\cdots\ (10.12)$$

《律历志》说"月余半法以上亦得一月"，就是(10.12)式中$\frac{\text{月余}}{\text{章闰}}\geqslant0.5$，也算作1月，入"闰月序数"。"闰月序数"算外为闰月。例如，闰月序数为5，算外是指第6个月为闰月。自天正十一月起算，第五个月是三月，第六个月是四月，作闰月，称为闰三月。

《律历志》又说："闰月有进退，以无中气定之。"意思是按(10.12)式算出的闰月还不一定是真闰月，有可能进退一月，需要检查该月有无中气，无中气才是真闰月。理由前面已详细论述过。

(4)推闰又法。《律历志》公式是：

$$\frac{\text{岁中}\times\text{闰余}+n\cdot\text{章闰}}{\text{章中}}=1(\text{或略大于}1)\quad\cdots\cdots\cdots\ (10.13)$$

n为所求闰月序数，自冬至所在月起，算外为闰月所在月。这种算法与三统历的推闰方法相同。

《律历志》记述(10.13)式说："以岁中乘闰余，如章闰得一，盈章中六千七百四十四。数起冬至，算外，中气终闰月也。"其中"如章闰得一"

句,"校勘记"说:"诸本'如'讹'加',今依文义改正。"意思是说各种《魏书》的本子都是"加章闰得一",校勘者认为错了,改为"如章闰得一"。与(10.13)式对照看,"加章闰得一"没有错,这句话的意思是加1个章闰使分子能"满章中"得1,加2个章闰使分子满章中得2……加n个章闰使分子满章中则得n。总之,所得闰月序数与所加章闰的个数相等。若改为"如章闰得一",意思是"除章闰得一",前面一项"岁中乘闰余"除章闰得1是1,得2是2。显然,这是错误的。校勘者把正确改成错误了。

(5)逐月节气表。记每月节气和中气名称。无须解释,略。

3. 推合朔却去度及表里术

(1)推合朔却去交度术,就是计算按平均朔望月算得的合朔点距离日月交会点的度数。它是平均值与真值之间的误差。算法与正光历同〔参见第九章二节3(1)〕。

$$\frac{\text{入纪朔积分}+\text{所入纪交会差}-n\cdot\text{会通}}{\text{日法}}=\text{却去交度}\frac{\text{度会}}{\text{日地}}\ \cdots\cdots\ (10.14)$$

(10.14)式左端分子,《律历志》名为积交。得数为所求年天正十一月朔的却去交度。

(2)六纪交会差。

表 10.1 兴和历交会差表

纪名	甲子纪	甲戌纪	甲申纪	甲午纪	甲辰纪	甲寅纪
月位	交中[1]	日道表[2]	日道里	日道里	日道表	日道表
交会差		127°	81°	34°	162°	115°
度余		39339	11561	192313	23122	203874

交会差的计算法。先计算交会纪差,公式是:会通-(纪月×通数-n·会通)……………………………………………………… (10.15)

$=36142807-(2085300\times6158017-n\cdot36142807)$

$=36142807-(12841312850100-n\cdot36142807)$

命$n=355293$,代入上式得:

$=36142807-26522649$

---

① "交中"为纪首合朔时的月位,以后各纪同。

② "表"为"里"之误。

$=9620158$ 〔此为交会纪差分(1度=日法分〕

除以日法得：$\frac{9620158}{208530}=46\frac{27778}{208530}$度。

在表10.1中，甲子纪首合朔日，日月合璧，交会差度及余都是0，1纪之后至甲戌纪首，交会差度及余等于：$173\frac{67117}{208530}-46\frac{27778}{208530}=127\frac{39339}{208530}$。即交会差127°，度余39339分，月位在日道里。

再减纪差得甲申纪：

$$127\frac{39339}{208530}-46\frac{27778}{208530}=81\frac{11561}{208530}\text{度}$$

三减得甲午纪：

$$81\frac{11561}{208530}-46\frac{27778}{208530}=34\frac{192313}{208530}\text{度}$$

自甲戌纪首至此时，一直没有过交会点，月位也不会变化，与甲戌纪首同，都是在日道里。《律历志》说，甲戌纪月在日道表，甲午纪在日道里，是没有道理的。

甲午纪所余已不是交会纪差，继续减时，需加上会数(173)及会余以后再减，表示已进入下一个交会周期，必是过了交会点，月位自然也发生了变化，原在日道里，甲辰纪首已在日道表。

$$34\frac{192313}{208530}+173\frac{67117}{208530}-46\frac{27778}{20853}=162\frac{23122}{208530}\text{度}$$

再减得甲寅纪：

$$162\frac{23122}{208530}-46\frac{27778}{208530}=115\frac{203874}{208530}\text{度}$$

月位与甲辰纪同，也在日道表。

继续减得甲子纪，交会差不是0，可知“元法”不是交会周期。

(3)求次月却去交度术。头月交会差及余加1个朔望月日度及余，若满会数及余则除去之，不满不除，所得就是次月却去交度及余。即：

$$\text{头月却去交度及余}+\text{朔望月日度及余}-n\cdot\text{会数及余}$$

$$=(\text{头月却去交度}+29)\frac{\text{头月去交度余}+\text{经月余}}{\text{日法}}-n\cdot\text{会数及余}$$

$$=\text{次月却去交度}\frac{\text{度余}}{\text{日法}}\cdots\cdots\quad(10.16)$$

其中 $n=0$ 或 1，且使 $0\leqslant$(10.16)式右端<会数及余。

由(10.14)、(10.16)两式或算出任何月朔的交会差。

(4)求望日却去交度术。因朔望之间日度余为 $14\frac{159588.5}{208530}$ 度，仿(10.16)式求法：

$$\text{朔日却去交度及余}+\text{朔望间日度余}-n\cdot\text{会数及余}$$

$$=(\text{朔日却去交度}+14)\frac{\text{朔日却去交余}+159588.5}{\text{日法}}-n\cdot\text{会数及余}$$

$$=\text{望日却去交度}\frac{\text{度余}}{\text{日法}}\cdots\cdots\quad(10.17)$$

$n=0$ 或 1，且使 $0\leqslant$(10.17)式右端<会数及余。

(5)推月在日道表里术。

$$\text{入纪朔积分}+\text{纪交会差分}-2n\cdot\text{会通}>\text{会通，}\cdots\cdots\quad(10.18)$$

纪首月位在表，则在里，纪首月位在里，则在表。

$$0<\text{入纪朔积分}+\text{纪交会差分}-2n\cdot\text{会通}<\text{会通}\cdots\cdots\quad(10.19)$$

纪首月位在表，则在表；纪首月位在里，则在里。

《律历志》对(10.18)式说"月在日道里"，对(10.19)式则说"月在日道表"。中间必有脱文，参见第九章二节3(7)。

(6)求次月表里术。参照(10.16)式，可表达如下：

$$(\text{头月却去交度}+29)\frac{\text{头月却去交度余}+\text{经月余}}{\text{日法}}>\text{会数及余}$$

$$\cdots\cdots\quad(10.20)$$

头月朔，月在日道表则在里；头月朔月在日道里则在表。

$$0<(\text{头月却去交度}+29)\frac{\text{头月却去交度余}+\text{经月余}}{\text{日法}}<\text{会数及余}$$

$$\cdots\cdots\quad(10.21)$$

头月朔，月在日道表则在表，头月朔月在日道里则在里。

(7)推交道所在日术。

$$(\text{会数}-\text{十一朔却去交度})\frac{\text{会余}-\text{十一月朔去交度余}+\text{十一月朔小余}}{\text{日法}}$$

$$=\text{十一月朔前去交度}\frac{\text{度余}}{\text{日法}}\cdots\cdots\quad(10.22)$$

“十一月朔前去交度”是指十一月朔日夜半到朔后第1个交会点之间的日数。从中依次减去十一月、十二月等月日数，直到不足减，余数就是入于该月日数。

(10.22)式中“度余”是不足1日分数，将1日分(日法)除以12，得每辰分，以度余除每辰分，得“朔前交会点所加辰”。即：

$$度余/\frac{日法}{12}=\frac{度余\times 12}{日法}=辰次\frac{辰余}{日法} \cdots\cdots (10.23)$$

辰次自子时起，算外为“交道所在辰”，即交点所加辰。

《律历志》又说，交点在望前，该月朔日交会，望日月蚀；交点在望后，该月望日月蚀，下月朔日交会。交点在望日，月蚀既(蚀尽)；在朔，日蚀既，前后月望皆月蚀。

(8)求后交月及日术。

$$前入月日及余+会数及余=(前入月日+会数)\frac{前入月日余+会余}{日法}$$

$$=后交日\frac{日余}{日法} \cdots\cdots (10.24)$$

从前入月起，依次从后交日中减去逐月日数，到某月不能再减时，余数为入于该月日数。

同样，日余乘12，除日法为辰次，自子时起算，辰次算外为后交所加时。

(9)推交会起角术。即推日月蚀初蚀方位。参见第九章二节3(8)。若月在外道，先会后交者，月初离交会点，自西北向东南行，东南角先入地影而蚀，对于先交后会者，月向交点，是自西南向东北行，从后追及日，先掩蔽日西南角，日蚀因自西南角始。

月在内道，情形正相反，先交后会者，月向交点而行，是自西北向东南先从西北角掩蔽日光而蚀；对于先会后交，月初离交点，自西南向东北行，东北角先入地影而蚀。

《律历志》说，月在内道时，若先会后交，亏从西北角起；先交后会则置而不论，参诸正光历也是先从西北角起。与前所说对照知，对于月在内道、先会后交的情形，《律历志》的记载是错误的，“西”北应是“东”北的误文。

又说“合交中者，蚀之既”。交会在黄道正中，为日（或）月蚀之既，道理比较清楚。“其月蚀在日之冲，起角亦如之。”是对前文的补充，如前文说月在外道，先会后交，亏从东南角起。是说月蚀“先会后交”中“先会”的情形，“后交”即日蚀的情形没有说明。这里补充说，“月蚀在日之冲，起角亦如之”，就是说，后交日蚀起角与月蚀起角正相“冲”，是自西北角起；先交后会，亏从西南角起”，是日蚀或“先交”的情形，月蚀（后会）亏起角在日蚀之冲，应是自东北始。月在内道情形可以此类推。

（10）推蚀分多少术。有两层原则：一是朔望去交度在两限之外才算交会。两限：前限等于朔合数 $14\frac{159588.5}{208530}$度，后限 $158\frac{116058.5}{208530}$度。二是入交限 15 度以上虽交会不蚀（因蚀浅不见蚀）。对于前者表达为：

$$(\text{朔望去交度及余})_1>158\frac{116058.5}{208530}\text{度} \quad\cdots\cdots (10.25)$$

或者

$$(\text{朔望去交度及余})_2<14\frac{159588.5}{208530}\text{度} \quad\cdots\cdots (10.26)$$

符合（10.26）式的“$(\text{去交度及余})_2$”，称为“不蚀度”；符合（10.25）式的“$(\text{去交度及余})_1$”与会数及余数差，也称为“不蚀度”。即：

$$173\frac{67117}{208530}-(\text{朔望去交度及余})_1=\text{不蚀度} \quad\cdots\cdots (10.27)$$

$$(\text{朔望去交度及余})_2=\text{不蚀度} \quad\cdots\cdots (10.28)$$

后者是说只有当“不蚀度”≤15 度时才算做蚀。将蚀分定为总 15 分，不蚀度每 1 度为蚀 1 分，蚀分越大，所蚀愈深。蚀分数的求法就是：

$$15-\text{不蚀度}=\text{蚀分} \quad\cdots\cdots (10.29)$$

当朔望去交度为 0 时，不蚀度为 0，蚀分最大为 15 分，称蚀既。可知，所谓“不蚀度”并非不蚀的度数，是月轮边沿距日心（或地影心）的度数，亦即是朔望去交度数，当此度数小于 15 度时，是要发生日（或月）蚀的。

4. 推合朔、月蚀入迟疾历盈缩术

（1）推合朔入迟疾历术：

$$\frac{\text{入纪朔积分}+\text{所入纪迟疾差分}-n\cdot\text{通周}}{\text{日法}}=\text{入迟疾历日}\frac{\text{日余}}{\text{日法}} \quad\cdots\cdots (10.30)$$

(10.30)式左端分子名为积周，其中 n 为自然数或 0，且使 0≤积周<通周。得数"入迟疾历日"自纪首日名起算，算外为所求年天正十一月朔入历日名。

(2)求次月入历日术。

$$\begin{aligned}次月入历日及余 &= 头月入历日及余+每月日数-周日及余\\ &= 头月入历日及余+29\frac{110647}{208530}-27\frac{115631}{208530}\\ &= 头月入历日及余+1\frac{203546}{208530}日\\ &= (头月入历日+1)\frac{头月入历日余+203546}{日法}\end{aligned} \quad \cdots\cdots (10.31)$$

次月入历日＝头月入历日＋1，次月入历日余＝头月入历日余＋203546。

当次月入历日余≥日法，化为整日入于"次月入历日"，"次月入历日及余"≥周日及余，则从中除去周日及余，剩余者为入历日。

《律历志》说"日蚀满日法从日"，从以上论述，"蚀"为"余"字误文。

(3)求望入历术。从朔至望 $14\frac{159588.5}{208530}$日，所以：

$$\begin{aligned}望日入历日及余 &= 朔日入历日及余+14\frac{159588.5}{208530}-n\cdot 周日及余\\ &= (朔日入历日+14)\frac{朔日入历日余+159588.5}{日法}\\ &\quad -n\cdot 周日及余\end{aligned} \quad \cdots\cdots (10.32)$$

其中 $n=0$ 或 1，且使 0≤(10.32)式右端<周日及余。

同样有：望日入历日＝朔日入历日＋14，望日入历日余＝朔日入历日余＋159588.5。望日入历日余≥日法，则化为整日入望日入历日。望日入历日自所入纪首日名起算，算外为望日入历日。

(4)月行迟疾表。

表 10.2　兴和历月行迟疾表

日序	月行迟疾度及分	损益率	盈缩并率	盈缩积分
一日	14°402′	益 757	盈初	
二日	14°334′	益 689	盈 757	盈积分 21011
三日	14°261′	益 616	盈 1446	盈积分 40135
四日	14°190′	益 345	盈 2062	盈积分 57232①
五日	14°111′	益 466	盈 2607	盈积分 72360
六日	13°523′②	益 315	盈 3073	盈积分 85294
七日	13°296′	益 89	盈 3388	盈积分 94037
八日	13°68′	损 139	盈 3477	盈积分 96507
九日	12°468′③	损 283	盈 3338	盈积分 92649
十日	12°379′	损 390	盈 3055	盈积分 84794
十一日	12°267′	损 502	盈 2665	盈积分 73969
十二日	12°151′	损 618	盈 2163	盈积分 60036
十三日	12°40′	损 729	盈 1545	盈积分 42883
十四日	11°515′	损 816	盈 816	盈积分 22649
十五日	12°38′	益 731	缩初	
十六日	12°123′	益 646	缩 731	缩积分 20290
十七日	12°211′	益 558	缩 1377	缩积分 38220
十八日	12°324′	益 445	缩 1935	缩积分 53700④
十九日	12°435′	益 334	缩 2380	缩积分 66059
二十日	12°555′	益 214	缩 2714	缩积分 75329
二十一日	13°128′	益 79	缩 2928	缩积分 81269
二十二日	13°270′	损 63	缩 3007	缩积分 83463⑤

①57232，误，57233 正确。盈缩并率 $2062\times\frac{\text{日法 }208530}{\text{小周 }7513}=57232.6\approx57233$。

②523′，误，522′正确。

③468′，误。486′正确。“校勘记”说：“诸本‘六十八分’讹‘八十六分’，今据校算已正。”其实 486 是正确的，“校勘记”错。以算法验正，平行速－实行速＝损率，即 $13\frac{207}{562}-12\frac{486}{562}=\frac{283}{562}$，即损率 283 分。若实行为 12°468′，损率≠283，十日盈缩并率也不等于 3055。后面一连串数据都须更改。

①53700，误，53708 正确。盈缩并率 $1935\times\frac{\text{日法 }208530}{\text{小周 }2513}=53707.6\approx53708$。

⑤83463，误，83462 正确。盈缩并率 $3007\times\frac{\text{日法 }208530}{7513}=83461.9\approx83462$。

续表

日序	月行迟疾度及分	损益率	盈缩并率	盈缩积分
二十三日	13°432′	损 225	缩 2944	缩积分 81713
二十四日	14°33′	损 388	缩 2719	缩积分 75468
二十五日	14°194′	损 549	缩 2331	缩积分 64699
二十六日	14°319′	损 674	缩 1783①	缩积分 49461
二十七日	14°346′	损 701	缩 1108	缩积分 30754
周日	14°379′	损 734	缩 407	缩积分 11297

表 10.2"月行迟疾度及分"栏所列数据,其实是月亮逐日行度分,单位制是 1 度=562 分。"损益率"栏中的数据是月实行与平行度分的差,是"益"还是"损",是对后面"盈缩并率"栏的数据而言,使其数据增加者为"益",减少者为"损",而不论其是盈是缩。"盈缩并率"栏中数据是"损益率"栏数据的累积值,实行分的累积值大于平行分的累积值为盈,平行分大于实行分的累积值为缩。"盈缩积分"栏中的数据是由"盈缩并率"栏中数据处理而得,处理方法是:乘日法(208530),除小周(7513)。这样做的原因主要是为了把盈缩并率数据的分母化为日法,以便在以后的计算中能与日余损益率的积直接相加〔参见本节 4(5)〕。

表中数据有六处错误,有些是印刷中校对粗疏所致,也有的是校勘者的过失把正确的的原文改错了。见表中注释。

(5)推合朔交会定大、小余术。定大、小余由本朔望大、小余加减由于入迟疾历日和日余产生的误差得到。此误差由二部分构成:一是与入历日对应的盈缩积分;一是与入历日余对应的损益率,得下式

$$\text{盈缩积分}\pm\frac{\text{入历日余}\times\text{所入历下损益率}}{\text{小周}}=\text{定积分} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10.33)$$

(10.33)式的意义可这样理解:先把损益率的分母变为日法,而后与日余相乘得日余所生误差。

损益率原分母是章法,化为日法可得如下比例式:

损益率:章法$=X_1$:日法

① 1783,误,1782 正确。二十五日缩 2331－损率 549=1782。

$$X_1=\frac{\text{损益率}\times\text{日法}}{\text{章法}}$$

X_1 是以日法为分母的损益率，是月行 1 日度分。化为日，需除以月速$\frac{\text{小周}}{\text{章法}}$，得：

$$X_2=\frac{X_1}{\text{小周}/\text{章法}}=\frac{\text{损益率}\times\text{日法}}{\text{小周}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10.34)$$

在入历日余期间所行为：

$$\frac{\text{入历日余}}{\text{日法}}\times\frac{\text{损益率}\times\text{日法}}{\text{小周}}=\frac{\text{入历日余}\times\text{损益率}}{\text{小周}}$$

入历日的积累误差是盈缩并率，分母也是章法。化为日法的方法与上同，得$\frac{\text{盈缩并率}\times\text{日法}}{\text{章法}}$。化为日：

$$\frac{\text{盈缩并率}\times\text{日法}}{\text{章法}\times\frac{\text{小周}}{\text{章法}}}=\frac{\text{盈缩并率}\times\text{日法}}{\text{小周}}=\text{盈缩积分}。\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10.35)$$

(10.34)、(10.35)式合并就得到(10.33)式。

以上变换中，分母化为日法是由于朔小余的分母是日法；化为日是为了把月速化为日速，以便与朔望大、小余相加减(与大、小余加减见后)，得到定大、小余数。

$$\text{本朔望大、小余}\mp\frac{\text{定积分}}{\text{日法}}=\text{本朔望大余}+\frac{\text{本朔望小余}\mp\text{定积分}}{\text{日法}}$$

$$=\text{朔望定大、小余(即合朔交会月蚀定大、小余)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10.36)$$

其中定积分为盈数，前用“－”号，缩数用“＋”号。若$\frac{\text{本朔望小余}+\text{定积分}}{\text{日法}}\geqslant 1$，交会加时在本朔望后 1 日；本朔望小余－定积分$<1$，需从本朔望大余中退 1 日，化为日法，入小余，而后再减，此时交会加时在本朔望前 1 日。

对于月蚀，由定大余算外为定日，定小余乘 12，除日法为月蚀加辰。

(6)推加时术。公式为

$$\frac{\text{定小余}\times\text{岁中}}{\text{日法}}=\text{辰序数}\frac{\text{辰余}}{\text{日法}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10.37)$$

从子时起算，辰序数算外为朔望加时。若辰余$\neq 0$，用 12 分法继续

划分，先分为4等分(辰余×4/日法)得少、半、太；不尽再分为3等分，得强、弱等。还有余分，四舍五入之。

《律历志》又说："日也冲为破，月常在破下蚀。"与正光历同。

5. 推合朔弦望度术

(1)推日度术。公式为：

$$\frac{\text{入纪以来朔积日}\times\text{日度法}-n\cdot\text{周天分}}{\text{日度法}}=\text{日度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}\quad\cdots\cdots\cdots(10.38)$$

其中n为自然数，且使左端分子大于或等于0，小于周天分，所得"日度"自牛前12°起，"宿次除之，不满宿者，算外"，即所求年天正十一朔夜半日所在度及分。

(2)推日度又法。

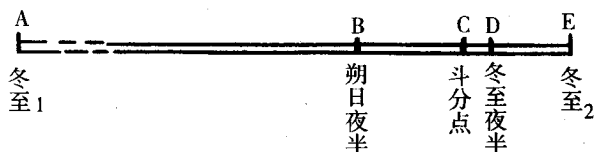



图 10.1 推日度又法

如图10.1，相邻两个冬至(冬至$_1$、冬至$_2$)之间的距离$AE=365\frac{4117}{16860}$度(与回归年日数同)，其中$AC=365$度，CE为斗分(4117分)。又D为冬至夜半点，DE为冬至小余，B为冬至所在月朔日夜半。因A是周天度起点，求朔日夜半日所在天度，就是求$AB=$？显然：

$$\begin{aligned}AB=AE-BE&=(AC+CE)-(BD+DE)\\&=(AC-BD)+(CE-DE)\quad\cdots\cdots\cdots(10.39)\end{aligned}$$

用文字式表述就是：

十一月朔夜半日度分=(周天度－冬至夜半去朔日数)+

(斗分－冬至小余)……………………………………(10.40)

一般说来，"冬至去朔日数"是指冬至所在日到朔的日数，等于冬至夜半到朔日数加1。"冬至夜半去朔日数=冬至去朔日数－1"。代入(10.40)式：

十一月朔夜半日度分＝〔周天度－(冬至去朔日数－1)〕＋(斗分－冬至小余) …………………………………………………… (10.41)

(10.41)式就是《律历志》所给“推日度又法”。其中“〔〕”内为整日(度)数,“()”内是分日(分母是日度法:16860)数。《律历志》说,当斗分<冬至小余,“()”内分数不足减时,应从“〔〕”内的整日(度)数中取出1日化为日度法分,加到斗分中去。而后再减冬至小余。由所得十一月朔夜半日度数(即“〔〕”内得数)求宿度方法与本节5(1)相同。

(3)求次月、次日日所在度术。

头月朔夜半日度分＋30度＝次月朔夜半日度分(大月)……… (10.42)

头月朔夜半日度分＋29度＝次月朔夜半日度分(小月)……… (10.43)

头日夜半日度分＋1度＝次日夜半日度分 …………………… (10.44)

(10.42)～(10.44)式与前(10.40)或(10.41)式结合使用,就能求出任意月或日夜半时的日所在度分。由日度分求宿度分与前同。

(4)推合朔日月共度术。本节5(1)～(3)所推都是夜半日度,此处所推为合朔时日度(即是月度)。应等于合朔积日及余减周天数。《律历志》是利用前面的计算结果,由朔日夜半日度分加上小余分得到所求数〔参见第九章二节5(4)〕。

$$合朔日月度分＝朔日夜半度分+\frac{朔小余\times章岁}{章月} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10.45)$$

其中朔小余乘章岁、除章月,只是为了把朔小余的分母由日法化为日度法,以便能直接与朔日夜半度分中的“分”相加。

(5)推次月合朔日月共度法(《律历志》误为“推合朔日月共度又法”)。由头月合朔日月共度分加上一个朔望月日数(即在1个朔望月中日行度数)即得。同样须将分数部分的单位制化同。朔望月日数29$\frac{110647}{208530}$,分母日法化为日度法16860的方法,与(10.45)中把朔小余的分母日法化为日度法的方法相同,只要把经月余分(110647)乘章岁、除章月即可:

$110647\times\frac{562}{6951}=8945\frac{6919}{6951}$。其中8945为大分,6919为小分。所以:

$$\text{次月合朔日月共度分}=(\text{头月合朔日月共度}+29)\frac{\text{头月合朔日月所在分}+8945\dfrac{6919}{\text{章月}}}{\text{日度法}} \quad\cdots\cdots (10.46)$$

由所得日月共度分求宿次，如《律历志》所说是“宿次除之，径斗去其分”。算外就是日月所在宿次度分。

(6)推月度术。

$$\frac{\text{人纪以来朔积日}\times\text{月周}-n\cdot\text{周天分}}{\text{日度法}}=\text{天正十一月朔夜半月度}\frac{\text{分}}{\text{日度法}} \quad\cdots\cdots (10.47)$$

其中 n 为自然数或 0，且使 $0<$(10.47)式左端分子$<$周天分。

(10.47)式的解释见第九章二节 5(6)。

(7)推月度又法。

$$\text{天正十一月合朔度分}-\frac{\text{朔小余}\times\text{小周}}{\text{章岁}\times\text{日法}}=\text{天正十一月合朔度分}-$$

$$\text{度}\frac{\text{大分}\dfrac{\text{小分}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}=\text{天正十一月朔夜半月度分}\quad\cdots\cdots (10.48)$$

(10.48)式的推导法见第九章二节 5(7)。

(8)求次月月度术。即求次月朔夜半月所在度分。头月朔距次月朔大月 30 日，小月 29 日，月行度分各为：

$$13\frac{207}{562}\times 30-\text{周天度}=401\frac{28}{562}-365\frac{4117}{16860}=35\frac{13583}{16860}\text{度}$$

$$13\frac{207}{562}\times 29-\text{周天度}=387\frac{383}{562}-365\frac{4117}{16860}=22\frac{7373}{16860}\text{度}$$

因此：

$$\text{次月朔月度分}=(\text{头月朔月度}+35)\frac{\text{头月朔月分}+13583}{\text{日度法}}(\text{大月}) \quad\cdots\cdots (10.49)$$

$$\text{次月朔月度分}=(\text{头月朔月度}+22)\frac{\text{头月朔月分}+7373}{\text{日度法}}(\text{小月}) \quad\cdots\cdots (10.50)$$

由月度分求宿度法同前。

(9)求次日月度术。月每日行 $13\frac{207}{562}$度，分母化为日度法等于 13

$\frac{6210}{16860}$度。因此：

$$次日月行度分=头日月行度分+13\frac{6210}{16860}=(头日月行度+13)\frac{头日月行分+6210}{16860} \cdots\cdots (10.51)$$

(10)求弦、望日所在度术。由于$\frac{1}{4}$×朔望月日数$=7\frac{79794\frac{1}{4}}{208530}=7\frac{6451\frac{3467\frac{2}{4}}{6951}}{16860}$（日或度）。其中7为整度，6451为大分，3467为小分，$\frac{2}{4}$中的分子2为微分。因此：

$$上弦日度分=(朔日度+7)\frac{朔日分+6451\frac{3467\frac{2}{4}}{6951}}{16860}度 \cdots\cdots (10.52)$$

$$望日度分=(上弦日度+7)\frac{上弦日分+6451\frac{3467\frac{2}{4}}{6951}}{16860}度 \cdots\cdots (10.53)$$

$$下弦日度分=(望日度+7)\frac{望日分+6451\frac{3467\frac{2}{4}}{6951}}{16860}度 \cdots\cdots (10.54)$$

$$后月朔日度分=(下弦日度+7)\frac{下弦日分+6451\frac{3467\frac{2}{4}}{6951}}{16860}度 \cdots\cdots (10.55)$$

(11)求弦、望月所在度术。一个朔望月中月行度分为：$13\frac{207}{562}\times 29\frac{110647}{208530}=394\frac{90800881}{562\times 30\times 6951}=394\frac{13062\frac{6919}{6951}}{16860}$度。乘$\frac{1}{4}$得$98\frac{11695\frac{5205\frac{1}{4}}{6951}}{16860}$度。其中98为整度，11695为大分，5205（《律历志》误为

"五二二五")为小分，$\frac{1}{4}$中的分子 1 为微分。因此有：

$$\text{上弦月度分}=(\text{朔月度}+98)\frac{\text{朔月分}+11695\dfrac{5205\frac{1}{4}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}\text{度} \quad \cdots\cdots (10.56)$$

$$\text{望时月度分}=(\text{上弦月度}+98)\frac{\text{上弦月分}+11695\dfrac{5205\frac{1}{4}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}\text{度}$$

$$\cdots\cdots (10.57)$$

$$\text{下弦月度分}=(\text{望时月度}+98)\frac{\text{望时月分}+11695\dfrac{5205\frac{1}{4}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}\text{度}$$

$$\cdots\cdots (10.58)$$

$$\text{后月朔月度分}=(\text{头月弦月度}+98)\frac{\text{头月下弦月分}+11695\dfrac{5205\frac{1}{4}}{\text{章月}}}{\text{日度法}}$$

$$\cdots\cdots (10.59)$$

(12)推弦、望月度分为正光历所无。二十八宿赤道度表(略)。

6. 推土王、灭没、卦候、上朔术

(1)推土王日术。回归年日数除以 5，得五行中每行所主日数：$365\frac{4117}{16860}\div 5=73\frac{823\frac{2}{5}}{16860}$日。每季日数为 $365\frac{4117}{1680}\div 4=91\frac{5244\frac{6}{24}}{16860}$日。五行中木、火、金、水，分自"四立"(立春、立夏、立秋、立冬)始，各主 $73\frac{823\frac{2}{5}}{16860}$日，余 $91\frac{5244\frac{6}{24}}{16860}-73\frac{823\frac{2}{5}}{16860}=18\frac{4420\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{16860}$日，为土所王，其中 18 为整日(或名大余)，4420 为小余，20 为小分(《律历志》误为"十八")，$\frac{2}{5}$的分子"2"为微分。每季末十八日余为土所王日，合四季所王亦得 73 日余。因此，由四立大、小余前推十八日余为每季土王所主。即：

$$(\text{立春大余}-18)\frac{\text{立春小余}-4420\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{\text{日度法}}=\text{冬季土王始日大、小余}$$

…………………………………………………………………… (10.60)

$$(\text{立夏大余}-18)\frac{\text{立夏小余}-4420\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{\text{日度法}}=\text{春季土王始日大、小余}$$

…………………………………………………………………… (10.61)

$$(\text{立秋大余}-18)\frac{\text{立秋小余}-4420\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{\text{日度法}}=\text{夏季土王始日大、小余}$$

…………………………………………………………………… (10.62)

$$(\text{立冬大余}-18)\frac{\text{立冬小余}-4420\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{\text{日度法}}=\text{秋季土王始日大、小余}$$

…………………………………………………………………… (10.63)

(2)推土王又法。由于冬至大、小余是已知的〔求法见本章二节 2(1)〕,求出土王始日距冬至日数亦得。

已知每气 $15\frac{3684\frac{1}{24}}{16860}$ 日〔见本章二节 2(2)〕,自冬至到立春共三气:$45\frac{11052\frac{3}{24}}{16860}$ 日。减土王 18 日余得冬至到土王始日的距离:$45\frac{11052\frac{3}{24}}{16860}-18\frac{4420\frac{20\frac{2}{5}}{24}}{16860}=27\frac{6631\frac{6\frac{2}{5}}{24}}{16860}$ 日。因此有:

$$(\text{冬至大余}+27)\frac{\text{冬至小余}+6631\frac{6\frac{3}{5}}{24}}{\text{日度法}}=\text{季冬土王始日大余}\frac{\text{小余}}{\text{日度法}}$$

…………………………………………………………………… (10.64)

(3)求次季土王日术:本节 6(1)(10.60)～(10.63)式是由四立大、

小余推每季土王日，此处提供了另一种方法，由头季土王日大、小余加1季日数及日余($91\frac{5244\frac{6}{24}}{16860}$日)，得次季土王日大、小余。即：

$$(\text{头季土王日大余}+91)\frac{\text{头季土王日小余}+5244\frac{6}{24}}{\text{蔀法}}$$

$$=\text{次季土王日大余}\frac{\text{小余}}{\text{蔀法}}\cdots\cdots \quad (10.65)$$

(10.65)式所得小余满蔀法从大余，大余满60除去之，自纪首日名起算，算外为所求土王日名。

(4)推灭没术。《律历志》所给公式为：

$$\frac{(\text{冬至积没}+1)\times\text{没分}}{\text{没法}}=\text{冬至后没积日}\frac{\text{小余}}{\text{没法}}\cdots\cdots \quad (10.66)$$

$$\text{冬至后没积日}-n\cdot 60=\text{冬至后没大余}\cdots\cdots \quad (10.67)$$

其中n为自然数或0，且使0≤(10.67)式左端<60。算理参见第九章二节6(2)。由大、小余求没日日名法同前。

(5)求次没及灭术(《律历志》云“求次灭术”，误)。

兴和历每岁没数为$5\frac{4117}{16860}$，每没日数为$365\frac{4117}{16860}\div 5\frac{4117}{16860}=\frac{6158017}{88417}=69\frac{57244}{88417}$日。因此，由头没求次没法为：

$$(\text{头没大余}+69)\frac{\text{头没小余}+57244}{\text{没法}}=\text{次没大余}\frac{\text{次没小余}}{\text{没法}}\cdots\cdots \quad (10.68)$$

次没小余满没法入大余，大余满60除去之，所余不满60的部分“命以纪”，算外为次没日。

当没小余为零日，该没首日为灭日。

(6)求次没入月术(《律历志》作“求次没术”，误)。应先求冬至后没入月，方法参见第九章二节6(4)。兴和历无此法必有脱漏。有头没入月数，才能求次没入月数。

由于求没日入月须与月朔夜半日度(或日数)相比较，夜半日度分的分母是日度法(或谓为蔀法)，没日畸零分的分母也应化为日度法

(初为没法)，如每没日数 $69\ \frac{57244}{88417} = 69\ \frac{\frac{57244}{88417}\times 16860}{16860} = 69\ \frac{10915\ \frac{62285}{88417}}{16860}$。

$$(\text{头没大余}+69)\frac{\text{头没小余}+10915\ \frac{62285}{\text{没法}}}{\text{蔀法}}=\text{次没积日}\frac{\text{次没小余}}{\text{蔀法}} \quad \cdots\cdots (10.69)$$

设头没入于 a 月的日数为 A，那么：

$$(A+\text{次没积日})-\sum_{a}^{n}B_m=\text{次没入于第}(n+1)\text{月日数} \quad \cdots\cdots (10.70)$$

(10.70)式中 n 为 a 以后连续自然数，且使 0≤(10.70)式左端<第$(n+1)$月日数；B_m 为自 a 月开始的逐月日数，大月为 30 日，小月为 29 日。

《律历志》叙述(10.69)式说：求次没入月术曰："加没日六十九，没余一万九百十五，没分六万二千二百八十五。没分满没法从没余，没余满蔀法从日。"首句"加没日六十九"，"加"字前省略了"头没大、小余"数字；末句"没余满蔀法从日"中的"日"字，是指"次没积日"。

叙述(10.70)式说："命起前没月，历月大小除之。不满月者，即后没日及没余、没分。"末句"后没"是指标题中的"次没"。名称应该统一，所以(10.70)式只用"次没"，不用"后没"；"没余、没分"即次没小余。因只推入月日数，不算加时，(10.70)式没有计入小余数。

《律历志》"命日如上，算外，即次没日"，其中"命日"二字，误为"命曰"。此"日"字系指(10.69)式中的"次没积日"，不是(10.70)式中的入月日。严格说应该指从"次没积日"中减去甲子周以后的余数：次没大余。即此节还应有(10.71)式：

$$\text{次没积日}-n\cdot 60=\text{次没大余} \quad \cdots\cdots (10.71)$$

照例 n 是自然数或 0，且使 0≤次没大余<60。

推算入月数用次没积日，推日名用次没大余。

(7)推四正卦术。所谓"四正卦"，是指按后天八卦(即所谓文王八

卦)与东西南北四正向对应的震、兑、离、坎四卦。如前所说,它们分别始于四仲月中气(即二至二分)所在日,即坎卦始于冬至,离卦始于夏至,震卦始于春分,兑卦始于秋分。

坎卦之后是中孚(上巽下兑为中孚)卦,《律历志》说:“中孚因坎卦。”

(8)求次卦术。对于兴和历,每卦日数:$365\dfrac{4117}{16860}\div 60$

$$=6\frac{1473\dfrac{37}{60}}{16860}=6\frac{1473\dfrac{14\frac{4}{5}}{24}}{16860}\text{日。}$$

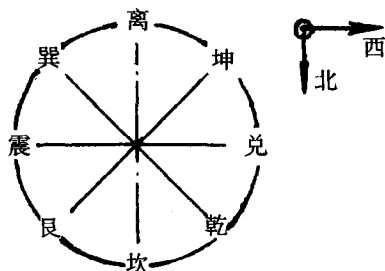



图 10.2　后天八卦方位

其中整日 6 为大余,1473 为小余,14 为小分,$\frac{4}{5}$中的分子 4 为微分。每卦得此数,四正卦各与其前第一卦合得此数,所以,六十四卦合得 60 个“此数”,总为 1 个回归年 365 日余。《律历志》说:“加坎卦大余 6,小余 1473,小分 14,微分 4。微分满 5 从小分,小分满小分法(24)从小余,小余满蔀法(16860)从大余,大余满 60 去之。命以纪,算外,即复卦用事日。

坎卦之后为中孚,中孚之后才是复卦。坎卦加 6 日余得复卦,表示中孚卦用事为 6 日余。其余诸卦与此同,即自中孚以后,复、屯、谦、睽……随共十四卦,每卦都是用事 6 日余。每季只有 15 个 6 日余,随以后的晋卦与南正离卦便只能合得 6 日余。其余仿此:井与离、大畜与兑、颐与坎卦各自合得 6 日余。

上引《律历志》文字用公式表示:

$$(\text{坎末日}+6)\frac{\text{坎末余}+1473\dfrac{14\frac{4}{5}}{\text{小分法}}}{\text{蔀法}}=\text{中孚末日}\frac{\text{余}}{\text{蔀法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (10.72)$$

$$\text{中孚末日}-n\cdot 60=\text{中孚末大余}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (10.73)$$

中孚末大余算外为复卦。

四正各与前一卦合得 6 日余,而四正卦及其前一卦用事各 n 日,兴

和历只字未提，应属脱漏。

还有另一种解释法：四正卦不主时，余 60 卦各得 6 日余。如此，兴和历便无脱漏。但是，与正光历出入太大，而且与僧一行所议不合。总之，兴和历与僧一行所议必有一误。

(9)诸月卦气表。参见第九章二节 6(8)、(9)及附表 34。

(10)推七十二候术。每年二十四节气，每个节气分为三候，合七十二候。因每气 $15\frac{3684\frac{1}{24}}{16860}$日，每候为：$15\frac{3684\frac{1}{24}}{16860}\div 3=5\frac{1228\frac{\frac{1}{3}}{24}}{16860}$日。所以，

$$(\text{冬至大余}+5)\frac{\text{冬至小余}+1228\frac{\frac{1}{3}}{\text{小分法}}}{\text{蔀法}}=\text{冬至中候大余}\frac{\text{日余}}{\text{蔀法}} \quad \cdots\cdots (10.74)$$

(10.74)式中"冬至大余"即冬至初候(虎始交)大余。右端"日余"包括小余、小分和微分。大余满 60 除去之，不满者，数从纪首日名始，算外为该候始日。其余诸候仿(10.74)式依次推求。

(11)七十二候表(略)。

按：节候名称辗转抄录，最是杂乱。正光历、兴和历的候名较为完整，然亦不能无误。无须与他书对勘，但以此两历而言，"寒露末候"正光历言"阳气始衰"，兴和历作"阳气日衰"。"日"与"始"不同，必有一误。以理判断：旧云夏至一阴生，冬至一阳生。阳生则阴衰，阴生则阳衰。阳衰始于夏至，不始于寒露。因此，言"始衰"者误。再如，雨水、白露末候都是"鸿雁来"，物候名称，岂可相同？《礼记·月令·孟春》"鸿雁来"之下，先郑(郑众)注解说是"鸿雁南来"。如此，白露末候则应是"鸿雁北来"。

(12)推上朔术。《律历表》公式为：

$$(\text{人纪年}-1)\times 6-n\cdot 60=\text{上朔大余} \quad \cdots\cdots (10.75)$$

自甲子起算，大余算外为上朔日名。

三、五星推法

1. 推五星见伏参数

(1)五星上元。上元甲子主春秋鲁隐公元年(前 722 年)己未,积 292736 年。

上元甲子至魏兴和二年庚申,积 293997 年。

由此可见,兴和历五星上元与日月运行的上元相同。

(2)五星周期。即五星每合分数,可称五星数。

木精(岁星):6723888。

火精(荧惑):13149083。

土精(镇星):6374061。

金精(太白):9843882。

水精(辰星):1953716。

此外,在“五步”之中还有一些参数附于每星之下,一并提到此处叙述。

合终日数及日余:星一终(合)所历日数,显然,五星数除以日度法得此数。如:

木星:$\frac{\text{木星数}}{\text{日度法}}=\frac{6723888}{16860}=398\,\frac{13608}{16860}$。其中 398 为木星合终日数,13608 为木星合终日余。

余四星仿此。

周虚:日度法减合终日余得周虚。它表示合终日余差多少分不足 1 日。如木星:日度法－木星合终日余＝16860－13608＝3252。余四星同。

行星度及度余:是星一终期间所行天度分数。如木星(见图 10.3),初日星合于 A,假若星行迟、日行速,日行 1 周后,至 B 追及星,日星再合于 B,星行度$\overset{\frown}{AB}$,日行周天＋$\overset{\frown}{AB}$,而日行度等于日星 1 终所历日数。因此:

木星行度＝木星合终日数及余－n・周天分

$$=398\frac{13608}{16860}-365\frac{4117}{16860}=33\frac{9491}{16860}$$

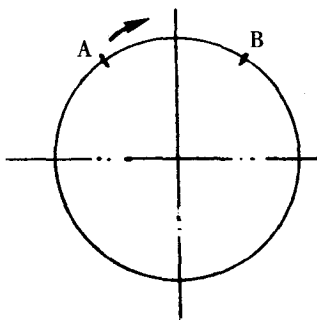



图 10.3 五星行度

其中 33 为木星行星度，9491 为木星行星度余。中华书局标点本《魏书·律历志》校勘者把度余 9491 改为 8491，在"校勘记"〔六〇〕中解释说："度余八千四百九十一，诸本'八千'作'九千'。按岁星数 6722888 减以周天 6158017，余除以度法 16860，得行星 33 度 8491，知'九千'乃'八千'之讹，今改正。"校勘者疏忽，把岁星数 6723888 看成了 6722888，得出个错误的数字，反而怪原文错了。

假若星行速，日行迟（如金、水星），自 A 点日星合以后，日行至 B，星行过 1 周至 B 追及日使日星再合。其间日行度为 $\overset{\frown}{AB}$，星行度也是 $\overset{\frown}{AB}$，即星行等于每合日数及余。如金星一终（晨夕各一合）日数为：$583\frac{14502}{16860}$日，每合为 $\frac{1}{2}\times583\frac{14502}{16860}=291\frac{15681}{16860}$日，每合行星也是 $291\frac{15681}{16860}$度，水星同。

兹将五星参数汇为下表。

表 10.3　兴和历五星参数表

参数名＼数目＼星名	木星	火星	土星	金星	水星
五星数	6723888	13149083	6374061	9843882	1953716
合终日数	398	779	378	583	115
合终日余	12608	15143	981	14502	14816
周　虚	33252	1717	15879	2358	2044
行星度	33	49	12	291	57
行星度余	9491①	6909	13724	15681	15838

与正光历比较可知，兴和历合终日余减小了。这大约是兴和历对正光历的重大修正。此外，回归年日数增加了约 7.7 分，朔望月数作了相应缩小，此外就很少改进了。

2. 由五星参数进行的推算

(1)推五星术。《律历志》公式为：

$$(\text{上元以来积年}-1)\times\text{周天}=\text{五星实} \quad\cdots\cdots\quad (10.76)$$

$$\frac{\text{五星实}}{\text{五星数}}=\text{积合}\frac{\text{合余}}{\text{五星数}} \quad\cdots\cdots\quad (10.77)$$

$$\text{五星数}-\text{合余}=\text{入岁度分} \quad\cdots\cdots\quad (10.78)$$

$$\frac{\text{入岁度分}}{\text{日度法}}=(\text{所求年天正十一月冬至后})\text{晨夕合度算}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \quad\cdots\cdots\quad (10.79)$$

对金、水二星：

$$\text{冬至后晨夕合度算}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}-1\text{合日数}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}\begin{cases}>0 & \text{为晨合}\\ <0 & \text{为夕合}\end{cases} \quad\cdots\cdots\quad (10.80)$$

在正光历中，五星实叫做六通实(参见第九章三节 2(2)(9.78)式)，以下各式均与正光历同。

由合度求缩度法同前："命起牛前 12 度，宿次除之。不满宿者，算外。即所求年天正十一月冬至后晨夕合度及度余。"

---

① 原文 8491，误。

(2)径推五星术。《律历志》说："置上元以来尽所求年，减一，如法算之。""如法算之"，就是用本节2(1)中的方法推算之。本节2(1)中有五式，算至何处呢？《律历志》说，"合度余满日度法，加合度算一"。算到出现"合度余"为止。本节2(1)中没有合度余，有合余和度余(兴和历名称不统一，是它的重要缺点之一，姑不必论)，究竟是哪一个？既说"满日度法，加合度算一"，似乎是指度余。已算到(10.79)式，但(10.79)式所得日度算和度余本是冬至后晨夕合度算及余。《律历志》又说："合度算满日终日数去之……所得即所求年天正十一月冬至后晨夕合度算及度余。"这又是为何？况且由(10.78)式，入岁度分＜五星数，两边各除日度法得：合度算及余＜合终日数及余。合度算又怎么会"满合终日数"？凡此种种，都很难解释通。

应该作另一种解释：合度余是指合余，不是度余。所谓如法算之，只用本节2(1)式中(10.76)、(10.77)两式，得到合余后即止。而后由合余"径推"冬至后晨夕合度，方法是：

$$\frac{\text{合余}}{\text{日度法}}=(\text{冬至前})\text{晨夕合度算}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \cdots\cdots \quad (10.81)$$

$$(\text{合终日数}-\text{晨夕合度算})\frac{\text{合终日余}-\text{晨夕合度余}}{\text{日度法}}$$

$$=(\text{冬至后})\text{晨夕合度算}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \cdots\cdots \quad (10.82)$$

按算理(10.81)、(10.82)式是正确的，可以称得上是"径推五星术"。但《律历志》的叙述与此两式有诸多不合。首先，在本节2(1)中把"合算度"作为"冬至后晨夕合算度"的简称，这里却把"合算度"作为"冬至前晨夕合算度"的简称而不作任何说明，不妥者一。其次，把"合终日数－晨夕合度算"叙述为"合度算满合终日数去之"，把"合终日余－晨夕合度余"叙述为"亦以合终日余减合度余"，都与旧算书中的格式不符(旧算书把"$A-B$"叙述为"B减A")，此不妥者二。对(10.81)式不讲算法，直接讲结果"合度余满日度法，加合度算一"，不妥者三。再加上前面说的度余、合余不分，贸然出现一个"合度余"的参数。有此四个不妥，原文必有脱漏。若欲补苴罅漏，可如下文：

"径推五星术曰：置上元以来尽所求年，减一，如法算之，得合余。以

日度法约之，为所求年天正十一月冬至前晨夕合度算，不尽为合度余。以合度算减合终日数，亦以合度余减合终日余。若不足减者，减合度算一，加周虚。所得即所求年天正十一月冬至后晨夕合度算及度余。其求金、水及命度，皆如上法。”

(3)求星合月及日术。《律历志》所给公式为：

$$(\text{冬至去朔日数}-1+\text{冬至后合算度})\frac{\text{冬至小余}+\text{合度余}}{\text{日度法}}$$

$$=\text{所求年天正十一月朔去冬至后合日}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}} \cdots\cdots\cdots\cdots (10.83)$$

《律历志》还说，把(10.83)式右端中的“合度算变成合日算，合度余为日余”，意思是把(10.83)式中的度及度余都化为日及日余，以与(10.83)式右端单位统一。

由(10.83)式所得日求月法是“命日起天正十一月，如历月大小除之。不满月者，算外”，就是星合所在月及日。

(4)求后合月及日术。《律历志》所给公式为：

$$\text{入月算及余}+\text{合终日数及余}=(\text{入月算}+\text{合终日数})$$

$$\frac{\text{入月日余}+\text{合终日余}}{\text{日度法}}=\text{冬至后初合所在月朔去后合日数}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (10.84)$$

所得日数从初合所在月起算，“如历月大小除之”，就是历法是大月除去 30 日，是小月除去 29 日，逐月除之，直到不能再除(所余已不足 1 月日)，“算外”，即后合所入月及日。

对金、水二星，因一终日数及余之中包括两合(晨合及夕合)，(10.84)式中的“合终日数”及“合终日余”应改为 1 合日数及日余，仍照(10.84)式计算。若初合为晨合，所得后合便是夕合；初合为夕合，所得为晨合。如《律历志》所说，是“加夕得晨，加晨得夕也”。

(5)求后合度术。《律历志》所给公式为：

$$\text{行星度及余}+\text{前合度及度余}=(\text{行星度}+\text{前合度})\frac{\text{行星度余}+\text{前合度余}}{\text{日度法}}$$

$$=\text{后合度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}} \cdots\cdots\cdots\cdots (10.85)$$

所得后合度及度余是自冬至所在起的天度数。由此数求宿度当然

应“自牛前十二度起算”。但《律历志》说是“命起前合度”，若如此，后文所说“算外，即后合度余”中的“算外”，是指“行星度及余”的算外，所得“后合度”也不是天度数，而是后合所入宿度数。“前合度及度余”也是前合的入宿度及余。

3. 五步

亦五星行步。

岁星。

晨与日合而伏，在日后					☼日 ○星 北 东
	顺行	16日6804分		行星2度13175分	
晨见东方	顺疾	$\frac{1}{58}$度/日	行58日	行度11度	○☼（晨见）
	顺迟	$\frac{9}{58}$度/日	行58日	行度9度	○　☼
	留		25日		○　☼
	逆行	$\frac{1}{7}$度/日	行84日	行度－12度	
	留		25日		
	顺迟	$\frac{9}{58}$/日	行58日	行度9度	
	顺疾	$\frac{11}{58}$/日	行58日	行度11度	
在日前，夕伏西方					☼　○
	顺行	16日6804分		行星2度13176分	
与日合					○☼ 日星合
	星一终	398日13608分		行星33度9490分①	

其余四星略。

4. 五步算法

(1)五星历步术。《律历志》给出三个计算公式：

$$(\text{伏日度}+\text{星合日度})\frac{\text{伏日度余}+\text{星合度余}}{\text{日度法}}=\text{星见日度}\frac{\text{余}}{\text{日度法}} \quad \cdots\cdots (10.86)$$

---

① 前面算得木星一终行星33度9491分〔见本节1(2)〕，与此不同，应是五步中对分后小数舍弃的结果。

此式无须多释，星伏时所在度及余加上星1合（自伏到见或自见到伏）所行度及余。理应等于星见时所在度及余。

$$\frac{\frac{\text{星行分母}\times\text{见度分}}{\text{日度法}}+\text{星行分}}{\text{星行分母}}=\text{星所在度}\frac{\text{分}}{\text{星行分母}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10.87)$$

此式中的星行分及分母都是“五步”中的量名，不是前引五星参数中的行星度及余。左端分式可以改为如下形式：

$$\text{星见度}\frac{\text{分}}{\text{日度法}}+\frac{\text{星行分}}{\text{星行分母}}$$

星见度分加上星行分（分满母为度），等于星所在度分，这也是容易理解的。（10.87）式左端那种看似复杂的形式，只不过是为了把星见度分和星行分的分母化同而已。

对于（10.87）式，《律历志》又说：“逆顺母不同，以当行之母乘故分，故母如一，为当行分。”是说五星顺行、逆行的分母不同（如岁星顺行分母58，逆行分母7），计算过程中要随时把分母化同，方法是不论逆顺行，在前者为故行，在后者为岁行，以在后的当行分母为准，由下式化同：

$$\frac{\text{当行母}\times\text{故分}}{\text{故母}}=\text{当行分} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10.88)$$

所得“当行分”是把“故分”的分母，化为当行分母以后所得分。在（10.87）式中，见度分为故分，日度法为故母；星行分为当行分，星行分母为当行母，把两者分母化同，就是按（10.88）式进行的。

《律历志》还说：“留者承前，逆则减之，伏不书度。”以前诸历，都有此语，不再解释。“除斗分，以行母为率”，在计算过程中，需要减去斗分时，要将斗分分母（日度法）与星行分的分母化同，方法是以星行分母为准（率），即以星行分母为当行母，斗分分母为故母。“分有损益，前后相御”，是说按本节3中的五星行步，一步一步地计算，每进一步，星行分都有损有益，损（或益）前得后，就是所谓“前后相御”。

（2）求五星行所在度。《律历志》公式是：

$$\frac{\text{行分子}\times\text{行日数}}{\text{分母}}=\text{星行所在度} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10.89)$$

此式显然是错误的，可能是漏掉了一些运算步骤，也可能是标题有

衍文。

先说第一种可能性。要推算五星在某一行步时的天度分数，必须先确定一个计算的始点（比如某个星合点），此点所在的天度分是已知的，而后把每一步的星行度分加进去。直加到所求星步为止，即：

$$\text{某星合点天度分} + \sum \frac{\text{行分子} \times \text{行日数}}{\text{分母}} - n \cdot \text{周天度数} = \text{星所在度} \quad (10.90)$$

其间行分子、分母是星每日行分数，如岁星顺行迟，每日行$\frac{9}{58}$度，行分子为 9，分母为 58 等。顺行时，行分子为正数，逆行时，行分子为负数，留时，行分子为 0。n 是个待选的自然数或 0，选取依据是使：0≤星所在度＜周天度。

由（10.90）式判断（10.89）式中漏脱的文字，必相差不远。比如，可作如下补充。

“求五星所在度术曰：置星合度分，以行分子乘行日数，分母除之，为一步行分。每步增之，留者承前，逆则减之，伏不书度，满周天去之，所得即星行所在度。”

第二种可能性是由于标题中多了某些字，使得文题不合。去掉这些字也就是了。比如，从标题“求五星行所在度术”中去掉“所在”二字，相应地，正文末句“所得即星行所在度”中的“所在”二字也除去，题文相符，就没有毛病了。

附：《魏书·律历志》涉及的历法

太平真君年间司徒崔浩五寅元历，未及施行。太乐令公孙崇评说，其“考察未及周密”。

北魏世祖拓跋焘平定北凉时（439 年），得到北凉赵歐玄始历。初“谓为密”，到北魏宣武帝元恪即位前后，星度已“稍为差远”。

公孙崇、赵樊生等景明历，成于北魏正始四年（507 年），崇自云“考其盈缩，晷象周密，又从约省”。大约参数简单，运算“约省”，是其特点。他自己说“天道盈虚，岂曰必协”，所以“晷象周密与否”就不得而知了。

钟律郎张明豫治己丑元历，草创未备，因身死历废。

太和间，著作佐郎张洪所造历为甲午、甲戌二元，续造甲子、己亥二

元。

张明豫子张龙祥为甲子元。

李业兴为戊子元。洪、祥、兴三家之术，并未申用。延昌四年冬，三家并上新历，各求申用。

贞祥处士李谧私立历法，言合纪次。求就其兄玚追取，与洪等所造，递相参考，以知精粗。

附马都尉卢道虔，太极采材军主卫洪显，殄寇将军、太史令胡荣，雍州沙门道统，司州河南人樊仲遵，定州钜鹿人张僧豫，以上六家，各上新历。连同洪等三家，九家共成一历，亦所谓正光历。

第十一章　张胄玄制定的大业历

张胄玄制定的大业历载于《隋书·律历志中》。隋初颁行的张宾历至开皇十四年(594年)缺点已日渐明显,最突出的是日食不验。杨素曾向隋文帝杨坚奏称,太史局奏报的日食共二十五次,只有四次日期准确,其余全都不对。这四次之中日食时刻又不对,更谈不上什么初复食既了。在这种情况下,张胄玄的大业历被推到了前台。

按照隋志的说法,张胄玄的历法是"学祖冲之,兼传其师法"。即主要是仿照祖冲之的大明历,个别地方有所改动。历成之初,计算日食时刻颇准确。但是由于历法本身的错误。时日稍久,误差也就明显了。可是由于当时历法之争相当激烈,大业历受到的攻击从来没有停止过。张胄玄害怕被反对者刘焯等人捉住痛脚,明知道自己的历法有缺点,竟然不敢改正,长期以来与同党袁充等互相标榜,虚誉己长,自掩其短,压制异见。直到大业四年(604年)刘焯死后,才对自己的历法加以改进,计历始点由虚宿5度改为7度,其他也多有增损,这部改订后的历法就是本文所说的大业历,自大业四年执行。

一、朔闰日名算法

1. 相关参数

闰月安排的周期采用410年151闰,即每年$\frac{151}{410}$闰,与以往的十九年七闰相比,每7790年少1个闰月。大业历称151为章闰,410为章岁。每一章(410年)有5071个月(平年410年4920个月,再加上151个闰月,得此数),名为章月。

每个朔望月取为$29\frac{607}{1144}$日,化为假分为$\frac{33783}{1144}$日,照例33783名

为月法，1144 名为日法。四分日法得 286，名为辰法，是计算时辰时常用的参数。

每个回归年日数取为 $365\frac{10363}{42640}$，化为假分为$\frac{15573963}{42640}$。分子 15573963 名为岁分，分母 42640 名为度法。大业历以 1 度为 42640 分，因而把 42640 叫做度分，所谓度分就是 1 度所含分数；日每天行 1 度，1 岁(1 个回归年)所行分数 15573963 就叫做岁分。由于引入了岁差的概念，每岁日行度分并不等于周天度分，1 周天分数取为 15574466，称为周天分，化为度数是$\frac{15574466}{42640}=365\frac{10866}{42640}$，其中 10866 叫做斗分。周天分比岁分大 503 分，即日行每岁差 503 分，不及 1 周天。约 84.77 年差 1 度，这便是大业历采用的岁差值。

传统历法还把每个回归年日数除去 6 甲子日数后的余数叫做没数，大业历的没数为 $5\frac{10363}{42640}$。1 年有 $5\frac{10363}{42640}$个没，每没日数为 $365\frac{10363}{42640}\div5\frac{10363}{42640}=\frac{5191321}{74521}$。分子 5191321 名为没分，分母 74521 名为没法。

计算节气时经常用的两个参数是气(日)法和气时法。把每月日数与月数相乘，得此月数内所含日数，比如求每年($\frac{章月}{章岁}$个月)的日数，每月日数的分母为日法，月数的分母通常是章岁，相乘后的分母是“日法×章岁”，等于 469040。由于被此数除得的数字通常是日数，应称为日法；而表示朔望月日数的分母也叫做日法，两者应有所区别。因为此参数是计算节气所常用，所以定名为“气日法”。《律历志》说是“气法”，按通常命名的规律，被气法除得的数字应该是气，比如被日法除得的数为日，被月法除得的数为月，被没法除得的数为没等等。所以知，名为“气法”误，“气”字后脱“日”字。后同。

气时法是依照“辰法”得到的参数。四分之一日法为辰法，四分之一度法，不称“辰”而称“时法”。同样由于是计算节气所常用，“时”前加“气”字，定名为气时法。

大业历 1 个近点月取为 $27\frac{1413}{2548}=\frac{70209}{2548}$日。其中 27 名为周日，1413 名为日余，2548 名为周法，70209 名为周通。

以上共 18 个参数。

此外，计算历法的开始年份为大业四年戊辰，上元定为大业四年以前 1427644 年(不包括大业四年)，年名和起始日名都是甲子。

2. 气、朔、闰算法

(1)推积月术。

用入元以来到所求年之间的年数乘以每年月数即得。"入元以来到所求年之间的年数"，可以用大业四年到所求年之间的年数(不包括所求年在内)计算，但是由于大业四年年名戊辰，利用甲子表推算所求年的年名时要自戊辰始。而且大业四年岁首日名不是甲子，给利用甲子表计算带来不便。所以，入元以来到所求年之间的年数选择"上元"以来到所求年之间的年数，即选用所求年到大业四年的年数加上大业四年到上元之间的年数。"每年月数"照例等于$\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}$。如此，《律历志》算法公式可表示为：

$$\text{入元以来至所求年的年数}\times\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}=\frac{\text{上元以来至所求年的年数}\times\text{章月}}{\text{章岁}}$$

$$=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}} \qquad\cdots\cdots (11.1)$$

这与以往算法完全相同，不同的是它往更深一层考虑：以上求得的积月是上元以来到所求年以前的积月，不包括所求年。即积月算外入所求年。有一种特殊情况应加考虑，即所求年的第一个月是闰月，可把它归入"积月"之中，自所求年的第二个月开始，计算其他项目。"归入积月"就是积月增 1。第一个月是闰月的条件是：(11.1)式所得闰余，加上第一个月所有的闰分大于或等于(11.1)式中的分母"章岁"。由于每年有 $12\frac{151}{410}$月，每月若为 410 分，全年闰分为 151，1 个月有闰分$\frac{151}{12}=12\frac{7}{12}$分，上述条件可以写作：闰余$+12\frac{7}{12}\geq$章岁。或写作：闰余$\geq$章岁－

$12\frac{7}{12}$。右端章岁$-12\frac{7}{12}=397$。为确定所求年第一个月究竟是不是闰月，还要检查十一月中气冬至是否用在该月。《律历志》说："闰余在三百九十七以上，若冬至不在其月，加积月一。"

(2)推月朔弦望术。

由(11.1)式算得的积月数乘每月日数，得积日数，积日算外就是所求年岁首日名，亦即所求年建子月(头年十一月)月朔日名。加$\frac{1}{2}$月得望日名，加$\frac{1}{4}$月得弦日名(朔加$\frac{1}{4}$月得上弦，望加$\frac{1}{4}$月得下弦)。即：

$$积月\times\frac{月法}{日法}=\frac{积月\times月法}{日法}=积日\frac{朔小余}{日法} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.2)$$

由于(11.2)式中的朔小余要归入下月(所求年的第一个月)，而下月自有零分 607 分(每月日数 $29\frac{607}{1144}$日)，当两者相加大于日法 1144 分，下月(所求年的第一个月)就可没为大月，即：

朔小余$+607\geqslant1144$，或朔小余$\geqslant1144-607=537$

所以《律历志》说："凡朔小余五百三十七以上，其月大。"

(11.2)式所得"积日"，从中除去甲子周数(60 的公倍数)，所余为不足 1 甲子的日数，设为 a，叫做"命以甲子"。"算外"就是第$(a+1)$日，在甲子表中，从甲子日起算，第$(a+1)$日的甲子名就是所求年建子月朔日的日名。

$\frac{1}{2}$月$=14\frac{875\frac{1}{2}}{1144}$日，$\frac{1}{4}$月$=7\frac{437\frac{3}{4}}{1144}$日。所以《律历志》说："加大余七，小余四百三十七太，小余满日法去之，从大余；满六十去之，命如前，为上弦日。""太"为$\frac{3}{4}$分，"满六十"前脱"大余"二字，"命如前"就是上文说的"命以甲子，算外"。

由上弦大、小余再加大余 7，小余 $437\frac{3}{4}$，得望日大、小余，三加得下弦大、小余，四加得下月朔大、小余。

(3)推二十四气术。

太初历、三统历、四分历诸历都是用策余算冬至大、小余，由冬至大、小余推二十四气每气大、小余。大业历不用策余，用(11.1)式算得的闰余。理由是(11.1)式算得的积月(化为日)算外为月朔，闰余入下月，所以，闰余算外为所求年的真正开端："冬至"。当然，由积月计算积日所得的零分(朔小余，即由(11.2)式算得的"小余")制历时，要归入下月，也应包括在闰余之内。即求出"闰余"包含的日数，加上朔小余的零分数，由二者之和得所求年的冬至大小余：

$$\frac{\text{闰余}}{\text{章岁}}\times\text{每月日数}+\frac{\text{朔小余}}{\text{日法}}=\frac{\text{闰余}\times\text{月法}}{\text{章岁}\times\text{日法}}+\frac{\text{朔小余}\times\text{章岁}}{\text{日法}\times\text{章岁}}$$

$$\doteq\frac{\text{闰余}\times\text{月法}+\text{朔小余}\times\text{章岁}}{\text{日法}\times\text{章岁}}=\frac{\text{闰余}\times\text{月法}+\text{朔小余}\times\text{章岁}}{\text{气日法}}$$

$$=\text{冬至大余}\frac{\text{冬至小余}}{\text{气日法}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11.3)$$

式中"气日法"《律历志》作"气法"，误，已如前述。

若由算得的冬至大、小余求冬至日名，照例是查甲子表，自甲子起算，大余算外第一日为冬至日名。《律历志》通常叙述为"命以甲子"，算外为冬至日名〔如由(11.2)式算得的积日求月朔甲子日名时，《律历志》就说是："命以甲子，算外为所求年天正月朔。"〕但是，此处《律历志》不说"命以甲子"，而说"命朔"。"命朔"和"命以甲子"是不同的。"命朔"的计算程序是：先求出冬至的甲子日名，再与冬至所在月的朔日日名比较，从甲子表中查出冬至为该月第几日。"命朔"的原因是由于(11.3)式算得的冬至大、小余是冬至到天正朔日之间的天数，而不是到上元甲子的日数。

由(11.3)式中的"冬至小余"化为"日分"法是："以十一约之，为日分。"即：

$$\frac{\text{冬至小余}}{11}=\text{日分}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11.4)$$

这是由于"冬至小余"的分母是气日法(469040)，日分的分母是度法(42640)，气日法除11得度法，冬至小余亦需除11，才得日分。

求次气大小余法：大业历每气 $15\frac{9315\frac{1}{8}}{42640}$ 日，由冬至大余和日分求

次气大余、小余法是：

$$\begin{cases}冬至大余+15=次气大余\\冬至日分+9315\frac{1}{8}=次气小余\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(11.5)$$

《律历志》述此式说“加日十五，日分九千三百一十五，小分一”。加后处理法是小分满 8 分入日分，日分满度法(42640)入大余，大余满 60 除去之，处理后得到的数字才是真正的次气大、小余。

由次气大、小余，同样应该“命朔算外”，求出次气为该月的第几日。日序数若超过了该月的总日数，应该从中减去总日数：大月减 30 日，小月减 29 日，剩余的不足 1 个月日数的数字为次气在下月的日序数。《律历志》不讲“命朔算外”，直接说“如月大小去之，日不满月，算外为次气日”。由于不知月大小次序，便不可能“如月大小去之”。所以，虽不言“命朔”，“命朔”是必不可少的步骤。不言只是行文的省略罢了。

《律历志》此段的最后一句话是“其月无中气者，为闰”。大业历以往的历法求二十四气法都不论所求节气在某月某日，因此，都列出求闰月所在法。大业历求二十四气法中除了求节气日名，还要求出节气在某月某日，这样闰月位置可以直接由二十四气的位置判定。因此，大业历不单列求闰月法。与以往历法相比，看似麻烦，其实简单了。

(4)入气盈缩数。

表 11.1　入气盈缩数表

二十四气	损益率	盈缩数
冬至十一月中	益 70	缩初
小寒十二月节	益 35	缩 70
大寒十二月中	益 35	缩 105
立春一月节	益 20	缩 140
雨水一月中	益 30	缩 160
启蛰二月节	益 35	缩 190
春分二月中	损 55	缩 225
清明三月节	损 45	缩 170
谷雨三月中	损 40	缩 125
立夏四月节	损 30	缩 85

续表

二十四气	损益率	盈缩数
小满四月中	损 55	缩 55
芒种五月节	益 65	盈初
夏至五月中	益 55	盈 65
小暑六月节	益 40	盈 120
大暑六月中	益 25	盈 160
立秋七月节	益 5	盈 185
处暑七月中	益 30	盈 190
白露八月节	益 40	盈 220
秋分八月中	(益)损 60	盈 260
寒露九月节	损 55	盈 200
霜降九月中	损 50	盈 145
立冬十月节	损 45	盈 95
小雪十月中	损 40	盈 50
大雪十一月节	损 10	盈 10

表列数据反映的是朔望月在一年二十四气中加时盈缩变化情形，或者说是月朔受日行迟疾影响的情形，后面还有一个月朔在一月之内的逐日变化表(见表 11.2)，可见大业历认为，定朔时刻不仅受月行迟疾变化的影响，还受日行迟疾的影响。

表中“损益率”是指月速增减率(损为减，益为增)，单位是分，单位制 1 日＝1144 分。“盈缩数”是指月朔提前或延迟的分数，提前为缩，延迟为盈。数目大小等于自冬至以来的损益率的累积数，单位制与损益率同。

由上表进行的计算《律历志》称为“求朔望入气盈缩术”。所给计算公式为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当入气日}<15\text{ 时：}\\ \text{定盈缩}=\text{盈缩数}\pm\dfrac{\text{损益率}\times\text{入气日}}{15}\\ \text{当入气日}\geqslant 15\text{ 时：}\\ \text{定盈缩}=\text{盈缩数}\pm\dfrac{\text{损益率}\times\text{入气日}}{16}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (11.6)$$

式中入气日$\leqslant 15\frac{9315\frac{1}{8}}{42640}$日。

损益率是一气之中的总损益数，每气 15 日余，取整数 15 或 16，除损益率，得在该气中每 1 日的平均损益数。乘以入气日，得在入气日内的总盈缩数。式中右端第一项“盈缩数”是入气以前直到冬至日之间的盈缩总数，与第二项相加得到的是朔望以前到冬至日的总盈缩数，式中称为定盈缩。

若右端第二项分子大于 8，则分式值大于 0.5，用四舍五入法，取为 1 分。《律历志》说是：“余八以上，从一。”下式则说是“半法以上亦从一”，“法”指分母 16，“半法以上”与上式一样指的仍然是分式值大于 0.5，则入为 1 分。

3. 推五行、没灭

(1)推土王术。

五行分王四季的方法是以木、火、金、水四行分王春、夏、秋、冬四季的前$73\frac{2072\frac{3}{5}}{42640}$日，由于每季$91\frac{13250\frac{3}{4}}{42640}$日，尚余$18\frac{11178\frac{3}{20}}{42640}$日，归土所王。四季各有$18\frac{11178\frac{3}{20}}{42460}$日，归土所王，土王总日数亦有$73\frac{2072\frac{3}{5}}{42640}$日。因木、火、金、水四行所主都是自相应季节的开端始，即自二十四气中的四立日（立春、立夏、立秋、立冬）起，推四立日的方法已见本节 2 (3)“推二十四气术”中，无须再述。四行所主的末日就是土行所主的始日，而土行所主末日为四立日前 1 日，也无须再述。这样推五行所主只须推出土王所主的首日即可，其余均不须再推。所以本节只说“推土王术”。推法只须在四立日大小余中加入$73\frac{2072\frac{3}{5}}{42640}$日即可。惟《律历志》不用四立日而用四个分至日（二至、二分），分至日的大、小余也是已知的（求算法亦见“推二十四气术”），但从分至日到土王始日便不能再加

$73\frac{2072\frac{3}{5}}{42640}$日，只能加入该日数减去从四立日到分至日之间三气日数的差，即加入 $73\frac{2072\frac{3}{5}}{42640}-45\frac{27945\frac{3}{8}}{42640}=27\frac{16767\frac{9}{40}}{42640}$日，《律历志》叙述为："加分至日二十七，日分一万六千七百六十七，小分九。小分满四十从日分一，满去如前。"用数学式表示：

$$\left.\begin{array}{l}\text{分至日大余}+27=\text{土王日大余}\\ \text{分至日日分}+16767=\text{土王日日分}\\ \text{分至日小分}+9=\text{土王日小分}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (11.7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{其中日分}=\text{小分}\times 40\\ \text{大余 1 日}=\text{日分}\times 42640\\ \text{土王日日分}+\dfrac{\text{土王日小分}}{40}=\text{土王日小余}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (11.8)$$

(2)推没日术。

《律历志》所给公式是：

$$\left.\begin{array}{l}\text{气有小分：}\\ \text{气去朔日及余}+\dfrac{\text{没分}-(8\times\text{日分}+\text{小分})\times 15}{\text{没法}}\\ =\text{气后没日大余}\dfrac{\text{小余}}{\text{没法}}\\ \text{气无小分：}\\ \text{气去朔日及余}+\dfrac{\text{没分}-120\times\text{日分}}{\text{没法}}=\text{气后没日大余}\dfrac{\text{小余}}{\text{没法}}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (11.9)$$

式中"气"指冬至；左端第一项"气去朔日及余"中的"及余"二字是笔者所增。本来"气去朔日"中的"日"，既可是整日，也可是零日，"及余"二字不必增。但是第二项中有日分和小分，增入"余"字更觉谐调。(11.9)式的意义可作如下说明：

没日计算法始见于《后汉书》中的《四分历》。由于每年没数(1 个回归年日数去掉 6 甲子 360 日后的余日数与每年没数相等)和每一没的日数(用没数除回归年日数，得每没日数)是已知的，可以算出上元以来的总没数，包括整数和畸零两部分。将整数部分化为日，可得到所求冬至前最后 1 没的日名，加每没日数得冬至后第一个没日的日名。也可以

求出畸零部分的天数，从1没日数中减此数得到冬至后没日。如图11.1：$BC-AB=AC$，BC 为每没日数，AB 为冬至前畸零没数所化日数，AC 为冬至后第一没到冬至日数。自《后汉书》以来诸历计算没日不外以上这两种算法。此处是按后一种方法进行的。

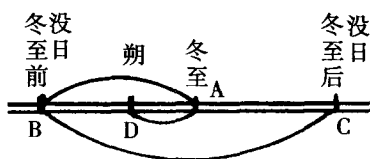



图 11.1　没日计算法

设上元以来到所求年之前的年数为 A，其间没数为：$A\times 5\,\frac{10363}{92640}=$ 没数$\frac{\text{没余}}{\text{度法}}$；其中没数为整数，没余<度法。把$\frac{\text{没余}}{\text{度法}}$化为日就是图11.1中 AB 的长度：$AB=\frac{\text{没余}}{\text{度法}}\times\frac{\text{没分}}{\text{没法}}=\frac{\text{没余}\times\frac{\text{没分}}{\text{度法}}}{\text{没法}}=\frac{\text{没余}\times 121.7}{\text{没法}}$。

因每气日数为 $15\,\frac{9315\,\frac{1}{8}}{42640}$ 日，其中9315为日分，$\frac{1}{8}$的分子1为小分。把 AB 表达的日数也写成这种形式，即把分子的没余写为"日分$\frac{\text{小分}}{8}$"。当小分等于0时，日分＝没余。且把121.7取为120，上式就变为：

$$AB=\frac{\text{日分}\frac{\text{小分}}{8}\times 120}{\text{没法}}=\frac{(\text{日分}\times 8+\text{小分})\times 15}{\text{没法}}$$

那么，$AC=BC-AB=\frac{\text{没分}}{\text{没法}}-\frac{(\text{日分}\times 8+\text{小分})\times 15}{\text{没法}}$

$$=\frac{\text{没分}-(\text{日分}\times 8+\text{小分})\times 15}{\text{没法}}$$

AC 是冬至后第一没日距冬至日数，若冬至去朔日数为 DA，那么，冬至后没距朔日数：

$$DC=DA+AC=\text{冬至去朔日数}+\frac{\text{没分}-(\text{日分}\times 8+\text{小分})\times 15}{\text{没法}}$$

若小分=0，DC=冬至去朔日数$+\frac{\text{没分}-\text{日分}\times 120}{\text{没法}}$。这两个 DC 的表达式就是(11.9)式。如前所述，由于把 121.7 近似取作 120，(11.9)式是个近似式，其误差可以这样估计：

$$AB=\frac{\text{没余}\times 121.7}{\text{没法}}=\frac{\text{没余}\times(120+1.7)}{\text{没法}}=\frac{\text{没余}\times 120}{\text{没法}}+\frac{\text{没余}\times 1.7}{\text{没法}}$$

因没余<度法，$\frac{\text{没余}\times 1.7}{\text{没法}}<\frac{\text{度法}\times 1.7}{\text{没法}}\doteq 0.97$ 日，即绝对误差不超过 1 日，相对误差不超过$\frac{1.7}{121.7}\doteq 1.4\%$。

(11.9)式既求得"气后没日大、小余"，每没日数为$\frac{\text{没分}}{\text{没法}}=69\frac{49372}{74521}$日，所以求次没：

$$\left.\begin{array}{l}\text{次没大余}=\text{气后没日大余}+69\\ \text{次没小余(日分)}=\text{气后没日小余(日分)}+49372\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11.10)$$

照例，所得次没小余满分母(没法 74521)化为整日 1，入大余；大余满 1 甲子 60 日则除去之。不满 60 日的部分，自甲子起算，算外为此没日名。《律历志》叙述为"日分满没法从日，去命如前"。

4. 推迟疾术

(1)推入迟疾历术。

就是推算所求年天正月朔日夜半入于近点月中的第几日几分。已知一个近点月数为$27\frac{1413}{2548}=\frac{70209}{2548}$日$=\frac{\text{周通}}{\text{周法}}$。《律历志》所给推算公式是：

$$\frac{(\text{朔积日}-m\cdot\text{周通})\times\text{周法}-n\cdot\text{周通}}{\text{周法}}=\text{入历日数}\frac{\text{日余}}{\text{周法}}\quad\cdots\cdots\quad(11.11)$$

m、n 是待定正整数或 0，选定条件是满足：0≤朔积日$-m\cdot$周通<周通；0≤(朔积日$-m\cdot$周通)$-n\cdot\frac{\text{周通}}{\text{周法}}<\frac{\text{周通}}{\text{周法}}$。其中"朔积日"是自上元到所求年天正月朔日夜半之间的积日总数，"周通"可以理解为周法(2548)个近点月的总日数。(11.11)式左端可以化为：

$$\text{左端}=(\text{朔积日}-m\cdot\text{周通})-n\cdot\frac{\text{周通}}{\text{周法}}$$

由选定 m、n 的条件可知，右端括号内表示朔积日中不足周法个近点月的日数，从中再减去近点月日数，剩余的就是不足 1 个近点月的日数，可以理解为入于近点月内的日数。

朔积日求法见(11.2)式。

(2)求次月入历日及日余。

(11.11)式求出了头月朔的入历日及日余，欲求次月朔入历日及余，仍可用(11.11)式推算，此时"朔积日"加 1 个月，即大月增加 30 日，小月增加 29 日。而从朔积日中减去的近点月数($\frac{\text{周通}}{\text{周法}}$)也多 1 个月，即多减了 $27\frac{1413}{2548}$日，于是增数、减数相通，头月是大月，净增 $30-27\frac{1413}{2548}=2\frac{1135}{2548}$日；头月是小月，则净增 $29-27\frac{1413}{2548}=1\frac{1135}{2548}$日。

所以《律历志》说："求次月，大月加二日，小月加一日，日余皆千一百三十五。"写成文字式是：

头月是大月：头月入历日数＋2＝次月入历日数
　　　　　　头月入历日余＋1135＝次月入历日余　……… (11.12)

头日是小月：头月入历日数＋1＝次月入历日数
　　　　　　头月入历日余＋1135＝次月入历日余　………… (11.13)

以上两式中的"次月入历日余"满周法(2548 分)则化为整日，入于"入历日数"之中；"入历日数"满一个近点月日数，则从中除去之。《律历志》把这两层意思表达为"满周日及日余去之"。周日为 27，日余为 1413，"满周日及日余"就是入历日数和日余合起来满 1 个近点月日数 $27\frac{1413}{2548}$日，则从入历日数、日余中分别除去周日和日余。不是从入历日数中减去周日，从入历日余中减去日余。即不是分别减，而是入历日数与入历日余相加后减去周日及日余。即便这样理解，也没有把运算过程完全表达出来，漏去了当入历日余大于周法时，需化为整日，增入"入历日数"中。完整的表达应该是：

"求次月，大月加二日，小月加一日，日余皆(加)千一百三十五。(日

余满周法入整日，入历日及余）满周日及日余去之。”

括号中的文字为笔者所增。

（3）求次日入历及余。

用（11.11）式推次日入历日及余时，“朔积日”增加1日，因而得数中的“入历日数”也增1日，其余不变。即：

$$\left.\begin{array}{l}\text{朔日入历日数}+1=\text{次日入历日数}\\ \text{朔日入历日余}=\text{次日入历日余}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11.14)$$

增加1日后的入历日数及日余大于1个近点月时，从中减去周日和日余，即减去1个近点月日数，与本节4（2）相同，《律历志》叙述为“满去如前”。

（4）求朔望加时入历术。

（11.11）式所求为朔日夜半入历数，如今欲求合朔时的入历数。用（11.11）式也可求合朔时的入历数，此时朔积日增加了个朔小余，入历日余中必然也增加个朔小余，其余计算结果都无变化，但是朔小余的分母是日法（1144），而入历日余的分母是周法（2548），需把朔小余的分母也化为周法，而后才能相加，化法是：$\dfrac{\text{朔小余}\times 2548}{1144\times 2548}=\dfrac{\text{朔小余}\times 49}{22\times 2548}=$

$\dfrac{\text{朔小余}\times\dfrac{49}{22}}{2548}=\dfrac{\text{日余}\dfrac{\text{小分}}{22}}{2548}$。

分子部分就是《律历志》说的“以四十九乘朔小余，满二十二得一为日余，不尽为小分”。以此数加夜半入历日及余得合朔入历日及余。即：

$$\left.\begin{array}{l}\text{朔日夜半入历日及余}+\text{日余}\dfrac{\text{小分}}{22}=\text{合朔入历日及余}\\ \text{其中，日余}\dfrac{\text{小分}}{22}=\text{朔小余}\times\dfrac{49}{22}\end{array}\right\}\cdots\cdots \quad (11.15)$$

求次月合朔入历，仿照（11.12）、（11.13）式推法的原理，须在头月合朔入历日及余中增加1个朔望月日数，减去1个近点月日数，即：

$$\text{头月入历日及余}+29\,\frac{607}{1144}-27\,\frac{1413}{2548}$$

$$=\text{头月入历日及余}+1\,\frac{2486\,\frac{21}{22}}{2548}$$

$$=\begin{cases}\text{头月入历日}+1=\text{次月入历日数}\\ \text{头月入历日余}+2486\,\dfrac{21}{22}=\text{次月入历日余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11.16)$$

照例应有"小分满二十二入日余，日余满周法入日数，入历日数及余满周日和日余则除去之"。《律历志》仍以"满去如前"概括之。

求望日入历日及余，如前法，只需在朔日夜半入历日及余中加上自朔到望日数及余即可。

$$\text{自朔到望日及余}=\frac{1}{2}\times\text{朔望月日数}$$

$$=\frac{1}{2}\times29\,\frac{607}{1144}=14\,\frac{1949\,\frac{21.5}{22}}{2548}\text{日}$$

由此得：

$$\left.\begin{array}{l}\text{朔日夜半入历日}+14=\text{望日夜半入历日}\\ \text{朔日夜半入历日余}+1949\,\dfrac{21.5}{22}=\text{望日入历日余}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11.17)$$

同样望日入历日余中的小分满22入日余，日余满周法(2548)入整日，日数及余满周日、日余则除去之。

(5)月行迟疾术。

表11.2　月行迟疾表

历日	转分	转差(法)	损益率	盈缩积分	差法
一日	601	退6	益238	盈初	5600
二日	595	退7	益211	盈605159	5540
三日	588	退8	益179	盈1141678	5470
四日	580	退9	益143	盈1598117	5390
五日	571	退9	益103	盈1963036	5300
六日	562	退9	益62	盈2224995	5210
七日	553	退10	益22	盈2383994	5120
八日	543	退10	损23	盈2440033	5020
九日	533	退9	损68	盈2381672	4920
十日	524	退8	损108	盈2208911	4830
十一日	516	退7	损144	盈1933190	4750
十二日	509	退7	损176	盈1565949	4680

续表

历日	转分	转差(法)	损益率	盈缩积分	差法
十三日	502	退 6	损 207	盈 1118628	4610
十四日	496	进 2	损 234	盈 591227	4550
十五日	498	进 4	益 225	缩 4814	4570
十六日	504	进 7	益 198	缩 577975	4630
十七日	511	进 8	益 167	缩 1082496	4700
十八日	519	进 8	益 131	缩 1506937	4780
十九日	527	进 9	益 95	缩 1839858	4860
二十日	536	进 9	益 54	缩 2081259	4950
二十一日	545	进 10	益 14	缩 2219700	5040
二十二日	555	进 9	损 31	缩 2255181	5140
二十三日	564	进 9	损 71	缩 2176262	5230
二十四日	573	进 8	损 112	缩 1994383	5320
二十五日	581	进 8	损 148	缩 1709544	5400
二十六日	589	进 6	损 184	缩 1333185	5480
二十七日	595	进 5	损 211	缩 865306	5540
二十八日	(600)333①	(进 1)	损(232)129②	缩 328787	(5590)3050③

此表的说明材料，一是中华书局版《隋书·律历志》的校勘记 10，其中说“转分为月亮实行度。损益率为本日月亮实行度与平行度之差。盈缩积分为前日月亮实行、平行差的累计数。差法为本日月亮实行度与太阳平行度之差”。此说言其大概，还不足以由此计算出表中数值。二是《自然科学史研究》第 6 卷第 2 期(1987 年)发表了陈美东、张培瑜的论文《月离表初探》，其中说，各种月离表对“月实行”有两种参数：“实行度分”和“实行分”。《大业历》转分栏所列数值显然是月亮的“实行分”，单位是“分”不是“度”。单位制是：1 度＝41 分。陈、张文又说：相邻两日月亮实行分之差，大业历名为“转法”。根据古代数学用语的习惯，二数差称为“差”或“衰”，不称“法”。本节 5(6)“求月行迟疾日转定分术”中即称转差，不称转法，“转法”应是“转差”之误。月亮平行分计算法，陈、张文给出两个计算公式：

①②③ 括号内为原表值，括号外为笔者改正值。

$$B=(\frac{\text{回归年长度}}{\text{朔望月长度}}+1)\cdot l$$

$$B=(\frac{\text{恒星年长度}}{\text{朔望月长度}}+1)\cdot l$$（其中 B 为平行分，l 是为将运算化简乘的倍数）

上式 $\frac{\text{回归年长度}}{\text{朔望月长度}}$ = 每年月数，就是每年月绕地运转周数，有一个更简单的计算法：$\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}$。对于大业历，$\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}=\frac{5071}{410}=12\frac{151}{410}$，无须用回归年及朔望月的庞大数字计算。问题在于陈、张文还给出了大业历月平行分的计算结果为 548.101486，用以上两式计算都不能得到此数：如取 $l=\frac{\text{章岁}}{10}=41$。

上式：$B=(\frac{15573963\times1144}{42640\times33783}+1)\times41=548.1$

下式：$B=(\frac{15574466\times1144}{42640\times33783}+1)\times41=548.116378$

大约陈、张文取值是由表中盈缩积分的值逆推出来的。如盈缩积分的计算公式是：盈缩积分 $=\sum$(实行分－平行分)×10 倍日法。

二日下盈缩积分为 605159，实行分 601，代入上式得：605159＝(601－平行分)×10×1144。

解得：平行分＝548.101486。

三日下盈缩积分为 1141678，实行分为 595，代入上式得：1141678－605159＝(595－平行分)×10×1144。

解得：平行分＝548.101486。

…………

最初制表时，此数是如何获得的呢？大约是按上述求 B 的下一个公式。计算中小数的取舍不当得到的。

已经知道表中第二栏“转分”中所列数值是月亮逐日的实行分(1 度＝41 分)，第三栏“转法”应该叫做“转差”，所列数值是相邻两日月亮实行分的差，即某日下的转分数减(或加)转差数，得次日转分数。

再看下述诸栏：损益率是逐日月亮实行分与平行分差的改进值。

陈、张文给出了改进公式是：损益率＝(实行分－平行分)·$\frac{10 \cdot 日法}{周法}$。

盈缩积分表示的是损益率的累积数，即某日下的“盈缩积分”数，等于此日之前到近点月初(1日)之间逐日实行分与平行分差的累积值的改进数，或者说是逐日盈缩积分累积值的改正数。按前一个定义，公式是：

盈缩积分＝$\sum$(实行分－平行分)×10 倍日法

按后一个定义，公式应是：

盈缩积分＝$\sum$损益率·10 倍周法

两式是等效的。只是表中损益率数值是四舍五入以后得到的近似值，由表值直接求损益率的和会产生很大的积累误差。所以，按上式计算逐栏的盈缩积分数，不用下式。

最后一栏“差法”是该日月亮实行分和太阳平行分差的改进值。即月亮相对于太阳的实行分的改进值，陈、张文所给公式为：

差法＝月实行×10－章岁

把章岁 410 代入上式得：

差法＝(月实行－41)×10

其中 41 分＝1 度，恰为太阳的每日行分。所以，上式可写为：

差法＝(月实行分－太阳平均行分)×10

不但与定义吻合，与其余诸栏数字的单位制也吻合。

问题在于损益率、盈缩积分、差分为何用改进值？又为何用那样的改进公式？主要是为计算时的方便，它们是把后面“推朔望加时定日及小余术”中，与损益率、盈缩积分、差分有关的分母或因子计入损益率、盈缩积分、差分中，得到的参数，就是所谓的改进值。

用以上公式检查表中数值，除了周日之外，全部无误。这是校勘者的功劳，为前此诸文所无。

周日就是第 28 日，表中列出的是全天数值，但是一个近点月只有 $27\frac{1413}{2548}$日，到第 28 日时过 1413 分(1 日＝2548 分)后，月亮运动回复到月初时的状态，不能再按第 28 日初的状态运行，表列该日数据只有

一小部分是对的，按乾象历以来的传统，应把这一天的表列值改正为1413分之内的数值。改法如下：

“盈缩积分”栏月初为0，此后渐盈，至14日后始缩，至月末应盈缩适尽。从表列值可知，周日缩值应为328787分。由盈缩积计算公式：

$$\text{周日月实行}-\text{月平行}=\frac{328787}{10\text{倍日法}}=29\text{分}$$

月平行分为 $548.101486\times\frac{1413}{2548}=304$ 分，代入上式得周日月实行：$304+29=333$ 分。

再由损益率的公式算得周日损益率为：

$$(\text{周日月实行}-\text{月平行})\times\frac{10\text{倍日法}}{\text{周法}}=\frac{328787}{2548}=129\text{分}$$

在周日内的日行分为：$41\times\frac{1413}{2548}=28$ 分。所以，周日差法为：$(333-28)\times10=3050$。

(6)推朔望加时定日及小余术。

就是推求定朔、定望的方法。《律历志》所给公式由两个式子组成：

$$\begin{cases}\dfrac{\text{盈缩积分}\pm\text{入历日余}\times\text{入历日损益率}}{\text{差法}}=\text{定积分}\\ \text{本朔望小余}\pm\text{入气定盈缩}\pm\text{定积分}=\text{定朔望小余}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11.18)$$

式中盈缩积分、入历日损益率、差法都取用上表中的改进值，把它们的公式代入上式，上式所含意义自然也就明了了。第一式分子：

$$\frac{\sum(\text{月实行}-\text{平行})\cdot10\text{倍日法}\pm\text{入历日余}\times(\text{月实行}-\text{平行})\dfrac{10\text{倍日法}}{\text{周法}}}{(\text{月实行}-\text{日平行})\times10}$$

$$=\frac{\sum(\text{月实行}-\text{平行})\pm\dfrac{\text{入历日余}}{\text{周法}}(\text{月实行}-\text{平行})}{\text{月实行}-\text{日平行}}\cdot\text{日法}$$

式中分子第一项$\sum(\text{月实行}-\text{平行})$是在入历整日内的月行增量；第二项中$\frac{\text{入历日余}}{\text{周法}}$是入历日中不足1整日的部分，这部分的月行增量是$\frac{\text{入历日余}}{\text{周法}}(\text{月实行}-\text{平行})$。两项相加减表示在入历日及余之内的月行增量或减量（增或减由盈缩积分判定：盈增缩减）。一、二两项之间的

“±”号由损益律判定:益“+”,损“-”。分母是月对日或月对地的每日行分,与分子相除表示分子中的那些增量按月对地的速度推算须行几日,也就是在地上的人看来须行几日。再与分式右端的“日法”相乘,变成了日分(1 日=日法分)。

(11.18)式中的第二式左端第一项(本朔望小余)单位是日分〔见(11.2)式,单位制:1 度=日法分〕;第二项(入气定盈缩)的单位制也是 1 度=日法分〔见本节 2(4)表 11.1 及(11.6)式〕,与第三项定积分的单位制相同,都是分,且 1 度=41 分。三项单位制相同,可以相加减。其中第一项是按平均行速算得的朔(或望)日夜半到合朔点(或望)间的距离,第二项是由于日行迟疾产生的误差,第三项是由于月行迟疾产生的误差,三项相加减得到的自然是定朔(望)点到朔(望)日夜半间的日分数,《律历志》称为“定朔望小余”。除以日法就变成了日。

《律历志》说,定积分与入气定盈缩都与本朔望小余相加减。由于“盈”表示月或日行速,合朔早;“缩”表示月或日行迟,合朔晚。所以是“盈减缩加本朔望小余”。若本朔望小余不够减,须从整日中取 1 日化为日法分,增入本朔望小余,而后再减,《律历志》说是“不足减者,加日法乃减之”。由于整日减少一日,所以,此种情况下合朔加时提前 1 日,就是《律历志》说的“加时在往日”。同样的道理,若与本朔望小余相加后,大于日法,应从中取出日法分化为 1 整日,入大余。这时的定朔望小余减去了日法分,大余增加 1 日。所以《律历志》说是“满日法者去之,(合朔望加时)则在来日,余为定小余”。

《律历志》中此段算法的最后一句是“无食者不须气盈缩”。意思是,如果不是为了推算日食,无须考虑由于日行迟疾产生的“入气定盈缩”,只由月行迟疾产生的定积分计算定朔望就可以了。

由此可见,大业历推算日食时,同时考虑了日行迟疾和月行迟疾两项误差,是它比以往诸历进步之处。

5. 推算日月距度

(1)二十八宿距度。

表 11.3　二十八宿赤道距度表

东方七宿		北方七宿		西方七宿		南方七宿	
星名	星度	星名	星度	星名	星度	星名	星度
角	12 度	斗	26 度	奎	16 度	井	33 度
亢	9 度	牛	8 度	娄	12 度	鬼	4 度
氐	15 度	女	12 度	胃	14 度	柳	15 度
房	5 度	虚	10 度	昴	11 度	星	7 度
心	5 度	危	17 度	毕	16 度	张	18 度
尾	18 度	室	16 度	觜	2 度	翼	18 度
箕	11 度	壁	9 度	参	9 度	轸	17 度
总计	75 度	总计	98 度	总计	80 度	总计	112 度

按:周天星度的畸零度多在斗宿末度,即斗宿星度是 26 度 10866 分(1 度=42640 分),表中只列整度。

(2)推日度术。

即推算冬至及天正月朔日夜半时,日所在的天度数。推冬至天度的公式为:

$$\frac{\text{上元至所求年的年数}\times\text{岁分}-n\cdot\text{周天分}}{\text{度法}}=\text{冬至日度}\frac{\text{度分}}{\text{度法}}\quad\cdots\ (11.19)$$

左端可以写为:上元至所求年的年数$\times\frac{\text{岁分}}{\text{度法}}-n\cdot\frac{\text{周天分}}{\text{度法}}$。其中$\frac{\text{岁分}}{\text{度法}}$为 1 个回归年天数,乘以上元到所求年之间的年数,等于这期间所历总天数,由于日每天行 1 度,总天数也是日所行总度数。$\frac{\text{周天分}}{\text{度法}}$为周天度数,乘以 n,照例 n 为待选正整数或零,满足如下条件:0≤上元以来至所求年数×岁分$-n\cdot$周天分<周天分。即从日所行总度数中减去周天度的整数倍后,剩余不足 1 周天的度数,算外就是日所在度。此日为所求年的开端,故知是冬至时日所在度。《律历志》还说要"命度以虚七度(,)[①] 宿次去之,经斗去其分。度不满宿,算外,即所求年天正冬至日所在度及分"。这段话意思是,从以上(11.19)式算得的日度分数

① 此处标点","为笔者所加。

中，依次减去二十八宿各宿的距度数，从虚 7 度减起，一直减到某宿时，所余度分小于该宿距度数为止，所余度分就是冬至日入于该宿的星度数。其间有两点须注意：一是虚宿共 10 度，却从虚 7 度减起，不是从虚初度。这是因为当时实测，知冬至日在虚 7 度。计算历法即自冬至始，天度自然应从虚 7 度起算。二是周天星度有畸零分，在斗宿之末，而上表斗宿只记整度，所以《律历志》特意提醒一句，减二十八宿距度到斗宿时，除了减去整度之外，还要减去零分，即所谓“经斗去其分”。

前面已经算出冬至到月朔的日数，也就是冬至点到朔日之间的天度数，只要从上边(11.19)式算得的结果中去掉此数，所余就是朔日夜半日所在星度分数。像前边一样，也是依次从中减去二十八宿距度数，照例是从虚 7 度减起，减到斗宿除了减整度，还要减去斗分 10866 分(1 度=42640 分)。一直减到某宿所余度分小于该宿距度数，无法再减时，所余度分算外就是朔日夜半入于该宿的度分数。

旧历大月 30 日，小月 29 日。所以由前月朔日夜半，日所在度分求下月朔日夜半日所在度分，大月加 30 度，小月加 29 度即得。同样，由头日求此日，加 1 度则可：

$$\text{头月朔日夜半,日所在度分}+\left\langle\begin{matrix}30(\text{大月})\\29(\text{小月})\end{matrix}\right.=\text{次月朔日夜半日度分}\quad\cdots\cdots(11.20)$$

$$\text{头日夜半日度分}+1=\text{次日夜半日度分}\quad\cdots\cdots(11.21)$$

(3)求朔望加时，日所在度术。

即推算合朔及望时，日所在天度数。由于合朔时日月同度，合朔时的日及分数就是合朔时的日月所在天度数。《律历志》的算法是利用上面算出的朔日夜半时日所在度分，加上(11.18)式算得的定朔小余，即得。但夜半度分的分母是度法，定朔小余分母是日法，通分为度法，须将定朔小余分子、母同乘度法：$\frac{\text{定朔小余}\times\text{度法}}{\text{日法}\times\text{度法}}=\frac{\text{定朔小余}\times 42640}{1144\times\text{度法}}=\frac{\text{定朔小余}\times 410}{\text{度法}\times 11}=\frac{\text{定朔小余}\times\text{章岁}}{\text{度法}\times 11}$。因此《律历志》给出求算公式如下：

$$\frac{\text{朔望定小余}\times\text{章岁}}{11}+\text{朔望夜半度分}=\text{朔望加时日行度分}\quad\cdots\cdots(11.22)$$

其中左端第一项单位为分，第二项及右端中的“度分”并指度和分，单位制 1 度＝42640 分。

《律历志》此段末有小字注：“凡朔加时，日月同度。”所以上式不仅是求朔望时日所在度，也是求朔时月所在度的公式，后面只有求望时月所在度公式了。由“行度分”求“宿度分”，如前法，从虚 7 度依次减诸宿距度即得。

(4)求转分。

就是把上边(11.22)式算得的“度分”值中的“分”，化为前面列出的“月行迟疾表”中的“转分”。两者的区别是分母不同，所以化为转分仍是个通分的问题。已知“度分”之分分母是度法 42640，“转分”分母是 41。因此

$$\frac{\text{“度分”之“分”}}{42640}=\frac{\text{度分之“分”}}{41\times 1040}=\frac{\text{转分}}{41}。$$

《律历志》叙述为：“求转分，以千四十约度分，不尽为小分。”表示为：

$$\frac{\text{度分}}{1040}=\text{转分} \quad\cdots\cdots (11.23)$$

(5)求望加时月所在度。

月行相对于日每个朔望月多行天 1 周，从朔到望为半个朔望月，月比日多行半周天($182\frac{26753}{42640}$度)，欲求望时月所在度分，以日所在度分加此数即得：

$$\text{望加时月行度分}=\text{望加时日行度分}+182\frac{26753}{42640}\text{度}$$

右端两项单位制不同，第一项单位制 1 度＝41 分(分为转分)，把第二项单位制改为第一项单位制：

$$\begin{aligned}\text{望加时月行度分}&=\text{望加时日行度分}+182\frac{26753}{1040\times 41}\\&=\text{望加时日行度分}+182\frac{25\frac{753}{1040}}{41} \quad\cdots\cdots (11.24)\end{aligned}$$

其中 753 为小分，25 为转分，182 为整度。显然，小分满 1040 化为转分 1，转分满 41 化为 1 度。求出月行度分后，化为月所在宿度分的方法照

例是从月行度分中依次减去各宿距度数:从虚 7 度减起,经斗去分。直到所余度分不足某宿距度,不能再减时,所余度分就是入于该宿的度分数。所谓"经斗去分"是指经过斗宿时,除了要减去斗宿整度,还要减去斗分(10860),把斗分化为转分:$\frac{10866}{1040}=10\frac{466}{1040}$。其中 10 为转分,466 为小分。《律历志》不再说"经斗去分",直接说:"经斗去转分十,小分四百六十六。"

(6)求月行迟疾日转定分术。

月行迟疾表中的转分栏所列数据各系当日月实行的平均值,如今欲求一日之中入历日余时的转分数,即所谓"日转定分数",其法为:

$$\begin{cases}\dfrac{\text{夜半入历日余}\times\text{转差}}{\text{周法}}=\text{变差}\\ \text{日转分}\pm\text{变差}=\text{日转定分}\end{cases} \quad \cdots\cdots (11.25)$$

第一式左边可以写为$\frac{\text{夜半入历日余}}{\text{周法}}\times$转差,分数为入历日数中不足 1 日的畸零部分,转差为相邻两日的转分差,本例中指在入历日的畸零部分所在日 1 日之内,转分减少(相对于头一日)或增加的日分数。两者相乘,表示的是在入历畸零部分这段时间内转分的增减数。

第二式是将此增减数与头一日的转分数相加,表示的是日余末了时的日转分数,叫做日转定分。它的意义是日余末了时月行的瞬间速度,若以此速度运行,1 日之内月行度比头日运行度的增减量等于变差。

(7)推朔望夜半月定度术。

基本思路是,本节 5(3)求出了月在合朔时的定度分,本节 5(5)求出了望时月所在的定度分,如今要推算朔望夜半时月所在的定度分,朔望与朔望夜半所差只有朔、望日定小余,把在朔望日定小余时间内的月行度分数算出来,从朔望定度分中减此数即得。《律历志》列出的公式是:

$$\text{朔望加时月所在度分}-\frac{\dfrac{\text{定小余}\times\text{入历日转度分}}{\text{日法}}}{41}=\text{朔望夜半月度分} \quad \cdots\cdots (11.26)$$

由前本节 4(6)知，定小余与本朔望小余一样，分母都是日法。所以，$\frac{\text{定小余}}{\text{日法}}\times$入历日转度分，表示的是在定小余期间的月行分。单位制是 1 度＝41 分，除 41 后就化成了度（余数仍为分）。以朔望加时的月度分减此数，就是朔望夜半时的月度分数了。

求次日夜半月度分，只需在上面求得的朔望夜半月度分中加上次日的月转分即得：

$$\text{朔望夜半月度分}+\text{次日转分}=\text{次日夜半月度分} \quad \cdots\cdots (11.27)$$

如此进行下去，可得逐日夜半的月度分。在用(11.27)计算时要注意的是分"满四十一从度"，由度分依次减诸宿距度，得入宿度分。

二、推五星术

1. 五星参数

《律历志》只给出 10 个参数，每星各 2 个：五星数和终日数（金、水二星各分晨、夕终日）。终日数就是五星一见伏的周期，如木星终日：398 $\frac{37612.4}{42640}$日，表示木星见伏 1 次需 398 日 37612.4 分。余四星同。把终日化为分，即把终日中的整数乘以度法(42640)，加上日分数，便得到了五星数。仍以木星为例，木终日：

$398\,\frac{37612.4}{42640}=\frac{17008332.4}{42640}$，分子 17008332.4 便是木星数，余四星同。把所给参数列如下表：

表 11.4 五星参数表

	五星数	五星终日		
		星终日	晨见伏	夕见伏
木星	17008332.4	398(日分:37612.4)[1]		
火星	33256026	779(日分:39466)		
土星	16121767	378(日分:3847)		
金星	24898417	583(日分:39297)	327(日分:39297)	256(日分:无)
水星	4941098	115(日分:37498)	63(日分:37498)	52(日分:无)

2. 推五星平见伏度分

(1)求星见术。

就是计算在所求年中某星初见的日期。《律历志》公式为:

$$\frac{\text{五星数}-(\text{通实}-m\cdot\text{五星数})}{\text{度法}}=\text{所求年冬至后星晨平见日}\frac{\text{日分}}{\text{度法}} \qquad (11.28)$$

其中"通实"求法见一节 5(2),"置入元至所求年,以岁分乘之,为通实"。m 为待定自然数或 0,条件是满足:$0\leqslant$通实$-m\cdot$五星数$<$五星数。

上式左端可以化简为:$\frac{(m+1)\text{五星数}-\text{通实}}{\text{度法}}$。命 $m+1=n$,得 $\frac{n\cdot\text{五星数}-\text{通实}}{\text{度法}}$。$n$ 也是个待定的自然数或 0,并满足 $0\leqslant n\cdot$五星数$-$通实$<$五星数。

对于金、水二星,一星终日既有晨见也有夕见,求冬至后夕见首日的方法《律历志》说是:从(11.28)式得到的日及日分中,"以夕见伏日去之,得者余为夕平见日及分"。可以图 11.2 说明:其中 O 为冬至点,OC 为(11.28)式算得的自冬至到冬至后星第一次晨见之间的日

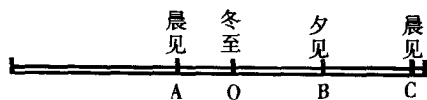



图 11.2 夕平见日、度分计算图

① 日分的分母为度法:42640,木星日分中的小分分母为 10。

及日分数。BC 为夕见伏日及日分数，两者相减得 OB，自然是冬至后首次夕平见的日及日分数。即：

所求年冬至后星晨平见日及日分－夕见伏日及日分

＝星夕平见日及日分 …………………………………………… (11.29)

(2)求平见月日。

上面求得的是冬至后首次平见至冬至之间的天数，这里是进一步推算首次平见发生在某月某日。《律历志》公式是：

冬至去朔日及分＋冬至后五星晨平见日及分－$\sum_{1}^{m} m$ 月日数

＝晨平见在$(m+1)$月中的去朔日及分………………………… (11.30)

式中“冬至去朔日及分”就是(11.3)式算得的“冬至大、小余”。“冬至后五星晨平见日及分”是(11.28)式算得的“所求年冬至后星晨平见日及分”。m 是待定数：从天正一月、二月……直到 m 月。每月日数：大月为 30 日，小月为 29 日，逐月日数相加，一直加到(11.30)式左边的值小于第$(m+1)$月的日数，左边的值就是星晨平见在$(m+1)$目中的“去朔日”。如图 11.3：A 是天正月朔日点，B 是冬至点，C 是冬至后星首次晨平见点，E 是第$(m+1)$月的起点。显然，AB 为冬至去朔日及分，BC 为冬至后五星晨平见日及分，$\sum_{1}^{m} m$ 月日数等于 AE 的长度，(11.30)式左端＝$AB+BC-AE=EC$，EC 表示的是平见点 C 入于第$(m+1)$月中的日数及日分数。

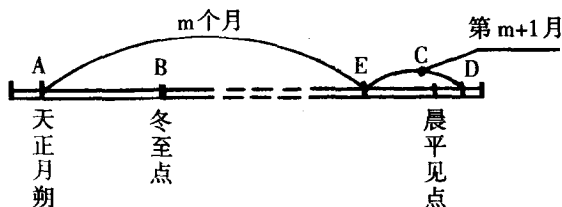



图 11.3 晨见所入月日及分计算图

(3)求后见。

就是求图 11.3 中 C 点以后星再次晨平见到 A 点的日数及分数，只须在 AC 之上加入星一终日及日分数即得。若欲求星再见在某月某日，仍须从天正月日数减起，依次减逐月日数，大月减 30 日，小月减 29

日，一直减到所余不足下月一月的日数。“所余”日就是星再见入于“下月”的日数。由下式表示：

$$冬至去朔日及分+冬至后五星晨平见日及分+五星终日及分-\sum_{1}^{n} n 月日数=五星再次晨平见在第(n+1)月中的去朔日及分。 \quad (11.31)$$

其中 n 为待选月序数，由天正一月、二月……直到第 n 月，n 的大小满足 0≤(11.31)式左端<第($n+1$)月日数；“五星终日及分”就是前述的五星参数表中所列的“五星终日”数。由于金、水二星的“终日”数是由晨见、夕见二部分组成的，可以把“五星终日及分”换为“晨见伏日及分”和“夕见伏日及分”，加“晨见伏日及分”得夕见初见入于第($n+1$)日的日及日分数，再加“夕见伏日及分”得到星再次晨见入于($n+1$)月的日及分。《律历志》说是“加晨得夕，加夕得晨”。由前面的叙述知“加晨得夕”与“加夕得晨”不是并列的，后一句“加夕得晨”需在前一句“加晨得夕”之后才是有效的。即对(11.11)式来说是“加晨得夕”，“加晨、再加夕得夕”。

3. 五星入气加减法

五星见于不同节气，加减一个调整数得定见度分。

(1)木星。

平见在不同节气，调整数不同。《律历志》把二十四节气分作八个时段，分别给出调整公式。

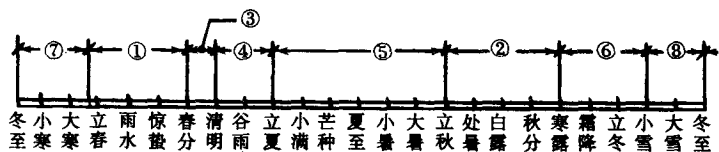



图 11.4　木星入气调整数分段图

分段如图 11.4(编号次序系据《律历志》正文次序，后同)。

逐段调整公式如下：

①“平见在春分前者”(立春到春分段)。

$$\frac{3340\times \text{去大寒后 10 日之日数}+\text{平见分}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \cdots\cdots (11.32)$$

②“立秋后者”(立秋到寒露段)。

$$\frac{4200\times \text{去寒露日数}+\text{平见分}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \cdots\cdots (11.33)$$

③“春分至清明”。

平见日分＋4 日＝调整后日及分 ………………………………… (11.34)

④“后至立夏”(清明到立夏段)。

平见日分＋5 日＝调整后日及分 ………………………………… (11.35)

⑤“以后至芒种”,“均至立秋”。

平见日分＋6 日＝调整后日及分 ………………………………… (11.36)

⑥“小雪前者”(寒露到小雪段)。

$$\frac{\text{平见日分}-7400\times \text{去寒露日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \cdots\cdots (11.37)$$

⑦“冬至后者”(冬至到大寒后 10 日段)。

$$\frac{\text{平见日分}-8300\times \text{去大寒后 10 日之日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \cdots (11.38)$$

⑧“小雪至冬至”。

平见日分－8 日＝调整后日及分 ………………………………… (11.39)

分别计算各段节点的增(减)量,由(11.38)式计算冬至和大寒后 10 日两点增量(△)。

冬至距大寒后 10 日之日数＝40 日,代入(11.38):

$$\frac{\text{平见日分}-332000}{42640}\doteq\text{平见日分}-8\text{ 日},\triangle=-8\text{ 日}。$$

大寒后 10 日增量显然为 0,即△＝0。

再由(11.32)式分别计算大寒后 10 日及春分点的增量:

大寒后 10 日增量仍然为 0,春分距大寒后 10 日共 51 日,代入(11.32)式:

$$\frac{3340\times 5+\text{平见分}}{42640}=\frac{170340+\text{平见分}}{42640}\doteq 4+\text{平见日分}$$

即△＝4 日,用同样的方法依次算出:

清明△＝4 日,立夏△＝5 日,立秋△＝6 日,寒露△＝0 日,小雪△

≐－8 日，冬至△＝－8 日。

由以上节点值给出木星入气增量曲线如图 11.5。

需说明的是在(11.32)式中有"平见分"，以后各式有的称为"见日分"，"见"上皆补"平"字，得"平见日分"，意义仍与"平见分"同。平见分加减调整数所得调整后日分，并非指定见时的星位值，以后同。

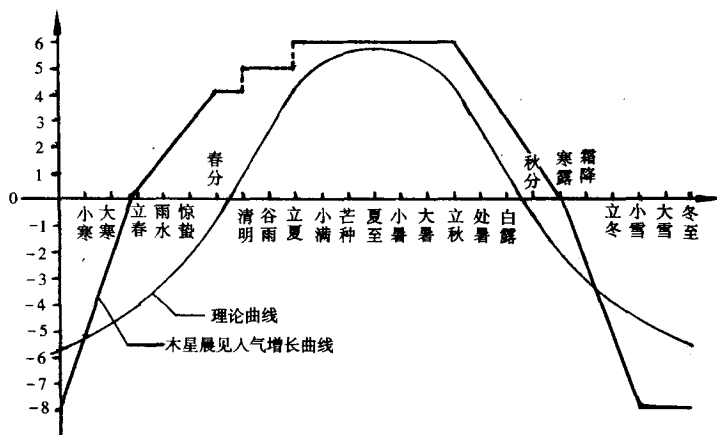



图 11.5　木星晨见入气增长量图

"初见伏去日各十四度"，减加定见日分，得晨夕见定度分。后同，不另述。

以上各段的增长方程都是直线方程，用直线方程描述木星运行增长量的方法称为一次内插法。

(2)火星。

火星入气加减是把二十四气分为七个时段，用六个直线方程描述其中六段晨见日分的增量。时段划分见图 11.6。

六段增量方程为：

①第一段，"平见在雨水前"(大寒到雨水段)。

$$\text{方程：}\frac{26880\times\text{去大寒日数}+\text{平见日分}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}}\cdots\cdots\quad(11.40)$$

设增量为△(以后同)，大寒日：△＝0 日

雨水日：△＝19 日

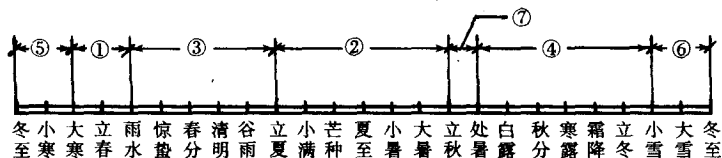



图 11.6 火星入气调整数分段图

②第二段,“在立夏后”(立夏到立秋段)。

$$\text{方程}:\frac{13440\times\text{去立秋日数}+\text{平见日分}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}}\cdots\cdots\quad(11.41)$$

立秋日:△=0 日

立夏日:△=29 日

③第三段,“雨水至立夏”。

方程:平见日分+29 日=调整后日及分 ……………………… (11.42)

雨水日:△=29 日

立夏日:△=29 日

④第四段,“小雪前”(处暑到小雪段)。

$$\text{方程}:\frac{\text{平见日分}-11580\times\text{去处暑日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}}\cdots\cdots\quad(11.43)$$

处暑日:△=0 日

小雪日:△=−25 日

⑤第五段,“冬至后”(冬至到大寒段)。

$$\text{方程}:\frac{\text{平见日分}-34380\times\text{去大寒日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}}\cdots\cdots\quad(11.44)$$

大寒日:△=0 日

冬至日:△=−25 日

⑥第六段,“小雪至冬至”。

方程:平见日分−25=调整后日及分 ………………………… (11.45)

冬至日:△=−25 日

小雪日:△=−25 日

⑦第七段,立秋到处暑,《律历志》中没有涉及。从上面分段图及计算得的立秋、处暑二日增量均为“0”,用一次内插法,方程应是:

平见日分=调整后日及分 ……………………………………… (11.46)

把以上算得的各节点增量值绘成火星晨见入气增量图，如图 11.7。

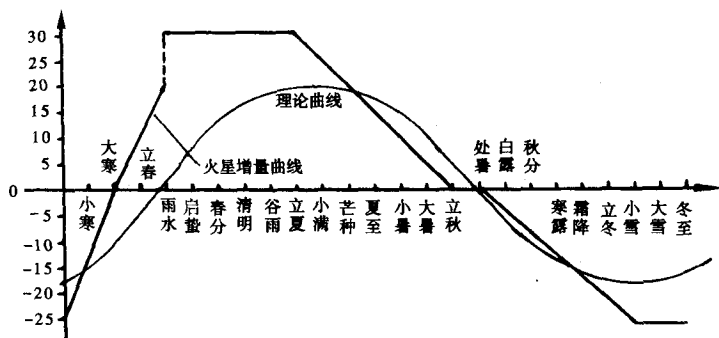



图 11.7 火星晨见日分入气增量图

火星“初见伏去日各十七度”。

(3)土星。

土星入气加减是把二十四气分为十三段，如图 11.8。

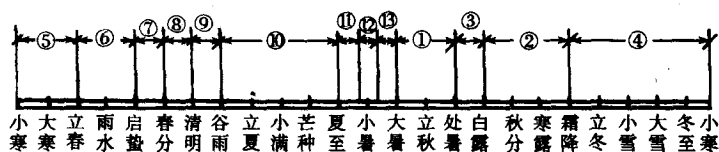



图 11.8 土星入气调整数分段图

各段方程如下：

①“平见在处暑前”(大暑到处暑段)。

$$方程：\frac{12370\times 去大暑日数+平见日分}{度法}=调整后日\frac{分}{度法}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(11.47)$$

大暑日：△=0 日

处暑日：△=9 日

②“白露后”(白露到霜降段)。

$$方程：\frac{8340\times 去霜降日数+平见日分}{度法}=调整后日\frac{分}{度法}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(11.48)$$

白露日：△=9 日

霜降日：△=0 日

③“处暑至白露”。

方程:平见日分＋9 日＝调整后日及分…………………………（11.49）

处暑、白露日:△＝9 日

④“小寒前”（霜降到小寒段）。

方程:$\dfrac{\text{平见日分}-4980\times\text{去霜降日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\dfrac{\text{分}}{\text{度法}}$ ………（11.50）

霜降日:△＝0 日

小寒日:△＝－9 日

⑤“小寒至立春”。

方程:平见日分－9 日＝调整后日及分…………………………（11.51）

小寒、立春日:△＝－9 日

⑥“立春后”（立春到启蛰段）。

方程:平见日分－8 日＝调整后日及分…………………………（11.52）

立春、启蛰日:△＝－8 日

⑦“启蛰后”（启蛰到春分段）。

方程:平见日分－7 日＝调整后日及分…………………………（11.53）

启蛰、春分日:△＝－7 日

⑧春分到清明段。

方程:平见日分－6 日＝调整后日及分…………………………（11.54）

春分、清明日:△＝－6 日

⑨清明到谷雨段。

方程:平见日分－5 日＝调整后日及分…………………………（11.55）

清明、谷雨日:△＝－5 日

⑩谷雨到夏至段。

方程:平见日分 4 日＝调整后日及分 …………………………（11.56）

谷雨、夏至日:△＝－4 日

⑪“夏至后十日去一”（夏至到夏至后 10 日段）。

方程:平见日分－3 日＝调整后日及分…………………………（11.57）

夏至、夏至后 10 日:△＝－3 日

⑫夏至后 10 日到夏至后 20 日段。

方程:平见日分－2 日＝调整后日及分…………………………（11.58）

夏至后 10 日、20 日:△＝－2 日

⑬“至大暑去尽”（夏至后 20 日到大暑）。

方程:平见日分－1日＝调整后日及分…………………………(11.59)

夏至后20日、大暑日:△＝－1日

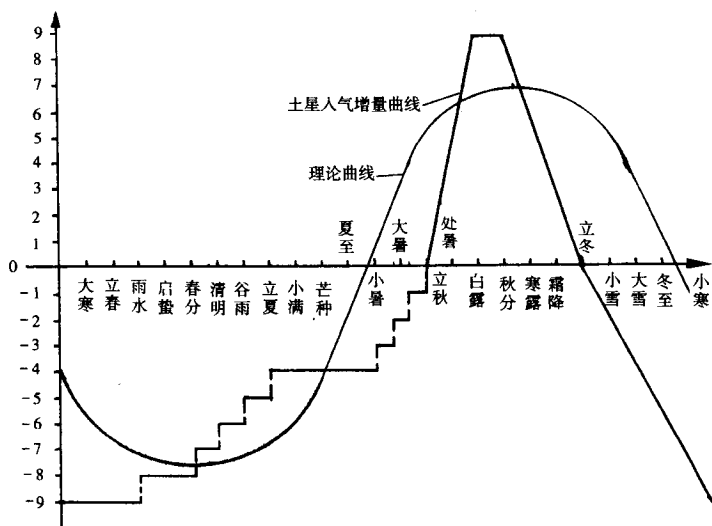



图 11.9 土星晨见入气增量图

接第①段,大暑等于0,故说"至大暑去尽"。

"初见伏去日各十七度",与火星初见伏去日度相同。

(4)金星。

金星入气分晨见、夕见两项。晨见将二十四气分作八段,用六个方程描述其中的六段,另两段增量为零,《律历志》无文字描述。

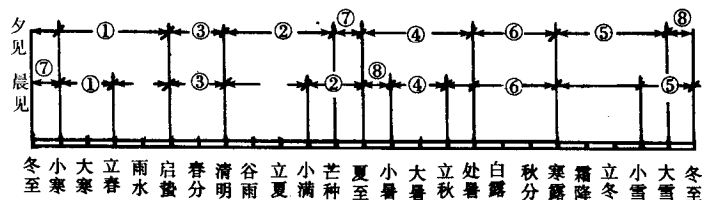



图 11.10 金星入气调整数分段图

夕见也分作八段,其中六段有方程,无方程的二段无增量。如图11.10。

晨见方程为:

①“在立春前者”(小寒到立春段)。

方程：$\frac{4120\times 去小寒日数+平见日分}{度法}=调整后日\frac{分}{度法}$ ……… (11.60)

小寒日：△=0 日

立春日：△=3 日

②“小满后”(小满到夏至段)。

方程：$\frac{4120\times 去夏至日数+平见日分}{度法}=调整后日\frac{分}{度法}$ ……… (11.61)

小满日：△=3 日

夏至日：△=0 日

③“立春至小满”段。

方程：平见日分+3 日=调整后日及分…………………………… (11.62)

立春、小满日：△=3 日

④“立秋前”(小暑到立秋段)。

方程：$\frac{平见日分-4120\times 去小暑日数}{度法}=调整后日\frac{分}{度法}$ ……… (11.63)

小暑日：△=0 日

立秋日：△=−3 日

⑤“小雪后”(小雪到冬至段)。

方程：$\frac{平见日分-4120\times 去冬至日数}{度法}=调整后日\frac{分}{度法}$ ……… (11.64)

小雪日：△=−3 日

冬至日：△=0 日

⑥“立秋至小雪”段。

方程：平见日分−3 日=调整后日及分…………………………… (11.65)

立秋、小雪日：△=−3 日

⑦冬至到小寒段及⑧夏至到小暑段，《律历志》均无文字述及，但冬至、小寒、夏至、小暑四个节点的增量都是 0，可知这两段无增量，方程可写为：

平见日分=调整后日分 ………………………………………… (11.66)

夕见方程为：

①"在启蛰前"(小寒[①] 到启蛰段)。

$$\text{方程:}\frac{\text{平见日分}-6290\times\text{去小寒日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \quad \cdots\cdots\cdots (11.67)$$

小寒日:△=0 日

启蛰日:△=一日

②"清明后"(清明到芒种段)。

$$\text{方程:}\frac{\text{平见日分}-6290\times\text{去芒种日数}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \quad \cdots\cdots\cdots (11.68)$$

清明日:△=-9 日

芒种日:△=0 日

③"启蛰至清明"段。

方程:平见日分-9 日=调整后日及分…………………………… (11.69)

启蛰、清明日:△=-9 日

④"处暑前"(夏至到处暑段)。

$$\text{方程:}\frac{6290\times\text{去夏至日数}+\text{平见日分}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \quad \cdots\cdots\cdots (11.70)$$

夏至日:△=0 日

处暑日:△=9 日

⑤"寒露后"(寒露到大雪段)。

$$\text{方程:}\frac{6290\times\text{去大雪日数}+\text{平见日分}}{\text{度法}}=\text{调整后日}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \quad \cdots\cdots\cdots (11.71)$$

寒露日:△=9 日

大雪日:△=0 日

⑥"处暑至寒露"段。

方程:平见日分+9 日=调整后日及分…………………………… (11.72)

处暑、寒露日:△=-9 日

第⑦段芒种到夏至,第⑧段大雪到小寒,《律历志》无文字述及,因两段四个节点前已算得,都是零,这两段无增量。方程应该是:

平见日分=调整后日分 ……………………………………………… (11.73)

---

① "小寒",《隋书·律历志》中华书局 1987 年版第 446 页作"小雪",误。

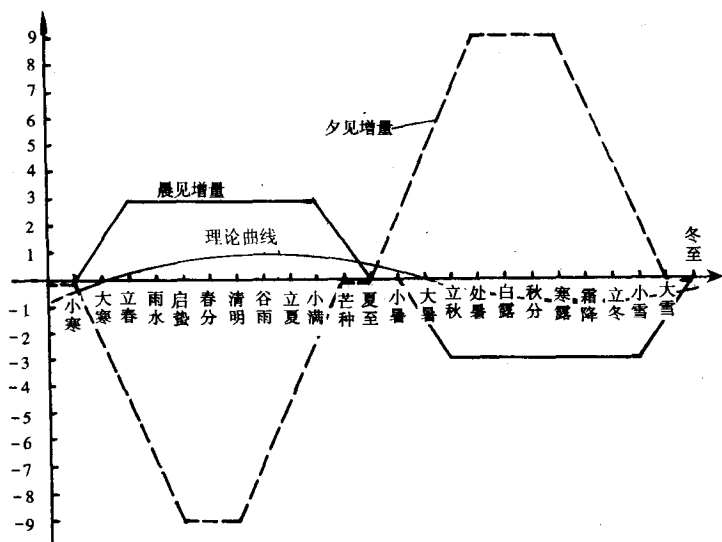



图 11.11　金星入气增量图[①]

金星"初见伏去日各十一度"。

(5)水星。

水星晨夕见于二十四气之中，有三种情形：一是当见不见者，二是晨夕见的时间有增减者，三是无增无减者。

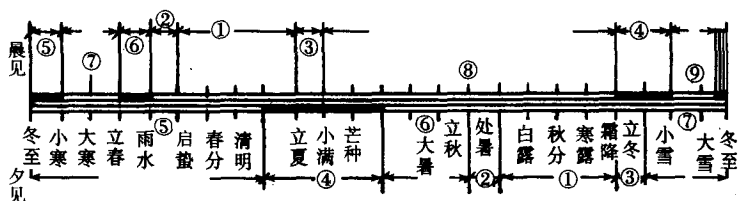



图 11.12　水星入气调整数

图 11.2 是水星晨、夕见二十四气分段图，晨见共分九段，其中六段

① 以上木、火、土、金四星入气增量图中的"理论曲线"系据陈美东《中国古代五星运动不均匀性改正的早期方法》中的插图转绘。该文的大业历五星改正图中的错误，已更正之。陈文载于《自然科学史研究》1990 年第 9 卷第 3 期，第 208～218 页。

《律历志》有描述，⑦、⑧、⑨三段无描述；夕见分作七段，其中四段《律历志》有描述；第⑤、⑥、⑦三段无描述。由前木、火、土、金四星例，凡无描述者都是平见日分＝定见日分，无增无减，水星亦当如此。此外第①段（晨见启蛰到立夏段，夕见处暑到霜降段）应见不见；第②、③段（晨见雨水到启蛰段、立夏到小满段，夕见的立秋到处暑段、霜降到立冬段）去日18°外，36°内，晨有木、火、土、金一星见则见，否则不见。这几段见或不见，都不存在早见或迟见的问题，即都是平见等于定见（或不见）。各段方程如下：

晨见：①、②、③、⑦、⑧、⑨段无增无减。

④"霜降至小雪"段。

方程：平见日分＋1 日＝调整后日及分…………………………（11.74）

霜降、小雪日：△＝1 日

⑤"冬至至小寒"段。

方程：平见日分－4 日＝调整后日及分…………………………（11.75）

冬至、小寒日：△＝－4 日

⑥"立春至雨水"段。

方程：平见日分－3 日＝调整后日及分…………………………（11.76）

立春、雨水日：△＝－3 日

此外，"冬至前"三日方程：

冬至前一日（"一去三"）：平见日分－3 日＝调整后日及分…………（11.77）

△＝－3 日

冬至前二日（"二去二"）：平见日分－2 日＝调整后日及分…………（11.78）

△＝－2 日

冬至前三日（"三去一"）：平见日分－1 日＝调整后日及分…………（11.79）

△＝－1 日

夕见：①、②、③、⑤、⑥、⑦段无增无减。

④"从谷雨至夏至"段。

方程：平见日分－2 日＝调整后日及分…………………………（11.80）

谷雨、夏至日：△＝－2 日

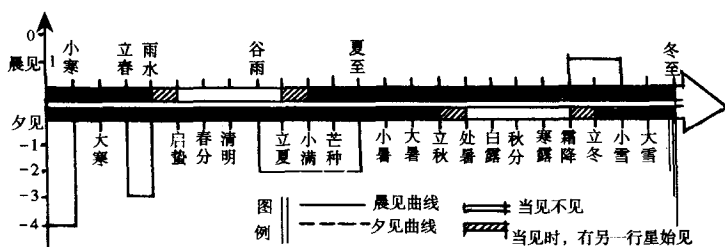



图 11.13 水星晨夕见入气增量图

水星“初见伏去日各十七度”。

4. 行五星法

就是计算五星行度的方法。

（1）五星初见度分计算法：《律历志》的公式是：

$$\text{星定见前夜半，日所在宿度}+\frac{\text{星初见到夜半，日所行分}+\text{星定见日分}}{\text{度法}}$$

$$\pm\text{星初见去日度分}=\text{星初见所在度}\frac{\text{分}}{\text{度法}} \cdots\cdots \quad (11.81)$$

星初见分为晨见或夕见（不一定指金、水二星的晨、夕见。余三星初见若在子时后，黎明前出现也算晨见，子时前、黄昏后出现也算做夕见），以晨见为例，求晨见时星所在宿度，可以分解为以下三项天度数：第一，夜半时，日所在宿度和分；第二，从夜半到晨（星见时），日又行了多少分〔由于日每天行1度，夜半到晨（或夕）所行，只有分而无度〕；第三，晨时星初见距日度数和分数（如图11.14）。显然，这三项度分之和

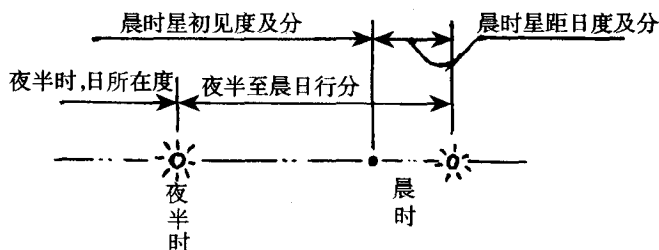



图 11.14 三分星度图

就是星初见时的天度数。不过，由于晨时星在日后，星的天度数小于日所在天度，星度数等于日度数（前两项和）减去日星度；夕见时，星在日前（如图 11.15）星度等于日度加日星度，这就是《律历志》说的“晨减夕加”的道理。

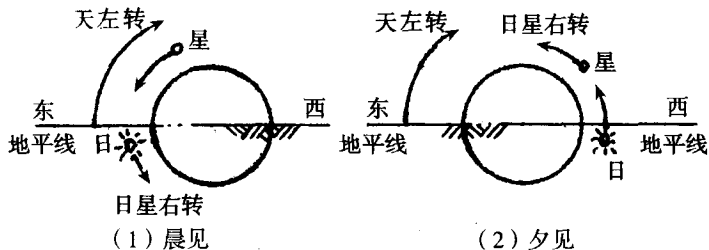



图 11.15　晨昏日星相对位置图

星初见前夜半日所在分的分母是度法，与星定见日分的分母相同，(11.81)式将二者合为一项。

(2)求次日。就是计算星见翌日，星所在宿度及分。(11.81)式已算得星初见时的所在宿度及分，欲求第二日宿度及分，加上星 1 日所行度分即得。每星 1 日行分是给定数（见本节 5）。《律历志》以下是叙述如何加，说是“有小分者，各日数为母，小分满其母去从分，分满度法从度”。讲的是单位制，分以下的小分是由星若干日内的总分数，除以日数得到的。所以，小分的分母是日数，分的分母才是度法。例如：后文讲某星“若干日行若干度若干分”，每日行分是$\frac{\text{行度、行分数}}{\text{日数}}=\text{分}\frac{\text{小分}}{\text{日数}}$，分的单位制是 1 度＝度法分，小分的单位制是 1 分＝日数・小分，即小分以日数为分母。

接着有小字注文说：“其行有益疾迟者，副置一日行分，各以其分疾迟损益减加之。”[①] “其行有益疾迟者”，意思是每日行分有“益疾、益迟”者，每日递增若干分为“益疾”，递减若干分为“益迟”。遇有这种情况时，

① 原文是“各以其分疾迟损乃加之”，“校勘记”改为“各以其分疾益迟损之”。于意虽通，更改原文较多。此处改为“各以其分疾迟损益减加之”。

求逐日行分的方法是“副置一日行分”，即先列出第一日行分，而后按“疾迟”数逐日“损益减加”之。自然是“疾”者“益”之，“加”之；迟者“损”之，“减”之。

原文又说：“留者因前，退则减之，伏不注度。顺行出斗去其分，退行入斗先加分。”这段文字以前的历法也出现过，是讲计算星行度分时遵守的原则。星行不但有迟疾，还有退留，逢“留”时，星行积度分数不变，仍保留原数（“留者因前”）；逢“退”时，星行积度分不但不增加，还要减少。（“退则减之”）。对于星伏不见的情形，原文不注出星伏行度分（叫做“伏不注度”），只注星见时的行度分。由积度分递减诸宿距度求星所在宿度，过斗宿（“出斗”）时，除了减去整度，还要除去斗宿所含零分（即“斗分”＝10866分。这叫做“顺行出斗去其分”）。如果是退行进入斗中，星行积度要先加上斗分数，而后再加所过的斗宿整度（“退行入斗先加分”）。

在上述文字后，又有小字注文说：“讫，皆以千四十约分，为大分，以四十一为母。”意思是，按上述原则算出星行分后（“讫”），都要用1040约分，得到大分，大分的分母是41。即：

$$\frac{\frac{\text{星行分}}{1040}}{41}=\frac{\text{大分}}{41} \qquad (11.82)$$

这个方程的左端可以写成$\frac{\text{星行分}}{1040\times 41}=\frac{\text{星行分}}{\text{度法}}$。星行分的单位制本来就是1度＝度法分。如今把度法分为1040×41，是为了与大业历其余诸表中的“转分”等参数的单位制一致。

5. 五星一终运行情形明细

(1)木星初见。

顺行	初日行10618分	日益迟60分	历114日	行度19度13832分
留			历26日	
退行	日行6101分		历84日	行度－12度804分
留			25日37612分小分4	
顺行	初日行3837分	日益疾60分	历114日	行度19度13718分
伏行				

总 363 日 37612 分小分 4　行 26 度 26746 分

按:木星运行,第一日行 10618 分,此后每日行分递减 60 分,共行 114 日,求总行分,这是一个求等差级数前 n 项和的纯数学问题,运算公式为:$S_n=a_1n-\frac{n(n-1)\cdot d}{2}$。其中 S_n 为前 n 项和,a_1 为第一项,n 为项数,d 为公差。

末行顺行 114 日,第一日行 3837 分,以后每日递增 60 分,总行分也是一个求等差级数前 n 项和的问题,不同的是前者是递减级数,此为递增级数,所用公式是:$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)d}{2}$。

(2)土星初见。

顺行	日行 3814 分	历 83 日	行度 7 度 18082 分
留		历 38 日	
退行	日行 2563 分	历 100 日	行度 6 度 460 分
留		历 37 日 3847 分	
顺行	日行 3813 分	历 83 日	行度 7 度 17999 分
伏行			

总 341 日 3847 分　行 8 度 35621 分

(3)火星。

火星运行比较奇特,是由于火星一终 779 日余,在两个回归年以上。由本节 3(2)中的火星入气增量图可见,在一个回归年中,火星平见时间的改正值由正值入负值,及由负值入正值各有一次,即各有一个近日点(由负值入正值时,改正值为零的点)和一个远日点(由正值入负值时,改正值为零的点)。火星一终的近日点和远日点各有二个,称前一对近日点、远日点间的运行为"前疾",后一对近日、远日点间的运行为"后疾"。无论前疾或后疾,火星日速都因初见距冬至日的时距不同而异。前疾日速与距冬至时距的关系如下表。

表 11.5　火星前疾段日速与距冬至时距关系表

损益(日度各一)	冬至初	241 日	行 163 度
二日损一	尽 128 日	177 日	行 99 度(尽 161 日同)
三日损一	尽 182 日	170 日	行 92 度(尽 188 日同)
三日益一	尽 227 日	183 日	行 105 度
二日益一	尽 249 日	194 日	行 116 度
一日益一	尽 310 日	255 日	行 177 度(尽 337 日同)
二日损一	尽 365 日	复 241 日	行 163 度

此表第一栏为“损益”数，后注“日度各一”。意思是：损益的日数和度数相同，各自是一(或二、三……)。第一行的二、三、四栏连接起来，按《旧唐书·律历志》记述的《戊寅历》可以读为：“初见，入冬至，初率二百四十一日行一百六十三度。”意思是火星初见若在冬至日，平行速度是 241 日行 163 度，即每日行$\frac{163}{241}$度。

如此第二行各栏数据可以这样理解：初见若在冬至后，每 2 日损 1 日、1 度。例如：在冬至后 2 日，平行速是 240 日行 162 度；在冬至后 4 日，平行速是 239 日行 161 度；在冬至后 6 日，平行速是 238 日行 160 度等等。直到尽冬至后 128 日，日、度各减 64 日，平行速变成了 177 日行 99 度(241－64＝177 日，163－64＝99 度)。

第三行是自冬至后 129 日到 182 日的情形，其间共 54 日，按照第一栏中“三日损一”的说法，当损 18 日(度)，但是从第三、四栏中的数值可知，只损了 7 日(度)。这是由于在第二行四栏“99 度”后有注说“尽 161 日同”。意思是说，自 128 日之后，并没有转入“三日损一”的状态，而是把第二行的平行速(177 日行 99 度)一直保持到第 161 日。自冬至后第 162 日才转入“三日损一”的运行状态，到第 182 日，历 21 日，损日(度)恰为 7。

第四、五、六行读法与以上同。最后一行可以这样理解：由第六行中的数据知：距冬至 337 日行速是 255 日行 177 度。此后每 2 日损 1 日(度)，直到第 365 日，历 28 日，减 14 日(度)，平行速重又恢复到冬至时的 241 日行 163 度(255－14＝241 日，177－14＝163 度)。

表中说“初见”在冬至，或在冬至后“尽××日”，“初见”是指“定见”，不是“平见”。由此知，此表是对于火星初次定见时平行速度的调整，它因定见距冬至远近而不同。但这只是第一次调整，第二次调整是用文字叙述的形式表达的：

“见在雨水前，以见去小寒日数；小满后，以去大暑日数。三约之，所得减日为定日。雨水至小满，均去二十日为定日。已前皆前疾日数及度数”，由前疾日数及度数化为平见一日分数，方法见于上引正文之下的小字注：“各计冬至后日数，依损益之，为定日数及度数。以度法乘定度，如定日得一，即平行一日分，不尽为小分。”

正文中所谓“三约之，所得减日为定日”，“减日”之日是指由表11.5算得的第三栏日数之“日”，而“定日”是指经第二次调整后的距冬至日数。若把由表11.5得到的第三栏日数叫做“日数”，第四栏度数叫做“度数”，以上算法可以表示为：

$$\frac{\text{度数}\times\text{度法}}{\text{日数}-\begin{cases}(\text{见在雨水前}):\dfrac{\text{见去小寒日数}}{3}\\(\text{见在小满后}):\dfrac{\text{见去大暑日数}}{3}\\(\text{见在雨水至小满之间}):20\end{cases}}=\text{平行 1 日分}\frac{\text{小分}}{\text{定日}} \quad \cdots\cdots (11.83)$$

其中右端分母“定日”与左端分母相等，即：

$$\text{定日}=\begin{cases}(\text{见在雨水前}):\dfrac{\text{见去小寒日数}}{3}\\(\text{见在小满后}):\dfrac{\text{见去大暑日数}}{3}\\(\text{见在雨水至小满之间}):20\end{cases}$$

第二次调整绘为图11.16。

见后火星运行的情形，《律历志》说是：“大寒至立秋差行，余平行。”是说见在大寒到立秋之间者，做匀减速运动；见在其他节气内者，做匀速运动。《律历志》进一步解释说：平行的情形分三种：一种是见在处暑

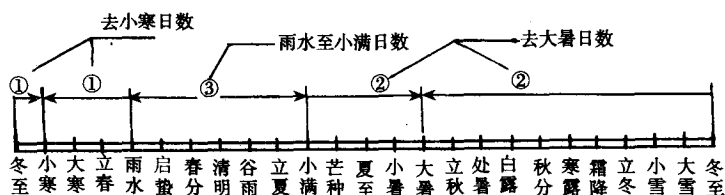



图 11.16 火星入气第二次整数

到白露间，“皆去定度六”①。就是对于这种情形，先由表 11.5 和(11.83)式求星行日数和度数，再从度数中减 6 度得定度。另一种是见在白露到寒露者，速度是“日行半度，四十日行二十度”。既然讲了日行半度，为何还要说“四十日行二十度”？理由只能是四十日后，日速发生了变化，就是《律历志》说的“余日及余度续同前”。余日、余度自然指四十日以后的行日和行度，“同前”呢？不会指与“日行半度”同，否则无须再说“四十日行二十度”，一直走下去是了。也不会指与“减定度六”同，否则无须讲“处暑至白露”，讲完“白露至寒露”后，只说“余减定度六”就可以了。因此，同前只能是指“减定度六”之前的术文，即指与用(11.83)式计算的日数和度数同。

余日、余度还包括另一层含意。前面曾说，平行的情形包括星见在大寒到立秋之外的所有节气之内，具体说，凡星见在立秋以后直到次年大寒之前都属平行范畴。除了前面说的“处暑至白露”以及“白露至寒露”二种情形之外，还有见在立秋到处暑、寒露到次年大寒之间者，算是平行的第三种情形。它们运行的日数和度数的计算法也应包含在“余日及余度续同前”的范围之内。

平行的日数和度数确定后，怎样计算日行分呢？“续同前”三字后有一段小字注：“置日数减一，以三十乘之，加平行 1 日分，为初日分。”列成算式是：

(日数－1)×30＋平行 1 日分＝初日分 ……………………… (11.84)

① 原文是“皆去定皆度六日”，“校勘记”改为“皆去定日，定度六”。参诸同页第四行有“前疾去度六者”，又皇极历是“减五度”，都无日、度同减的话，因改为“皆去定度六”。

其中“日数”指(11.83)式中的定日,是经过二次调整以后的“去冬至日数”;“平行1日分”是按(11.83)式算得的结果,不过对于见在处暑到白露的情形计算所用的“度数”比(11.83)式中的“度数”减少了6度。(11.84)式右端所得“初日分”,其实就是所求的见在该时段上的“平行1日分”,平行的“初日分”就是“平行1日分”,这很容易理解。但是,把它称为“初日分”而不称为“平行1日分”的理由是为了与等式左端的“平行一日分”相区别,左端的平行1日分是按(11.83)式的运算结果,而火星初见后的平行速度应该与(11.84)式的计算相同。因此,可以说(11.84)式是对火星运行日数和度数进行的第三次调整。

《律历志》解释差行说:“差行者,日益迟六十分,各尽其日度而迟。初日行二万六百分,日益迟百分,六十日行二十四度三万五千六百四十分。”以上讲的是二段迟行,第一段自初见时日速,每日递减60分,直到日速减至20600分;第二段自日速20600分,每日减100分,行了60日,行度是24度35640分。

第一段,比如初见在大寒,距冬至30日,由表11.5查得日度是226日行148度。又因大寒距小寒15日,由(11.83)式算得平行1日分是:$\frac{148\times42640}{221}=28555$分。自28555分/日,每日减60分,约133日减至日速20600分,其间星行:

$$S_1=28555\times133-\frac{133\times132\times60}{2}=3271135\text{分}\doteq76.7\text{度}$$

第二段日减100分,60日行度为:

$$S_2=20600\times60-\frac{60\times59\times100}{2}=1059000\text{分}=24\frac{35640}{42600}\text{度}$$

就是原文说的“六十日行二十四度三万五千六百四十分”。

第二段下有小字注说:“其前疾去度六者,此迟初日加四千二百六十四分,六十日行三十度,分同。”前面讲“平行”部分时说过。初见在处暑到白露间者,须从算得的度数中减去6度。此处说,凡在彼处减了6度的,此处初日速都要加4264分(即20600+4264=24864分)。行度变为:

$$S_2{}'=24864\times60-\frac{60\times59\times100}{2}=1314840\text{分}=30\frac{35640}{42640}\text{度}$$

此后留 13 日，退行，再留，改顺迟行，如下：

迟行　　日迟 60 分

益迟行　初日行 20600 分 日益迟 100 分 行 60 日 行度 24 度 35640 分

　　(或)初日行 24864 分 日益迟 100 分 行 60 日 行度 30 度 35640 分

留　　13 日

　　(或)23 日

退行　日行 12082 分　　行 60 日 行度－17 度 40 分

留　　12 日 39466 分

　　(或)22 日 39466 分

顺迟行　初日行 14700 分 日益疾 100 分 行 60 日 行度 24 度 35640 分

(自“益迟行”段以下)总 205 日 39466 分　行 32 度 28600 分

或者 225 日 39466 分　行 37 度 28600 分

以上两个留行段在“或”字后每增 10 日，是由于第一次留行下有小字注文说：“前去日者，分、日于二留，奇从后留。”其中“分、日于二留”不通，是错点。应去掉中间顿号，连读为“分日于二留”。意思是：前面曾经说过，凡是在雨水到小满之间者，宜从求得的日数中减去 20 日得定日。此处说，对于这种情形，应把所减 20 日平均增加到 2 次留行的日数中去，留 13 日者变为留 23 日，留 12 日 39466 分者变为留 22 日 39466 分。“奇从后留”是说有零散分者归入第二次留行之中。

末段“须迟行”后的小字注说：“此迟在立秋至秋分加一日，行分四千二百六十四，六十日行四十度，分同前。”这是一段匀加速运动，由所给条件，行度计算法是：

$$S_3=14700\text{分}\times60\text{日}+\frac{60\times59\times100}{2}=1059000\text{分}=24\frac{25640}{42640}\text{度}$$

其中注文说“加一日，行分四千二百六十四”，也不通，是错点。应去掉中间逗号，意思是“一日行分”增加 4264 分，由 14700 度变成了 18964 分，60 日行度变成了：

$$S'_3=18964\times60+\frac{60\times59\times100}{2}=1314840\text{分}=30\frac{35640}{42640}\text{度}$$

由此知注文所说“六十日行四十度，分同前”，其中“四”是“三”字的误文。

如此，火星在前疾阶段的运行情况可以这样描述：火星的运行随着它初见时距离冬至的远近而不同，大体分为两类：平行和差行。初见在大寒到立秋之间者都是差行，在其余时段出现的都是平行。对于平行者重要的是算出它们的“初日分”（也就是平均日速），根据算法不同，大致分作三种：一般是由表 11.5 算出日数和度数，再由（11.83）式算出平行 1 日分，最后再由（11.84）式算出初日分。当初见在处暑到白露间时，要从表 11.5 算出的度数中减去 6 度，再由（11.83）式算出的平行 1 日分比起一般平行的情况要小一些，初日分也会小一些，这是第二种情形。第三种是初见在白露到寒露之间者，要先做 40 日每天只行半度的平行运动，然后才能转为前述的一般平行运动。差行者没有这许多变化，大体都分作日减 60 分、100 分，留、退、再留、顺迟行共六段，完成这六段运行后就进入了后疾阶段。

后疾阶段的第一次调整见表 11.6。

表 11.6　火星后疾段日度表

损益	冬至初	214 日	行 136 度
一日损一	尽 37 日	177 日	行 99 度
二日损一	尽 57 日	167 日	行 89 度（尽 79 日同）
三日益一	尽 130 日	184 日	行 106 度
二日益一	尽 144 日	191 日	行 113 度
一日益一	尽 190 日	237 日	行 159 度
一日益二	尽 200 日	257 日	行 179 度
一日益一	尽 210 日	267 日	行 189 度（尽 259 日同）
二日损一	尽 365 日	214 日	行 136 度

表中所列是据“校勘记”改正以后的数据。意义与表 11.5 相同，不另释。

第二次调整《律历志》只说了一句话：“后迟加六度者，此后疾去度为定度。”此外全部按表 11.6 计算。所谓“后迟加六度者”指的是前疾段差行中“日益迟一百分”的那一段，前边曾说此段有加六度和不加六度

之别。若曾加六度，在后疾段要减去六度作为后疾段的定度数。

后疾段没有第三次调整，只有两个特例：后疾始于立夏到小暑者，日行半度，平速运行60日，行了30度之后，转而按表11.6中的日度数运行；后疾若始于小暑到立秋之间，也是日行半度，经40日，行了20度之后，也转而按表11.6列出的日度数运行。除了这两段特例，其他后疾段的运行都按表11.6中的数据进行。这在前疾段有一句话："余日及余度续同前。"后疾段有一句类似的话："计余日及度，从前法。"

须特别说明的是后疾段只有平行，没有差行，《律历志》说是"前法皆平行"。平行到"尽其日度"转为伏行。

(4)金星。

金星运行分作晨见和夕见二部分，《律历志》以大字粗略记述了晨、夕见的运行情况，细致观测数则用小字注出。下面先把大字记述的内容揭出，注文在序数[1]、[2]等之后，逐一解释。

金星运行过程：

晨初见，退行	每日行半度	经10日	行一5度
留		9日	
顺行(迟、差行)	每日速度增500分	经40日	行30度[1]
平行	每日行1度	经15日	行15度[2]
疾行		经170日	行204度[3]
晨伏东方			
+)			
		晨见总经244日	行244度

夕初见，顺行疾		经170日	行204度[4]
平行	每日行1度	经15日	行15度[5]
顺迟、差行	每日行速增500分	经40日	行30度[6]
留		经9日	
退行	每日行半度	经10日	行一5度
夕伏西方			
+)			
		夕见总经244日	行244度

小字注文的解释：

[1]是对这段“顺迟差行”的注释，分作两部分：一是说“四十日行三十度”不尽如此，随星见所在节气的不同而不同，大致情形如下图：

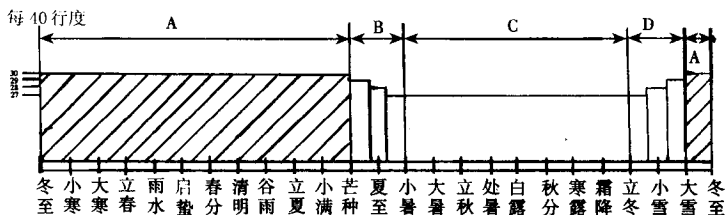



图 11.17　金星四十日行度数

初见在区域 A 内，40 日行 30 度，无增无减。在区域 B 之内，随去芒种日数不同而不同，每 10 日减 1 度。如见在芒种后 10 日，40 日行 29 度；见在芒种后 20 日，40 日行 28 度等。在区域 C 之内，40 日行 27 度。在区域 D 内，随去大雪日数，10 日减 1 度。如见在大雪前 10 日，40 日行 29 度；见在大雪前 20 日，40 日行 28 度等。

二是计算初见日速的方法，给定的计算式是：“以三十乘度法(42640)，四十得一为平分。又以三十九乘二百五十，以减平分为初日行分。”意思是：

$$\text{初日行分}=\frac{30\times42640}{40}-39\times250^{①} \quad \cdots\cdots \quad (11.85)$$

计算得：　　$31980-9750=22230$(分/日)

已知初日行分 $a_1=22230$，每日速度增加 500 分，即 $d=500$，40 日(即 $n=40$)行度便能按求等差级数前 n 项和的公式 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$ 算出：

$$S_n=22230\times40+\frac{40\times39}{2}\times500=1279200\text{ 分}=30\text{ 度}$$

与正文所给数值相符。迟行在 B、C、D 区域内，初日行分当微有不同。

---

① 此初日行分的算式可由求等差级数前 n 项和的公式 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$ 导出，参见本节 5(4)[6]。

[2]是对平行运动持续时间，在二十四节气中变化情形的说明。如图 11.18：

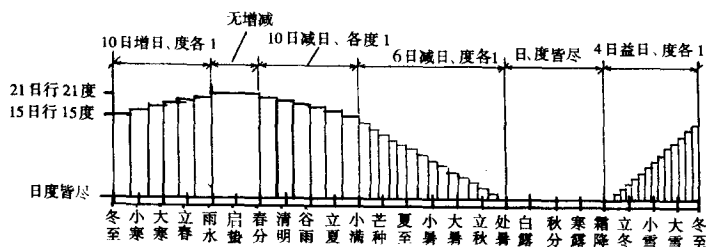



图 11.18　金星平行运动时间图

雨水节前的变化，原文说是："小寒后十日，益日度各一，至雨水二十一日，行二十一度。"

小寒至雨水 45 日余，每 10 日增日、度各 1，共增 4.5 日、度。自 15 日行 15 度，到雨水不足"二十一日行二十一度"。因知"小寒"为"冬至"之误。标点亦不妥，正确点法是："冬至后，十日益日、度各一，至雨水，二十一日行二十一度。"

小满以前段的变化，原文说是："均至春分，后十日减一，至小满，复十五日行十五度。"

"均至春分"，是指自雨水后均为 21 日行 21 度无丝毫变化，直到春分。"后"字前原无标点，"，"系据文意增。春分至小满约 61 日，每 10 日减日、度各 1，共减 6 日、6 度。春分时既是 21 日行 21 度，至小满恰为 15 日行 15 度。

小满到处暑间的变化，原文说是："其后六日减一，至处暑，日及度皆尽。"

小满到处暑约 91 日，每 6 日减日、度各 1，共减 15 日、15 度。小满时为 15 日行 15 度，到处暑适巧减尽，日、度为 0。就是所谓"日及度皆尽"，此段平行不复存在。

处暑到冬至间的变化，原文说是："(处暑日、度皆尽)，至霜降后，四日益一，至(冬至)复十五日行十五度。"

平行出现于处暑到霜降之间，日度为 0，无日无度。出现于霜降之后，每 4 日增日、度各 1，霜降至冬至约 61 日，共增 15 日、15 度。霜降日

为 0 日行 0 度，到冬至恰为 15 日行 15 度。

[3]是对疾行 170 日的说明。也分二部分：一是对此段行度的说明，原文为“前顺迟减度者，计减数益此度为定度”。“前顺迟”段原说是 40 日行 30 度，由于见在不同时期行度数会有所增减(见图 11.17)，减数最多可达 3 日，如见在小暑到立冬之间，40 日便不是行 30 度，只行了 27 度。到本段疾行时，凡在前顺迟行段减去的日数要增入本段。如疾行原是“百七十日行二百四度”，若前顺迟行见在小暑到立冬之间，疾行便是 170 日行 207 度。同样，前顺迟行减 2 度，疾行段便增 2 度；前顺迟行减 1 度，疾行段增 1 度；前顺迟段无增减，疾行段也不增不减。疾行增减后的度数为定度，那么：

$$\text{定度}=204+\text{前顺迟行段所减度} \quad\cdots\cdots (11.86)$$

小字注的第二部分内容是由定度求这段疾行的每 1 日行度分，方法是：“以百七十日日一度以减定度，余乘度法，(加)〔如〕百七十得一，为一日平行度分。”圆括号内的文字是原文所有，方括号内的文字是校勘者改定的文字。改定后的计算式是：

$$1\text{日平行度分}=\frac{(\text{定度}-170\text{日}\times 1\text{度}/\text{日})\times\text{度法}}{170\text{日}} \quad\cdots\cdots (11.87)$$

显然，这个计算式是错的，右端所得是平行 1 日的增分，不是 1 日平行度分。欲求 1 日平行分，须在所得 1 日平行增分中加度法分。原文中有个“加”字，恐非空穴来风，正确的改正法是移到“得一”之后，再补度法二字，算式为：

$$1\text{日平行度分}=\frac{(\text{定度}-170\times 1\text{度}/\text{分})\times\text{度法}}{170\text{日}}+\text{度法}。 \quad\cdots\cdots (11.88)$$

改正后的注文是：“以百七十日日一度以减定度，余乘度法，如百七十得一。加度法，为一日平行度分。”如此才觉圆满。

[4]自此以下是对夕见运行情形的解释，此段所释是 170 日的顺疾行。原文是：“夏至前，以见去小满日数，六日加一度；小暑后，以去立秋日数，六日加一度；夏至至小暑均加五度，为定度。白露至清明，差行，先疾，日益迟百分；清明至白露平行。求一日平行同晨疾；求差行，以五十乘百六十九，加之，为初日行度分。”

中华书局 1987 年版《隋书·律历志》的此段文字标点，多处不妥，

已改如上,不复赘言。明显的错误是“求一日平行同晨疾”句,意思是平行日速的计算方法,与晨见疾行170日段的计算法相同,都是日行51168分,见本节5(4)[3]。中华书局1987年版在“同”字下加“,”号,把“晨疾”二字入下句,如此原文便无法解释。全段的意思如图11.19:

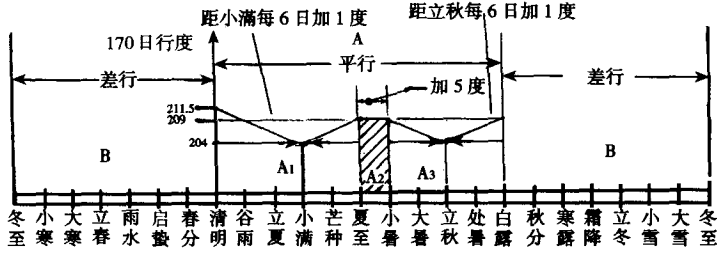



图11.19　夕见170调整数

此段夕见的运行分作二类,见在A区为平行,见在B区为差行。A区同是平行,又分作三等,仿照晨疾段的计算方法〔见(11.87)式〕,可以算得各自的日行分:

$$\text{见在}A_1\text{区,}\quad \text{平见一日分}=\frac{204\text{度}+\frac{\text{见去小满日数}}{6}}{170\text{日}} \cdots\cdots\cdots\cdots (11.89)$$

$$\text{见在}A_2\text{区,}\quad \text{平见一日分}=\frac{204\text{度}+5\text{度}}{170\text{日}}=\frac{209\text{度}}{170\text{日}} \cdots\cdots\cdots\cdots (11.90)$$

$$\text{见在}A_3\text{区,}\quad \text{平见一日分}=\frac{204\text{度}+\frac{\text{见去立秋日数}}{6}}{170\text{日}} \cdots\cdots\cdots\cdots (11.91)$$

各自按算得的平见1日分运行170日,行度自然不都是204度,而是小有异同,最多差至7.5度。所谓“百七十日行二百四度”,言其大概而已。

发生在B区的差行则不同,都是“百七十日行二百四度”,没有例外。

差行的初速求法是:

$$\text{平行日速}+50\times169=51168+8450=59618\text{分/日} \cdots\cdots\cdots\cdots (11.92)$$

按文中所述:差行日速递减100分(“日益迟百分”),170日所行恰为

204 度（公式 $S_n=a_1n-\frac{n(n-1)}{2}d$，其中 $a_1=59618, n=170, d=100, S_n$ 为 170 日的总行度，代入即得 $S_n=8698560$ 分$=204$ 度）。

[5]夕见平行 15 日的变化如图 11.20：

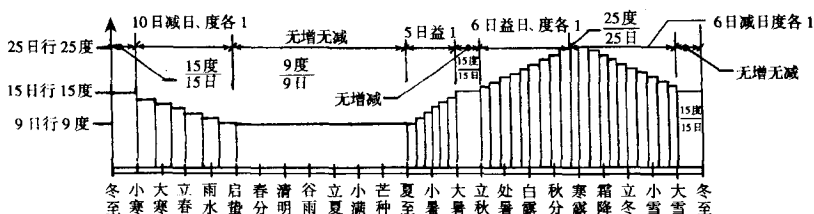



图 11.20　夕见平行 15 日入气调整数

原文说是："冬至后十日减日度各一，至启蛰九日行九度。均至夏至后五日益一，至大暑复十五日行十五度。均至立秋后六日益一，至寒露二十五日行二十五度。后六日减一，至大雪复十五日行十五度，均至冬至。"

由末两句知冬至时十五日行十五度。而首句说"冬至后十日减日、度各一"，冬至到启蛰约 76 日，日、度减约 8，启蛰时就不可能是 9 日行 9 度。由此知"冬至"是"小寒"二字的误文。改成"小寒"后，冬至到小寒之间运行情形如何，成了空档，必有脱漏。因此，首句应为"冬至均至小寒后十日，减日度各一"。余不复释。

[6]此段小字注是："前加度者，此依数减之。求初日行分，如晨迟，唯减者为加之。"中华书局 1987 年版《隋书·律历志》于"依数减之"后加逗号，"求初日行分"后加句号，几不可读，改正之。

此段注文第一层意思是：由于夕见总数是 244 日行 244 度，平均每日行 1 度。在此段顺迟行之前有"加度者"，在此段"顺迟行"中应"依数减之"。查夕见顺迟行之前"加度者"只有第一段"顺疾行"170 日行 204 度，多行了 34 度。顺迟行后留 9 日少行 9 度，退行 10 日少行了 15 度，总起来尚多出 10 度，因此，顺迟段"依数减之"应当减 10 度，这才有"40 日行 30 度"的数据。

注文第二层意思是求初日行分，求法"如晨迟"，就是与晨见中"顺

迟行”段求初日行分的方法相同。所不同的是“唯减者为加之”。由(11.85)式，晨迟段初日行分的计算公式是：

$$初日行分=\frac{30\times 42640}{40}-39\times 250$$

把“减者为加之”，就成了：

$$初日行分=\frac{30\times 42640}{40}+39\times 250 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11.93)$$

减或加，含意有什么不同呢？本节5(4)[1]中说，初日行分的计算公式是由求等差级数前 n 项和的公式导出的。求和公式为：$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$，其中 S_n 为前 n 项和，a_1 为首项，n 为项数，d 为公差。对于递增级数，d 为正值；递减级数，d 为负值。代入上式，成了 $S_n=a_1n-\frac{n(n-1)}{2}d$。晨见顺迟行的日速每日递增500分，是递增级数，用前式 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$。求初日速，就是求 a_1，所以有：

$$a_1=\frac{Sn-\frac{n(n-1)}{2}d}{n}=\frac{Sn}{n}-(n-1)\frac{d}{2}$$

为统一单位制将度乘以度法(42640)，也化为分，代入数值得：

$$a_1=\frac{30\times 42640}{40}-39\times 250$$

就是《律历志》给出的(11.85)式。对于递减的匀速运动，则有：

$$a_1=\frac{30\times 42640}{40}+39\times 250$$

就是(11.93)式，它与(11.85)式的区别是“唯减者为加之”。这表明夕见顺迟行应是匀减速运动。但是，正文中已明确说是“日益五百分”，是注文错误还是正文错了呢？是正文错了。因为“差行”后有“先疾”二字，“疾”和“迟”是相对的，先疾，后必迟，反之亦然。例如：晨见顺迟行段正文是“先迟，日益五百分”，这是合理的。夕见顺迟行段既说是“先疾”，以后日速当小于初日速，“日益五百分”，“益”后应补一“迟”字。

(5)水星。

水星运行也分晨见和夕见，《律历志》同样是以大字正文记述晨、夕

见各步运行的粗略情形，细致变化用小字注出。大字正文所记各步运行情况如下，小字注仍用[1]、[2]等标出。

水星晨初见			
留		6 日	
顺迟行	日行 10660 分	经 4 日	行 1 度[1]
顺平行	日行 1 度	经 10 日	行 10 度[2]
顺疾行	日行 1 度 38376 分	经 10 日	行 19 度[3]
晨伏东方			
	+)		
		晨见总 30 日	行 30 度
夕初见			
顺疾行	日行 1 度 38376 分	经 10 日	行 19 度[4]
平行	日行 1 度	经 10 日	行 10 度[5]
迟行	日行 10660 分	经 4 日	行 1 度[6]
夕伏西方			
	+)		
		夕见总 30 日	行 30 度

[1]小字注说："大寒至雨水不须此迟行。"意思是水星晨见留 6 日后，若值大寒至雨水间，此段顺迟行便不存在，直接进入下段平行。

[2]"大寒后，二日去日度各一，尽二十日，日及度俱尽。""二日去日度各一"是指此段平行出现的日子，距大寒每隔 2 日，减去日度各 1，即大寒后 2 日出现，9 日行 9 度；4 日出现，8 日行 8 度等。到大寒后 20 日出现，日及度减尽，无日无度，表示此段平行也消失了。也就是说，此段平行只可能出现于一年之中的大寒节后 20 日之前的范围内，其他时间不可能有晨见平行的水星。

[3]"前无迟行者，减此分一万二千七百九十二分，十日行十六度。"意思是若此前没有顺迟行段，参见本节 5(4)[1]，此段疾行的日速当减去 12792 分，由原来的日行 1 度 38276 分变成日行 1 度 25484 分，10 日所行也由原来的 19 度变成了 16 度。

[4]"小暑至白露减万二千七百九十二分，十日行十六度。"此是水星夕见顺疾行段的情形，与晨见顺疾行段不同。夕见顺疾行只有当此段运行出现在小暑至白露之间时，日速才由 1 度 38376 分减少 12792 分，

变为 1 度 25484 分，总行度也由 19 度变成 16 度。

[5]“大暑后，二日去日度各一。尽二十日，日与度俱尽。”与晨见平行段同。不同者是一在大寒后，一在大暑后。不另释。

[6]“疾减万二千七百九十二分者，不须此迟。”意思是，若在顺疾行段日速减少了 12792 分，此段迟行便不存在。

三、推交会术

就是推算日、月食的方法。古人认识到日月交会才能发生日、月食，自北齐张子信海岛测星，知日月交会有表里阴阳，有些情况下虽交不食，交会与食不全是一回事，因称“推交会术”而不称“推日月食术”。

1. 推交会诸参数

《律历志》给定的参数共 10 个，大多是由交点月和朔望月二个参数导出。

大业历的交点月取为 $27\frac{83033}{391248}$，化为假分得 $\frac{10646729}{391248}$。其中分子 10646729 叫做会通。显然，若分一日为 391248 分，会通便是一个交点月的日分数。或者说是黄道、白道相交的两个交点中，从其中任一交点到回复到此交点时相距的日分数。因此也可以说是一个交点周的日分数，或直接说是交会的周期。分母 391248 是一日分数，为叙述方便，姑且称为“日法分”。

把日法分(391248，1 日分数)平分为 12 个时辰(自子至亥)，每个时辰得 32604 分，因称 32604 为时法。

黄白道的两个交点，从一个交点到另一个交点的日分数，即会通的二分之一($\frac{1}{2}\times10646729=5323364.5$)名为单数。单数是半个交点月的日分数。

前面说，大业历 1 个朔望月为 $29\frac{607}{1144}=\frac{33783}{1144}$ 日，分子为月法，分母为日法。日法 ×342 化为日法分，相应的月法也应乘 342，得 11553786，同样的原因，姑且称为“月法分”。月法分 11553786 的一半

5776893 名为望数，是从朔到望或从望到下月朔之间的日分数。月法分减会通所得差(11553786－10646729＝907057)叫做朔差。若使两个朔望月和交点月的月朔齐同，从下一个交点月之朔到下一个朔望月的月朔之间的日分数，就是朔差。

$\frac{1}{2}$朔差＝$\frac{1}{2}$×907057＝453528.5，叫做望差。意义可与朔差作同样的理解：若使两个朔望月和交点月的月朔齐同，由于朔望月大，从交点月的“月中”(交点月的“望”时)到朔望月的“月中”(朔望月的“望”时)之间的日分数，或者说是望数减单数的差叫做望差。

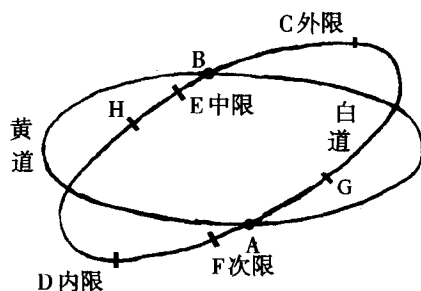



图 11.21　四限图

大业历为计算日月食还立了四限，如上图。其中：A、B 是黄、白道相邻的两个交点，$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{BDA}$＝单数，$\overset{\frown}{ACBDA}$＝会通。设$\overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{DA}$＝望差，$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{FA}$＝时法。那么，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CB}$＝单数－望差＝5323364.5－453528.5＝4869836 分，$\overset{\frown}{AC}$叫做外限。$\overset{\frown}{ACBD}=\overset{\frown}{ACBDA}-\overset{\frown}{DA}$＝会通－望差＝10646729－453528.5＝10193200.5 分，$\overset{\frown}{ACBD}$叫做内限。

同样求得$\overset{\frown}{ACBE}$＝单数＋时法＝5323364.5＋326040＝5649404.5，$\overset{\frown}{ACBE}$为中限。$\overset{\frown}{ACBDF}=\overset{\frown}{ACBDA}-\overset{\frown}{FA}$＝会通－时法＝1064729－326040＝10320689。$\overset{\frown}{ACBDF}$叫做次限。

下面把四限的意义再做些解释：

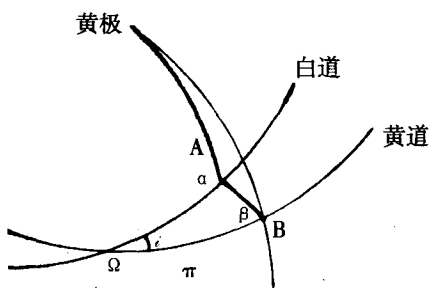



图 11.22 α、β、π 等值关系示意图

从前面的四限图可以看出，外限、内限的终点是分别距后、先交点距离等于望差的两个点；中限、次限终点则是距两个交点距离等于时差的两个点。四限意义直接与望差、时差有关。先看图 11.22：Ω 为黄、白道的一个交点，A 为月心，B 为地影中心，i 为黄、白道交角，α 为月望时月心到交点的白道度数，β 为黄纬度数，π 为黄经度数。

日本学者渡边敏卡认为：

$\beta > 63'.8$ 时，不可能发生月偏食（不偏食限）；

$\beta < 53'.4$ 时，必定发生月偏食（必偏食限）；

$\beta > 32'.2$ 时，不可能发生月全食（不全食限）；

$\beta < 21'.8$ 时，必定发生月全食（必全食限）。

自然科学史研究所的陈美东先生据此算出①：

$\pi > 12^\circ.37$ 时，不可能发生月偏食（不偏食限）；

$\pi < 9^\circ.61$ 时，必定发生月偏食（必偏食限）；

$\pi > 6^\circ.21$ 时，不可能发生月全食（不全食限）；

$\pi < 3^\circ.91$ 时，必定发生月全食（必全食限）。

根据球面三角公式，不难算出 α 的相应数值，它应该略大于 π 值。

上述望差等于 453528.5 分（1 日＝391248 分），其间月行度数应等于望差除以每日分，化为日，再乘以月亮的每日行度数（$\frac{章月}{章岁}+1=$

---

① 见陈美东《中国古代的月食食限及食分计算法》，《自然科学史研究》1991 年第 10 卷第 4 期，第 297～298 页。

$\frac{5481}{410}$)，即：

$$\frac{453528.5}{391248}\times\frac{5481}{410}=\frac{55239771.3}{3564704}\doteq 15°.50$$

由本节2(2)中的术文可知大业历把望差当做不偏食限，大于此数必不食，小于此数才能发生月偏食。此数是按月行度算得，应是α值。陈美东算得祖冲之大明历的此项α值为15°.27，大业历偏大。结合前面的四限图不难看出，内限靠近前交点，外限靠近后交点，内、外限分别与乾象历中的前限、后限相当。是白道上的不偏食限。

用同样的方法可以算出，在时法分内，月行1°.114，这是大业历采用的必全食限，即望入先交、次限内，后交、中限内，必定发生月全食。

综上述，四限是制定食否的四个极点，大于外限、小于单数，大于内限、小于会通者有月偏食；小于中限、大于单数，小于会通、大于次限者有月全食。

2. 日、月食计算法

(1) 推算朔望距交点的日分数，《律历志》称为"推入交法"。

先求合朔点的入交数：由上元到所求年的积月数，化为与会通单位制相同的日分数后，减去会通数，所得不是一个会通的余数就是所求年天正合朔点的入交数(称为入交余)：

$$\text{所求年天正朔入交余}=\text{积月}\times\frac{\text{月法}}{\text{日法}}\times 391248-m\cdot\text{会通}\quad\cdots\cdots\ (11.94)$$

式中，0≤所求年天正朔入交余＜会通。将上式右端变化得：

$$=\text{积月}\times\frac{\text{月法}\times\text{日法}\times 342}{\text{日法}}-m\cdot\text{会通}$$

$$=\text{积月}\times\text{月法}\times 342-m\cdot\text{会通}$$

$$=\text{积月}\times\text{月法分}-m\cdot\text{会通}$$

可以理解为"积月个月法分减m个会通"。若积月大于会通，设：

$$\text{积月}=P+Q\text{会通}(P、Q\text{都是自然数，且}Q\leqslant P<\text{会通})$$

"积月个月法分减m个会通"可以写为：

$$\text{积月}\times\text{月法分}-m\cdot\text{会通}=(P+Q\text{会通})\times\text{月法分}-m\cdot\text{会通}$$

命$m=P+n+Q\cdot\text{月法分}$，代入右端，得：

$$=P\times\text{月法分}-(P+n)\text{会通}$$

$=P$(月法分$-$会通)$-n\cdot$会通

$=P\times$朔差$-n\cdot$会通 ………………………………………………… (11.95)

因此知,(11.94)式不必全部列出,求出 P 后,可按(11.95)式列出。由题设:积月$=P+Q$会通,$P=$积月$-Q$会通,代入(11.95)式得:

所求年天正朔入交余$=$(积月$-Q$会通)$\times$朔差$-n\cdot$会通 … (11.96)

其中 Q、n 都是自然数,且满足:

$0\leqslant$积月$-Q\cdot$会通$<$会通,

$0\leqslant$所求年天正朔入交余$<n\cdot$会通。

(11.96)式正是《律历志》所给公式。原文表述为:"以会通去积月,余以朔望差乘之,满会通又去之,余为所求年天正朔入交余。"其中"朔望差"中的"望"字,衍。

求望时入交余,可由(11.96)式的结果加望数得到,即:

所求年天正望时入交余$=$所求年天正朔入交余$+$望数$-A\cdot$会通
………………………………………………………………… (11.97)

其中 $A=1$ 或 0。

求次月朔入交余有两途,一是由(11.96)式算得的结果中加上月法分数,由于满会通须除去之,从所加月法分中除去会通,等于在(11.96)式的结果中加入1个朔差。所以:

所求年次月朔入交余$=$天正月朔入交余$+$朔差$-B\cdot$会通 … (11.98)

同样 $B=1$ 或 0。

第二条路子是在(11.97)式中再加一个望数,即:

所求年次月朔入交余$=$天正望时入交余$+$望数$-C\cdot$会通 … (11.99)

$C=1$ 或 0。

把(11.97)式代入此式,得到(11.98)式,知(11.98)和(11.99)等效,故《律历志》无(11.99)式。

(2) 推交道内外及先后去交术。

这部分内容有两层:其一是由朔、望在一年各节气中的位置确定朔望入交余的调整数,算得调整后的入交余,名为定余;其二是由定余以及朔望在交道内、外,先交、后交等位置关系,确定食或不食。

入交余的调整如图 11.23:

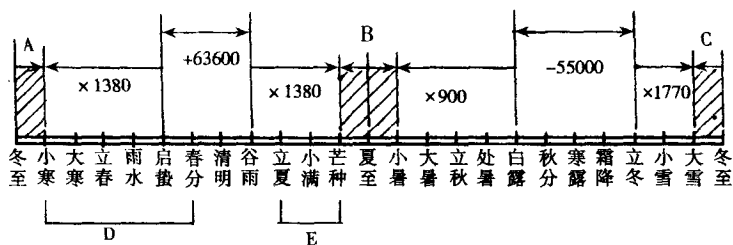



图 11.23 朔望入交余调整图

也是分二步调整，上部箭头图为第一步调整，大要是由本节2(1)算得的入交余加或减去一个调整数，名气差。气差算法是：朔或望在启蛰以前者，以朔望到小寒的日数乘以1380；在谷雨以后者，以朔望到芒种日数乘以1380；在启蛰到谷雨之间者，气差皆为63600。以上气差皆与入交余相加。朔望在白露以前者，以朔望去小暑日数乘900；在立冬后者，以朔望去大雪日数乘1770；在白露到立冬之间者，气差皆为55000。以上气差皆与入交余相减。

从图中可以看出，有三个阴影区的气差算法不明：冬至到小寒之间的 A 区，芒种到小暑之间的 B 区，大雪到冬至之间的 C 区。按前金星、火星例把它们归入邻近区域：A 区归入“启蛰以前”，C 区归入“立冬以后”，B 区在夏至前者归入“谷雨以后”，夏至以后归入“白露以前”。如此第一步调整可表示为下式：

定余＝朔望入交余

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{c}+\\(\text{夏至前})\end{array}\left[\begin{array}{l}\text{去小寒日数}\times1380(\text{朔望在启蛰前者})\\ \text{去芒种日数}\times1380(\text{朔望在谷雨后者})\\ 63600(\text{朔望在启蛰到芒种之间者})\end{array}\right]-m\cdot\text{会通}\\ \begin{array}{c}-\\(\text{夏至后})\end{array}\left[\begin{array}{l}\text{去小暑日数}\times900(\text{朔望在白露前者})\\ \text{去大雪日数}\times1770(\text{朔望在立冬后者})\\ 5500(\text{朔望在白露到立冬之间者})\end{array}\right]+n\cdot\text{会通}\end{array}\right.$$

…………………………………………………………………… (11.100)

(11.100)式中 m 是待定自然数或0，选定条件是使该式的计算结果小于会通，大于0。n 是0或1，当入交余分不足减时 $n=1$，否则为0。

第二步调整分二部分，都以小字注的形式分别附在(11.100)式中

的"＋"式和"－"式之后。附于"＋"之后者为："其小寒至春分，立夏至芒种，朔值盈二时以下，皆半气差而加之；二时以上，皆不加。朔入交余如望差、望数以下，中限以上，有星伏，木、土去见十日外，火去见四十日外，金、晨伏去见二十二日外，有一星者不加气差。""小寒至春分，立夏至芒种"这两个区间见前面的"朔望入交余调整图的 D、E 两个区域，当朔望在这两个区域时，满足下面二式，第一式：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当朔值}<2\times\text{时法，朔定余}=\text{朔入交余}+\dfrac{\text{气差}}{2}\\ \text{当朔值}>2\times\text{时法，朔定余}=\text{朔入交余}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11.101)$$

其中时法＝32604，是 1 日分（交点月的分母 391248＝日法×342）的十二分之一。气差为入交余的调整数，专指（11.100）式右端三项中的第二项值。

第二式是：

$$\text{当中限}<\text{朔入交余}<\text{望数，或朔入交余}<\text{望差}$$

$$\text{且附近有星伏，如}\left\{\begin{array}{l}\text{木、土去见 10 日外}\\ \text{火去见 40 日外}\\ \text{金星晨伏去见 22 日外}\end{array}\right.$$

$$\text{有一星伏则朔定余}=\text{入交余}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11.102)$$

以上两式都是求朔定余。求望定余时，在朔定余中加望数即得。

附于"－"后者是："朔入交余如外限、内限已上，单数、次限已下；有星伏如前者。不减气差。"（标点已更正）意思是：

当外限≤朔入交余≤单数，内限≤朔入交余≤次限（指前四限图中 BC、DF 两区域，到前后交点的距离不大于望差）。"有星伏"，则：定余＝入交余 ………………………………………………… (11.103)

朔望在交道内、外（表、里）的判断法是：

若定余＜单数，在外（表）

单数＜定余＜会通，在内（里）………………………………… (11.104)

日、月食的判定法是，月食不论内外表里，只要满足：

定余＜望差，或定余＞外限（定余在表。若在里就减单数以后计之），则逢望月食 ………………………………………………… (11.105)

日食则只能发生在月在黄道里，月掩日则日食，即：

单数＜定余＜会通，且定余－单数＜望差，或定余－单数＞外限，逢朔则日食 …………………………………………………………… (11.106)

以上不难解释，因为望差是大业历的不偏食限，而外限＝单数－望差，小于望差或大于外限都在不偏食限内，所以，逢望月食，月在内道时逢朔日食。

段末小字注还说：若定余＜望差，为去先交余；定余＞外限，则单数－定余＝去后交余。若去先交、后交余统称入交余，则有：

$$去交时=\frac{入交余}{时法} \quad\cdots\cdots (11.107)$$

(3) 推月食加时术。就是计算月食发生的时刻。本节2(1)、(2)计算出了某月望日是否有月食，此处进一步计算食在该日的某个时辰，《律历志》所给公式是：

$$\frac{月食定日小余\times 3}{辰法}=月食辰次数\frac{时余}{辰法}\quad\cdots\cdots (11.108)$$

月食所在辰是指辰次数算外。十二辰自子至亥，辰次数得1为子时，所在辰为2是丑时；辰次数得2为丑时，所在辰为3是寅时，等等。“食定日小余”指日月食所在定日的定小余。定朔、望日余及小余求法已见前述。乘3是由于辰法等于日法的四分之一，而每时只有日法的十二分之一，求辰次须将定日小余除以$\frac{1}{3}$辰法，化简后就得到(11.108)式那种形式。“时余”是不足1个时辰的分数，《律历志》按照传统方法继续把它划分为12等分，先四等分：把$\frac{1}{4}$时称为少，$\frac{2}{4}$时称为半，$\frac{3}{4}$时称为太；再把每一等分划为三小等分：$\frac{1}{3}$并入少为强，$\frac{2}{3}$并入多为弱。算法，不是像如今的算术那样直接把时余除以4得少、半、太，再把少、半、太各除以3得强、弱。而是把时余乘以4，仍除辰法，得1为少，得2为半，得3为太。有余分再乘以3，继续用辰法除，得1为强，得2为弱。还有余分则四舍五入之。

原文中后一部分须稍作解释：“……得一为强，以并少为少强，并半为半强，并太为太强；得二强者为少弱，并少为半弱，并半为太弱，并太为辰末。”可释为：除得的商是1，叫做强（子时为子强，丑时为丑强

……）；把这个“强”并入“少”，名为少强；并入半，名为半强；并入太，名为太强。除得的商是二者（得一为“强”，得二原文说是“二强”）名为少弱；并入少为半弱，并入半为太弱，并入太为辰末。“辰末”者，辰为子谓之子末，辰为丑谓之丑末……辰为亥谓之亥末。

段末有一句小字注：“此加时谓食时月在冲也。”意思是说，加时是指月食加于一日之中的某时辰，而一日之中的某时辰是太阳在该日的视位置。而月食时日、月如冲，月必在日之冲，就是说，食时月在与加时相冲的位置上。例如：加时在子，月亮位置在午；加食在丑，月亮位置在未；加时在寅，月亮居于申……加时在亥，月居于巳。

这种计算法用的基本参数是月食所在日的定日小余，计算步骤是先算出所求年月的月望日定大、小余；再算入交定余，由（11.105）式算出该月有无月食，最后才能按（11.108）式算出月食发生的时辰。还须知算得的是食既的时辰，不是初亏或复明时辰。

（4）推日食加时术。就是计算日食发生于一日之中某时辰的方法。本可仿月食计算法，以日食的定日小余乘三后，除辰法得之。但日食与月食不同，月食时，被食月面因被地影遮掩而无光，无论在地球上的任何部位观察，都得到相同的结果。日食则不然，它是被月遮掩所致，由于日远月近，月的“遮掩”只在地球上的月影部位才能看到，本影处见全食，半影处见偏食。日面并未失去光亮，在地球上的月影之外仍能看到。所以，按上法算得的“加时”数还要增加一个修正值。显然，修正值的大小是随入交余而变化，入交余大，日距交点远，日食的修正值应增大。《律历志》的公式是：秋三月，月在内道时，

去交 8 时以上：$\frac{(\text{定日小余}+24)\times 3}{\text{辰法}}=\text{日食辰次数}\frac{\text{时余}}{\text{辰法}}$ …… （11.109）

去交 12 时：$\frac{(\text{定日小余}+48)\times 3}{\text{辰法}}=\text{日食辰次数}\frac{\text{时余}}{\text{辰法}}$ ……… （11.110）

春三月，月在内道

去交 7 时以上：$\frac{(\text{定日小余}+24)\times 3}{\text{辰法}}=\text{日食辰次数}\frac{\text{时余}}{\text{辰法}}$ …… （11.111）

同样辰次数算外为所在辰，范围自 1 至 12，分别表示子、丑……亥时。

所以，由辰次求辰名的方法如《律历志》所说是："以命子，算外即所在辰。"[1]"命子"就是自子时起算。"算外"指辰次数之外，如辰次数为3，算外指4。1为子，2为丑……4为卯，日食所在辰为卯时。再如辰次数为5，算外为6。1为子，2为丑……6为巳，日食所在辰为巳时。余类推。

《律历志》还把子、午、卯、酉称为仲辰，辰、戌、丑、未为季辰，寅、申、巳、亥为孟辰。上面算得的时余需要修正，得到定时余。而孟、仲、季辰的时余修正法各不相同。一般是先算出差率，再算出时差，最后算得定时余。

先算差率：

日食在仲辰，若时余＜半辰　半辰－时余＝差率 …………… (11.112)

时余＞半辰　时余－半辰＝差率 …………… (11.113)

日食在季辰　时余＋半辰＝差率 …………… (11.114)

日食在孟辰　辰法－时余＋半辰＝差率 …… (11.115)

再由差率求时差：

$$\text{时差}=\frac{\text{去交时数}+\begin{cases}3 & (\text{当 }0<\text{去交时数}\leqslant 3)\\ 2 & (\text{当 }3<\text{去交时数}\leqslant 6)\\ 1 & (\text{当 }6<\text{去交时数}\leqslant 9)\\ 0 & (\text{当 }9<\text{去交时数}<12)\\ -a & (\text{当去交时数}=12+a)\end{cases}}{14}\times\text{差率}$$

…………………………………………………………… (11.116)

最后以时差求定时余：

$$\text{定时余}=\text{时余}+\text{时差}-m\cdot\text{辰法}\quad(\text{在子半—卯半，午半—酉半时})$$

…………………………………………………………… (11.117)

$$\text{定时余}=\text{时余}-\text{时差}+n\cdot\text{辰法}\quad(\text{在卯半—午半，酉半—子半时})$$

…………………………………………………………… (11.118)

以上诸式中：$a>0$；m、n是待选数，为0或1，条件是使$0\leqslant$定时余＜辰法。且当$m=1$时，日食所在辰加1；当$n=1$时，日食所在辰减1。以上加时及时余修正式都是经验式。下边解释修正值产生的原因。

先看(11.109)～(11.111)式，与月食加时术的算式比较，是计算日

① 《隋书·律历志》，中华书局1987年版，句中逗号在"算外"后，不妥。

食加时的公式多加了一个常数24或48。主要原因之一是大气折射。如图11.24,初食时,日、月交于B,地球上的观察者能够观察到的理论位置是A。由于地球大气层折射的缘故,日月实际要行至与A'相应的位置,人们才能真正观察到日食。自A行到A'这段时间就是调整值的大小。秋三月,日渐南行,日光斜射,入射角渐大,折射角也逐渐增大。春三月,日渐北行,日光渐趋直射,入射角渐小,折射角也渐小。折射角的大小反映了AA'的大小,即春小而秋大。所以,秋三月距交点8时而加24;春三月7时才得加24,又无加48之说。夏三月,日近直射,调整值忽略不计。冬三月,调整值虽大,但是,计算定朔大都由冬至观测值起算,冬至前后的日余偏离实测值最小,也可忽略不计。

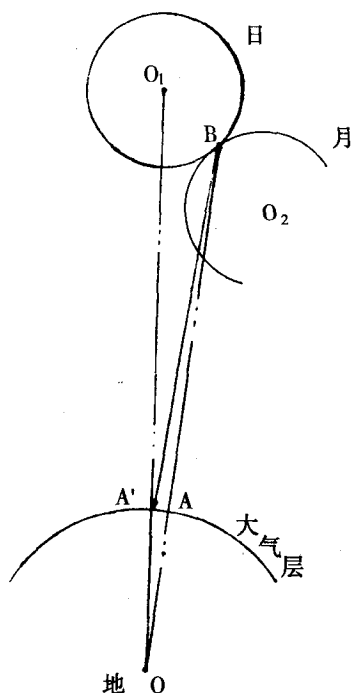



图11.24　日食调整值示意图

再看(11.116)式,若把去交时加调整数简化为(去交时)′则有:时差$=\frac{(\text{去交时})'\times\text{差率}}{14}$。其中14的含意是$\frac{\text{望差}}{\text{时法}}=\frac{453528.5}{32604}\approx13.91$,四舍五入后取整数就成了14。所以说,"14"是指限内包含的时辰总数。用14除差率,乘以(去交时)′等于时差,时差既是在(入交时)′内的时辰误差分数,不难理解"差率"的含意是限内时辰误差的总分数。(11.116)式的意义是:整个入交限(14时)的误差是"差率"分,在"入交时"的时间内误差是多少分,此分数称为时差。

时差的含意既定,求定时余的公式(11.117)、(11.118)就不难理解了:在一日之内的某些时辰内,定时余等于时余与时差之和;另一些时

辰内，定时余等于时余与时差之差。求和时，所得若大于1辰，除去之，畸零数为定时余；相减时，若时余小于时差，不够减，则于日食的时辰数内取出1辰，化为分数，与时余加在一起，而后减去时差，得定时余。

最后回头看一看(11.112)～(11.115)式求差率的四个计算式的含意。可以看出，在时余相同的情况下，差率的大小随日食所在时辰的位置是孟、仲、季辰而不同：孟辰或季辰最大，仲辰最小。若时余＜半辰，孟辰的差率＞辰法，仲辰差率＜半辰，季辰的差率在二者之间：半辰＜差率＜辰法。若半辰＜时余＜辰法，季辰时余最大，大于辰法；仲辰时余仍然最小，小于半辰；孟辰时余在二者之间：大于半辰，小于辰法。究竟为什么是这样的，或者说为什么用(11.112)～(11.115)式那样的算式计算差率，就不易解释了，可能是经过长期观察得到的经验式。

《律历志》此段术文之末说："乃如月食法，子午卯酉为仲，辰戌丑未为季，寅申巳亥为孟。三乘气时法得一，命子算外为时。"孟、仲、季辰的划分，月食法中无此法。月食法把定时余细分为12等分，名之以少、半、太、弱、强。若把上述文字理解为，对日食定时余也像对月食定时余那样，划分为12等分，但不是以少、半、太、弱、强命名，而是以十二辰命名。虽可勉强成解，其实行不通。例如，若把1、2……12时，分别叫做子、丑……亥时。$1\frac{1}{12}$叫做子时子分，$1\frac{2}{12}$叫做子时丑分……便不会有子时亥分(子时亥分就是丑时)的名字。即是说时下的12等分，只用十二辰中的十一辰命名则可。因而可以判定"乃如月食法"与下面的"子午卯酉为仲"句，并无联系；"月食法"后必有脱文；"子午卯酉"等句是对时辰的命名，不是指辰下零分名。此外日食加时算法与"气时法"无涉，所谓"三乘气时法得一，命子算外为时"是错简，以文意推求，可把此句增二字，加在《律历志》第443页末行之下，即在"满之去如前"后，移入此句："不满，三乘之，如气时法得一。命子算外为时。"如此可解决三个矛盾：其一，使此句术文有了着落。其二，第443页末行术文算法的题名是"求朔望加时日所在度术"，而术文只有计算"朔望日所在度"的方法。移入此句后，"加时"二字才不致成虚文。其三，《律历志》篇首提供的计算参数有"气时法"的名字，但通篇计算都没有用到气时法，只在"推日食加时

术”后有此一句，若不删，推日食加时用它不上；删去，则篇首提供的参数没有了着落。移到第 443 页末行之后就“皆大欢喜”了。

（5）求外道日食法。前文说月食外道，日食内道。此段讲的是一种特殊情形：月在外道而发生日食的情形，有以下六种（包括小字注所说一种）：

“去交一时内者，食。”

“夏去交二时内，加时在南方三辰者，食。”

“若去（分）至十二时内，去交六时内者，亦食。”

“若去春分三日内，后交二时内；秋分三月内，先交二时内者，亦食。”

“先交二时内，值盈二时外。及后交二时内，值缩二时外，亦食。”

术文后又有小字注说：“诸去交三时内，星伏如前者，食。”

第一种情形说，去交 1 时，只要具备这一个条件，逢朔必食，没有任何特例。其实是前边说过的必全食限。日去交 1 时，换算成月行度是：

$$\frac{(\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}+1)\times\text{时法}}{1\text{日分}}=\frac{(\frac{5071}{410}+1)\times 32604}{391248}\doteq 1^{\circ}.114 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11.119)$$

第二种情形，满足以下三个条件时，月从外道入交，也能发生日食：一是时令在夏三月，此时日在北半球，四季之中距地最近。二是去交 2 时以内。把（11.119）式中的“时法”乘 2，即可算得去交度约为 $2^{\circ}.228$。三是加时在南方三辰，即加时在巳、午、未三辰。由于日道在北，月亮是从外道（黄道以北）入交，地球上只有高纬度地区才能见到日食。

第三种情形中“分”字是校勘者所增，指春分、秋分。如此限定了两个条件：一是月朔在 2 至、2 分前后不超过 1 日（12 时）的范围内；二是入交定余在 6 时以内，按照（11.119）式的算法化为度是去交点约 $6^{\circ}.684$，在偏食限内。

第四种情形，“秋分”前的逗号应改为分号，把前后分隔成两类情形，居其一则有日食。一类是朔日在春分前后 3 日之内，入交余在距后交点 2 时之内者，日食。二是朔日在秋分前后 3 日内，入交余距先交点 2 时之内者，食。如图 11.25：A 为先交点，B 为后交点；P 为春分点（升交点），Q 为秋分点（降交点）；入交余后交点 $\overset{\frown}{BC}<2$ 时，距前交点 $\overset{\frown}{DA}<$

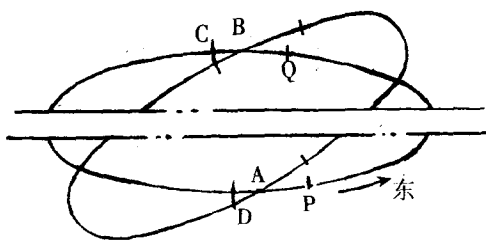



图 11.25 日食外道图

2 时，月虽在外道，在$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{DA}$范围内，逢朔则日食。

第五种情形也包含两类：一是入交余在先交 2 时内，“值盈”2 时外；二是在后交 2 时内，“值缩”2 时外。值盈、值缩的“值”是什么？是理解这条术文的关键。值是指入交余的值，“盈”、“缩”是相对邻近交点值而言，超过交点值为盈，不足交点值为缩。在先交 2 时内或在后交 2 时内，特别又指出值盈或值缩是为了满足“月在外道”这个前提而设。如入交余在先交 2 时内，既可能在先交点之前（入交余在外限以上而食），也可能在先交点之后（入交余小于望差而食），若再加一条“值盈”2 时外，所求朔只能在先交点之后，月在外道。同样，在后交 2 时内，值缩 2 时外，月也在外道。去交余只有 2 时，(2 度余)'故食。

第六种情形是去交点 3 时之内，有五星之一伏而不见，星“伏”的情形满足本节 2(2)“推交道内外及先后去交术”中设定的条件：“木、土去见十日外，火去见四十日外，金、(水)晨伏去见十日外。”由(11.119)式可以算出，去交点 3 时是指在交点前后 $3^{\circ}.342$ 之内。

(6) 求内道不食法。本节 2(2)说，月在内道，限内逢朔即日食（“在内者，朔则日食”）。这里说的是三种月在内道，朔而不食的情形：

“加时南方三辰，五月朔先交十三时外；六月朔后交十三时外，不食。”

“启蛰至谷雨，先交十三时外，值缩加时在未以西者，不食。”

“处暑至霜降，后交十三时外，值盈加时在巳以东者，不食。”

前边说，月在内道，限内逢朔即食，“限”指距交点不大于望差

(453528.5 分)的范围之内。这里说的第一种情形是，月在内道，但是先于交点 13 时之外，距离出限不足 1 时。后交 13 时之外，与此同(前面说过望差约等于 14 时，其实只有 13 时余：$\frac{望差}{时法}=\frac{453528.5}{32604}\doteq 13.91$ 时)。所食甚浅，只有极少数地区可以看到。又由于可食时间在五月、六月，日在极北；加时在南方三辰，日光最明亮，使得观察到日食的可能性更小，因此说是"不食"。

第二、三种情形，入交余仍在 13 时之外，所食很少，这是不易见的第一个原因。加时在未以西、巳以东，日升起或落下时，视速度加快，是不易见食的第二个原因。最后一个原因是，食在启蛰到谷雨间，即在春分前后，若分天体为四部分，日在东陆，当天体每日 1 周旋转时，日随天转动，从东到西，视觉效应是去人愈来愈远，到加时未以西，去人最远，月近日远，更不易看到日食。同样在处暑到霜降间，日在西陆，当其随天一起旋转，愈往东去人愈远，加时巳以东，去人最远，也最不易看到日食。

总之，以上三种所谓月在内道，日当食不食法，不是不食，而是食分甚浅，又不是在最有利的观察时刻，看不到日食的缘故。

(7) 求月食分。前面解释《魏书・律历志上》记载的张龙祥等九家共制的历法正光历时说过，推算日、月食分多少时，是正光历最早把入交限定为 15 度，入交 1 日减 1 度，食分＝15－入交日数。大业历的计算法复杂一些，但大意则相同。术文是："春后交，秋先交，冬后交，皆去不食余一时，不足去者，食既。余以三万二百三十五为法，得一为不食分。不尽者，半法以上为半强，已下为半弱，以减十五，余为食分。"(第 454 页倒 1、2 行)即：

对于春后交、秋先交、冬后交：

$$食分=15-\frac{入交余-不食余1时}{30235} \quad\cdots\cdots\quad (11.120)$$

对其余诸情形(春先交、秋后交、冬先交及夏先、后交)：

$$食分=15-\frac{入交余}{30235} \quad\cdots\cdots\quad (11.121)$$

(11.120)式右端分子中的"不食余 1 时"，就是 1 时分数：3.2604。

前面说此数名为时法，此处称为不食余，是由于从(11.121)式不难看出，入交余就是不食日分数，从中减去的部分也应是不食日分数。前者既名“入交余”，为相区别，后者名为“不食余”。

若“入交余”小于“不食余1时”，由(11.120)式可以算出，食分接近于15，是月全食，《律历志》说是“食之既”。食既，就是食尽、全食的意思。

右端分式中的分母30235的含意是把食限望差(453528.5)平分为15等分所得约数。前面说过，使朔望月与交点月的朔日齐同，下一个朔望月的朔日与交点月的朔日之间的距离为朔差，朔差的一半为望差。由此知，每过一个朔望月有1个朔差分的积分，每半个朔望月有1个望差的积分。而“入交余”正是朔望月与交点月差的积分。可以说，每过半个朔望月(近似为15日)，入交余的积分为望差，每过1日入交余的积分就是$\frac{\text{望差}}{15}=30235$分。那么，$\frac{\text{入交余}}{30235}$就是入交后的日数。(11.121)式与正光历的食分计算式完全相同，而(11.120)式是在某些情况下对(11.121)式的修正。

(8) 推日食分术。日食分和月食分的计算法原则是相同的，但术文只有“不食余”的计算法。如图11.26，按食在二十四节气中的位置分作三区，B区(启蛰到夏至)，A区(夏至到秋分)和C区(秋分到次年启蛰)。每区不食余的算法是：

A区，　去交余－到夏至日数×2000＝不食余 …………… (11.122)

若，去交余＜到夏至日数×2000，则改为：

184000－去交余＝不食余 …………………………………… (11.123)

B区，　去交余－到夏至日数×1500＝不食余 …………… (11.124)

若，去交余＜到夏至日数×1500，则改为：

184000－去交余＝不食余 …………………………………… (11.125)

C区，　去交余－184000＝不食余 ……………………… (11.126)

若，去交余＜184000，则改为：

184000－去交余＝不食余 …………………………………… (11.127)

以上算得的“不食余”就是(11.120)或(11.121)式右端分式中的分子，因此得日食分计算式为：

$$日食分=15-\frac{不食余}{30235} \qquad (11.128)$$

对于食在大寒至小满之间的情形，又有不同，写为：

$$日食分=15-\frac{不食余\pm 1时}{30235} \qquad (11.129)$$

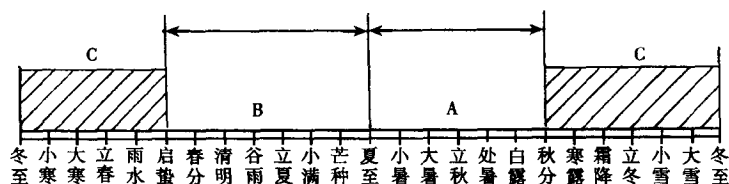



图 11.26 "不食余"增减区域图

下边对以上各式做些解释：

首先，A、B 区内求不食余的大小都以距夏至日数判定。是由于日绕地行，轨道是个椭圆，地在椭圆的一个焦点上。如图 11.27，椭圆两个

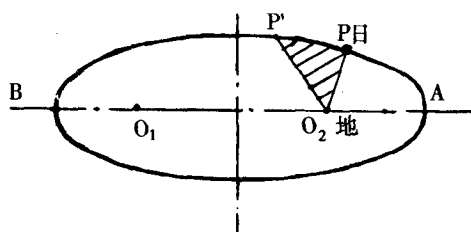



图 11.27 日速变化图

焦点 O_1 和 O_2，设地在 O_2 位置上，日 P 沿椭圆轨道运行，A 为近地点，B 为远地点。按开普勒行星运动第二定律，太阳运行时的向径 O_2P 扫过的面积与时间成正比，即在相等的时间内扫过的面积相等。显然，在面积相等的情况下，包围面积的向径愈长，椭圆弧就愈短。即在相等的时间内，距近地点愈近，沿椭圆行过的弧线愈长，即运动速度愈大。换句话说，就是太阳在椭圆轨道上运行时，在近地点速度最大，远地点速度最小。而远地点在夏至附近，所以距夏至愈远，入交后，在相同时间内行过

的距离愈大，愈接近黄白交点，所食愈深(食分愈大)，食分愈大，不食余愈小。因此，计算不食余要在去交余中减去一个与到夏至日数相关的数字。

那么，为何在夏至前后，减去的修正值不同呢？即为什么在 A 区减去的数字是“到夏至日数×2000”，在 B 区却是“到夏至日数×1500”？这表明在制定大业历的时代，日轨的远地点在夏至前某日。分别发生在夏至前、后的两次日食，尽管到夏至日数相等，到远地点的日数却不等，食在夏至后者，到远地点更远些，减去数目要更大些。

在(11.123)、(11.125)等式中都表示当去交余减修正数不足减时，要反减 184000。184000 是个什么数字？为何要反减 184000？先看(11.122)式，食在夏至到秋分之间者，每远离夏至 1 日，要从去交余中减去 2000 分。若远离夏至 92 日，就要从中减去 184000 分，92 日是从夏至到秋分日数的约数。所以说，184000 是日食发生在夏至到秋分之间时，去交余修正数的极大值。也可以说是日食在启蛰到秋分之间时，去交余修正数的极大值。

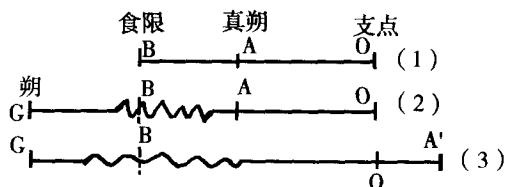



图 11.28　修正数与不食余关系图

下面再解释反减 184000 的意义。如图 11.28，O 是黄白交点；A 是真朔点，即修正后的合朔点；G 是合朔点；B 为食限。在图 11.28(1)中，OA 为入交余，OB 的长度等于望差(453528.5 分)。平分 OB 为 15 等分，每分约是 30235 分。以 30235 除 OA 长，得不食余，除 AB 得食分。所以入交余就是不食余。

再看图 11.28(2)，若合朔点为 G，由 G 距夏至日数得到的修正数是 AG，由 G 算得的入交余是 OG。那么，$OG-AG=OA$，即修正后的入交余(不食余)是 OA，仍是以 A 为真朔点。显然，当入交余长度 OG 固定时，修正数 AG 愈大，不食余 OA 愈小。当 AG 充分大，比如大到超过

了入交余 OG 面等于 GA' 的长度〔如图 11.28(3)〕时，不食余 OA' 成了负数，即真朔点落入黄、白交点的另一旁。已知不论在交点前后，只要在限内都有食，因此可以不必理会不食余的值是正数还是负数，只看它的绝对值的大小即可。既如此，$OG-A'G$ 得负数，不妨用 $A'G-OG$ 得到一个绝对值完全相同的正数，作为不食余，算得的食分是相同的。由 $OG-A'G$ 改为 $A'G-OG$，就是《律历志》所说的反减 184000。

从理论上说，在冬至前后的近地点日速最快，其两旁日速渐减。因此，在 G 区内的不食余的修正数也应是个变数。但是从《律历志》给出的算式〔(11.126)、(11.127)〕看，修正值采用的是一个固定数：184000。这可能与当时的观测精度有关。

算出不食余后，如何计算食分？《律历志》正文只说："大寒至小满，去后交五时外，皆去不食余一时。时差减者，先交减之，后交加之，不足减者食既；值加，先交(加之，后交)减之，不足减者食〔既〕。"① 文中"大寒至小满"是日食发生的时段，无须多说。"去后交五时外"，既是讲日食，当系指内道情形。如图 11.29，$\overset{\frown}{AHDPB}$是内道，A 为前(先)交点，B 为后交点，H、D 是二个食限点。因为$\overset{\frown}{AH}$、$\overset{\frown}{DB}$都等于望差(453528.5 分)，相当于 13 时多(1 时＝32604 分)，设$\overset{\frown}{BP}=5$ 时，则$\overset{\frown}{PDHA}$上任意点都满足引文中说的"去后交五时外"的条件。但能够发生日食的只有$\overset{\frown}{PD}$、$\overset{\frown}{AH}$两弧内的点，$\overset{\frown}{PD}$内的点是"去后交"者，$\overset{\frown}{AH}$内的点是"去先交者"。虽然前边说了凡是"去后交五时外，皆去不食余一时"，即都要从前面算出的"不食余"中"去掉"1 时，如何"去"法？须视情形不同而异。就是前引《律历志》正文那段文字中"时差减者"以下的文字，其中"时差减者"是指前面计算"日食加时"中，有时要加"时差"，有时又要减时差〔参见本节 2(4)中的(11.117)、(11.118)式〕。"减"时差者，加时在"卯半至午半，酉半至子半"。对于这种情形，若入交余近先交点($\overset{\frown}{AH}$段)，从不食余中减 1 时；近于后交点($\overset{\frown}{PD}$段)，要把不食余加 1 时。对于减 1 时的

① 引文中"()"内文字是"校勘记"所补，"〔〕"内文字是笔者所补。

情形，若不足减，是不食余的大小尚不足1时，所食在14分以上〔参见(11.129)式〕，可以认为是日全食（“食既”）。

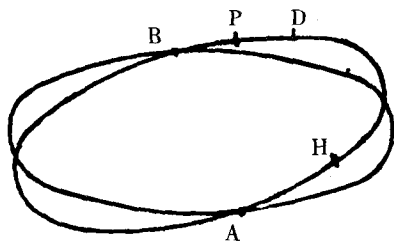



图 11.29 “去后交五时外”图

“值加”是和上面“时差减者”相反的情形，即“日食加时”在“子半至卯半，午半至酉半”的情形。对此须先交加，后交减，不足减者为食既。

总之，上引术文的意思是，求出不食余后，有些情况须从中加1时，另一些情形则应减1时，就是像前(11.129)式右边分式中的分子所表示的那样，“不食余±1时”。如此还是没有算出食分来。

计算日食食分与月食食分道理是相同的，计算方法也不会有大出入，参考与大业历几乎同时期产生的历法：刘焯《皇极历》（见《隋书·律历志下》）“推日食多少术”，其中就有“乃如月食法”的话（第487页倒2行）。大业历“推日食分”也应有类似的话，比如在上面引文之后加上“余如月食法”五字。这样就能像计算月食分那样，把不食余除以30235分，所得商被15减，得日食分。如同(11.128)、(11.129)式所表示的那样。

需要说明的是，术文中于计算“不食余”之后有一段小字注文：“亦减望差为定法。其后交值缩，并不减望差，直以望差为定法。”以不食余“减望差”求食分，是皇极历的方法（参见下章释文）。但是皇极历不曾说减得的结果叫做“定法”。按照古代传统，“法”的概念是指除数。而从历理看，不食余“减望差”只能做被除数。因为，只有把它除以30235，才能求得日食分数。即应采用如下算式：日食分$=\dfrac{\text{望差}-\text{不食余}}{30235}$。可以看出，这其实就是(11.128)式。但在这里“望差－不食余”不是“定法”，而

是“定实”。注文似是后人据皇极历所加，而所用词语有些错误。

（9）求日食开始的方位。原文说是：“内道西北，亏东北；外道西南，亏东南。十三分以上，正左起。”

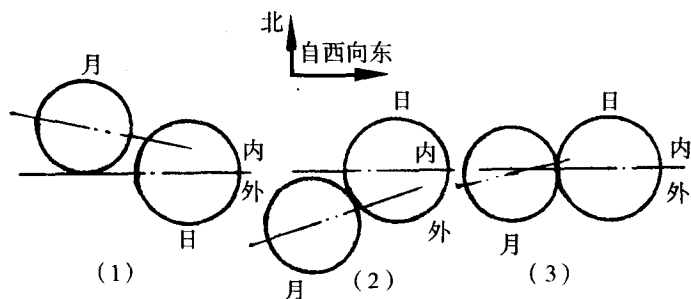



图 11.30 日食方位图

由皇极历文，“内道西北”应作“内道起西北”，外道同。文意是说内道日食起自西北，亏向东北；外道日食，起自西南，亏向东南。若日食13分以上，食自正西起，亏向正东。如图11.30，月在内道时，月行速，日行迟，月自西北方追及日，掠正北而过，自东北方离去，故日食“起自西北，亏向东北”〔见图11.30(1)〕，图11.30(2)、(3)可类推，不尽释。

月食起讫方位《律历志》没有言及。但是，若把图11.30中的日换为地影，月自西向东行追及地影，则不难理解：月行内道，食起东南，亏向西南；月行外道，始自东北，亏向西北；食13分以上，正右（东）起。

应该说明的是，以上是以黄道以北为内道的情形。而实际是以黄道弧内为内道，即向黄道圆心的一方为内道。因此，不可能总是以黄道北为内道的。在夏至点前后，以黄道南为内道；春分点前后，以黄道西北为内道；秋分点前后，以黄道东南为内道。只有在冬至前后才是以黄道北为内道。内道方位不同，日、月所在的相对位置不同，日、月食的起讫方位也各不相同。这在皇极历中讲得很清楚，大业历只讲冬至前后日食的情形，其他一概从省。古代历法释文从简到繁，是总趋势。

（10）日出入时刻表。此表列出了一年二十四个节气的日出、入时刻，每两个节气下有一个时刻数，表的连贯性不太清楚，改为如下形式就容易理解了。

表 11.7　日出入时刻表

节气名	日出	日入	节气名
冬至	辰时 60 分刻之 50	申时 7 刻 30 分	冬至
小寒	辰时 32 分	申时 7 刻 48 分	大雪
大寒	卯时 8 刻 19 分	酉时 1 分	小雪
立春	卯时 7 刻 28 分	酉时 52 分	立冬
启蛰	卯时 6 刻 25 分	酉时 1 刻 55 分	霜降
雨水	卯时 5 刻 13 分	酉时 3 刻 7 分	寒露
春分	卯时 3 刻 55 分	酉时 4 刻 25 分	秋分
清明	卯时 2 刻 37 分	酉时 5 刻 43 分	白露
谷雨	卯时 1 刻 28 分	酉时 6 刻 52 分	处暑
立夏	卯时 28 分	酉时 7 刻 52 分	立秋
小满	寅时 8 刻 3 分	戌时 17 分	大暑
芒种	寅时 7 刻 36 分	戌时 44 分	小暑
夏至	寅时 7 刻 30 分	戌时 50 分	夏至

此表有以下几点须要说明：

第一，是单位制。1 日＝12 时＝100 刻，1 时＝8 刻 20 分，1 刻＝60 分。

第二，日入时刻－日出时刻＝昼漏刻，日出时刻－日入时刻＝夜漏刻，昼漏刻＋夜漏刻＝100 刻。

第三，相邻两节气日出时刻增减数等于日入时刻减增数。即日出提前多少刻等于日入推迟多少刻，反之亦然。如冬至到小寒日出时刻由辰时 50 分减少到辰时 32 分，提早了 18 分；日入时刻由申时 7 刻 30 分增加到申时 7 刻 48 分，推迟了 18 分等。用此项规则检查表中数据，除了校勘者校出的错误之外，第三行大寒的日出时刻原作“卯八刻四十九分”，“四”字衍。上表已更正作“卯时 8 刻 19 分”。

第四，某日的日出、入时刻，可作为它所在的相邻两个节气日出、入时刻变化的平均数求出。表示为如下算式（式中每气日数取约数 15 日）：

$$\text{所入气日出、入辰刻及分} \pm \frac{(|\text{所入气辰刻及分}-\text{后气辰刻及分}|)\times\text{入气日数}}{15}$$

＝所求日的日出、入辰刻及分 …………………………………………（11.130）

此式就是《律历志》表后所附“求日出入所在术”的公式，道理甚浅，不再解释。

第十二章　隋朝一部“会通今古”的历法——刘焯皇极历

刘焯《皇极历》载于《隋书·律历志下》，按《律历志中》的记载，开皇十四年颁行张宾历后，刘孝孙和刘焯都攻击它的短处。开皇十四年，太史校诸家历法，张胄玄、刘孝孙历都是被校者之一，没有提到刘焯历。直到隋文帝起用张胄玄“参定新术”，刘焯才匆忙“增损孝孙历法，更名七曜新术，以奏之”。这大概就是皇极历的雏形。开皇十七年，张胄玄历颁行后，由于受到刘焯等人的攻击，虽有明显缺点，害怕自彰已失，不敢改正。直到大业四年刘焯死后，才作了修改。上一章解释的张胄玄历就是修改后的历法。由此可知，刘焯的皇极历是在开皇末(十四年以后)制成的，比张胄玄历的产生晚一些，但是比今传修订后的张胄玄历略早。刘焯自言他的历法于“开皇三年，奉敕修造”是靠不住的。由于他性格偏狭不能容物，数遇良机，都失掉了，皇极历终于未得颁行。

尽管如此，皇极历的贡献不可埋没，如刘焯本人所说，它是一部“寻圣人之迹，培曩哲之心”，“会通今古”的历法。南北朝发明的许多历法理论，如岁差、定朔、变闰等，在隋朝得到全面实行。又有清河人张子信，避乱海岛三十多年，潜心观测，有许多重要发现，张胄玄、刘孝孙、刘焯都是他的传人，而刘焯历最后出，吸收了其余二人的长处，避免了他们的缺点。唐初历家，大都吸收了皇极历的经验和成果。

皇极历以甲子年为历元，上元距隋炀帝仁寿四年(608年)甲子积1008840年。

通常历法都要立一套章、蔀、纪、元之类的参数，隋初张宾历犹然。自张胄玄、刘焯起，一改旧法，只立一个章法，其他全免。虽虚拟一个上元，装装样子而已，计算时全无用处。

一、对年、月、日及天度的计算

1. 推经朔术

(1)参数。

所用参数有十个。

岁率676,就是以前常说的章法。南北朝以前多用19年为1章,闰法改变后不用十九年七闰法,章法也随之改变。皇极历不仅改变数值,并其名而变之,称为岁率。

月率8361,就是以前的说的章月。章法既为676,平年每年12个月,676年合8112个月。今章月取8361,多出249个月,是1章闰月数。由此知,皇极历采用的闰法是676年249闰,与十九年七闰相比,每12884年少设1个闰月。

朔日法1242,旧名日法。是计量朔望月时采用的每日日分数。

朔实36677,以往称为月法,是一个朔望月的日分数。除1日分,得1个朔望月日数:1个朔望月日数$=\frac{\text{朔实}}{\text{朔日法}}=\frac{36677}{1242}=29\frac{659}{1242}$日。

旬周60,为甲子1周数。

朔辰103.5,每个时辰的日分数。每日分数等于朔日法1242分,均分为12个时辰,每辰得此数。

日干元52,后文要说到气日法,日干元是气日法的因数。也是岁率的因数,如岁率676=52×13,如同天干地支组合成旬周一样,可把53叫做天干,13叫做地支。天干又名日干,所以把52名为日干元。

日限11。皇极历求定气、定朔,经常要用1气日数除某数。1气日数不是整数,用分数表示时,化简后分子约为160,分母为11(系指秋分后1气日数,参见“盈泛”条)。分母为日限。

盈泛16,亏总17,分别是秋分后、春分前1气日数的特征量。《律历志》说:“秋分后春分前为盈泛,春分后秋分前为亏总。”秋分后日行速,每气日数少;春分后日行迟,每气日数多。皇极历取其比例为16∶17。即:

秋分后每气日数：春分后每气日数=16：17 ………………………… (12.1)

而1年之内，两者各占12气，有：

$$(\text{秋分后每气日数}+\text{春分后每气日数})\times 12=365\,\frac{11406.5}{46644} \quad \cdots\cdots (12.2)$$

将(12.1)式代入(12.2)式，得春分后每气日数 $=\dfrac{365\,\frac{11406.5}{46644}\times 17}{(16+17)\times 12}=\dfrac{11\times 17}{12}$；同样，秋分后每气日数为 $\dfrac{11\times 16}{12}$。其中11为日限，16为盈泛，17为亏总。泛总[①] 除日限为每气日数。

(2)推经朔术。

推算法为先求积月：

$$\frac{\text{入元距所求年}\times\text{月率}}{\text{岁率}}=\text{积月}\,\frac{\text{闰衰}}{\text{岁率}} \quad \cdots\cdots (12.3)$$

其中 $\dfrac{\text{月率}}{\text{岁率}}$ 是每章月数，闰衰是不足1月的畸零部分。再由积月求积日：

$$\frac{\text{积月}\times\text{朔实}}{\text{朔日法}}=\text{积日}\,\frac{\text{朔余}}{\text{朔日法}} \quad \cdots\cdots (12.4)$$

其中 $\dfrac{\text{朔实}}{\text{朔日法}}$ 为1个朔望月日数，由这两个算式可以看出，推经朔与以往介绍过的历法完全相同。由积日求朔日干支的方法也必相同。

$$\text{积日}-m\times\text{旬周}=\text{日} \quad \cdots\cdots (12.5)$$

其中m为待定自然数或0，且满足如下不等式：$0\leqslant\text{积日}-m\times\text{旬周}<\text{旬周}$。

(12.5)式中的“日”在太初历等历法中叫做大余，大余算外为所求年天正朔日的日名。

(3)求上弦、下弦、望。

将一个朔望月日数剖为四份，在经朔大、小余〔(12.4)式中的“朔

---

① 后面屡用“泛总”这个参数，如上文所说：一气日数乘日限等于泛总。如此可以算得：春分后一气日数 $=\dfrac{\text{泛总}}{\text{日限}}=\dfrac{11\times 17}{12}$，得泛总 $=171\,\dfrac{5}{12}$；同样得秋分后泛总 $=161\,\dfrac{1}{3}$。

余"为经朔小余〕中加一份得上弦，加二份得望，加三份得下弦，全加得下月朔。因此有：

$$\frac{\text{朔实}}{\text{朔日法}}\div 4=\frac{36677}{1242}\div 4=\frac{9169\frac{1}{4}}{1242}=7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}$$

$$7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}\times 2=14\,\frac{950\frac{1}{2}}{1242}$$

$$7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}\times 3=22\,\frac{183\frac{3}{4}}{1242}$$

$$\text{日}\,\frac{\text{朔余}}{\text{朔日法}}+7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}=(\text{日}+7)\frac{\text{朔余}+475\text{小}}{\text{朔日法}}\quad\cdots\cdots\quad(12.6)$$

(日＋7)算外为上弦日名，同样：

$$(\text{日}+7)\frac{\text{朔余}+475\text{小}}{1242}+7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}=(\text{日}+7+7)\frac{\text{朔余}+475\text{小}+475\text{小}}{\text{朔日法}}\quad\cdots\cdots\quad(12.7)$$

得望。

$$(\text{日}+7+7)\frac{\text{朔余}+475\text{小}+475\text{小}}{1242}+7\,\frac{475\text{小}}{1242}=(\text{日}+7+7+7)\frac{\text{朔余}+475\text{小}+475\text{小}+475\text{小}}{\text{朔日法}}\quad\cdots\cdots\quad(12.8)$$

得下弦。再加 $7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}$ 得下月朔。其中右端分子部分满朔日法则除去之，大余增1；两"小"相加得"半"，"半"加"小"得"大"，"小"、"半"、"大"分别表示$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$。

以上三式右端的表达形式是为了与术文相合。《律历志》还有一套求法：

$$\text{日}\,\frac{\text{朔余}}{\text{朔日法}}+7\,\frac{475\frac{1}{4}}{1242}=(\text{日}+7)\frac{\text{朔余}+475\text{小}}{\text{朔日法}}\quad\cdots\cdots\quad(12.9)$$

得上弦。

$$日\frac{朔余}{朔日法}+14\frac{950\frac{2}{4}}{1242}=(日+14)\frac{朔余+950半}{朔日法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.10)$$

得望。

$$日\frac{朔余}{朔日法}+22\frac{183\frac{3}{4}}{1242}=(日+22)\frac{朔余+683大}{朔日法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.11)$$

得下弦。

$$日\frac{朔余}{朔日法}+29\frac{659}{1242}=(日+29)\frac{朔余+659}{朔日法} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.12)$$

得下月朔。以上算法亦与以往诸历同。

《律历志》又说："每月加闰衰二十大，即各其月闰衰也"。是由于《皇极历》每处月数为$\frac{月率}{岁率}=\frac{8361}{676}=12\frac{249}{676}$。即 12 个月外，在闰衰 249 分。把闰衰均入 12 个月中得 $249\div12=20\frac{3}{4}$，就是《律历志》说的"二十大"。加二十大得下月闰衰。

(4)总则。

这一部分是很长一段文字，介绍计算过程中用到的基础知识，按顺序解释有如下几方面：

第一，是关于"月建"的规定。把建子之月定为正月的称为"天正"；建丑之月为正月的，叫做"地正"；建寅之月为正月的，叫做"人正"。历法是按人正定正月，但计算时要以天正为起始。即从天正月算起，气、候、月、星都是如此。地正十二月为天正十一月……余同此。

第二，每日自辰时开始，辰时以前属于昨日。历法计算仍以夜半为日始。如某节气在子时后，辰时前，本属头日。但量度该气日影仍以次日日影为正。《律历志》说，"其日之初，亦从星起"，"星"为"晨"字误文。

第三，是讲分式连加而后与某数相乘的算法，名为"因加"。

$\left(\frac{a_1}{A}+\frac{a_2}{A}+\frac{a_3}{A}+\cdots\cdots\frac{a_n}{A}\right)\times B$，称为"因加"。运算步骤是，先把括号内诸分式化为真分数，如第一个分式$\frac{a_1}{A}=\frac{b_1+m_1A}{A}=m_1\frac{b_1}{A}$($m_1$ 为待定数，满足不等式：$0\leqslant b_1<A$。其中 a_1 名为余，A 为法，a_1 减 A，连减 m_1 次

之后，剩余 b_1，小于 A，不能再减，b_1 名为残。每个分式都如此相"减"为"各以其余减法"，得：

$$m_1\frac{b_1}{A}+m_2\frac{b_2}{A}+m_3\frac{b_3}{A}+\cdots\cdots m_n\frac{b_n}{A}=(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots m_n)$$

$$\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots b_n}{A}=m\frac{b}{A}$$

$$\left(\frac{a_1}{A}+\frac{a_2}{A}\cdots\cdots\frac{a_n}{A}\right)\times B=m\cdot B\frac{b\cdot B}{A}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.13)$$

其中 $b_1+b_2+\cdots\cdots+bn=b$ 叫做"全余"，亦所谓"残者为全余"。$(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)B=bB$，叫做"所因之余"，$A$ 又名"全"数。若 $b\cdot B>A$，则将其中的 A 分化为整数 1，入于 mB 中。同时要从 $b\cdot B$ 中减去全数 A。每减一次，mB 增加 1，直到不能再减。《律历志》说是"若所因之余满全(余)[①]以上，皆增全一而加之，减其全余"。若 $b\cdot B<A$，即所谓"因余少于全余者"，这时不存在化为整数的问题，完全按(12.13)式计算，《律历志》说是"即因余少于全(余)者，不增全加，皆得所求"。

第四，单位制。采用两套单位制：

日、余、秒、么；

度、分、篾、幺。

积么成秒，积秒成余，积余成日；不足度者为分，不足分者为篾，不足篾者为幺。余的分母是朔日法或气日法，随具体情况不同而异。由朔望月求得的日，分母用朔日法；由回归年算得的日，分母为气日法。此外，有秒法(48)、么法(5)、蔑法(897)等，以后再作介绍。

此外，对以上各名目还有四分法、三分法等。四分后的名目为小、半、大、全。如 $1\frac{1}{4}$秒为秒小，$1\frac{2}{4}$秒为秒半，$1\frac{3}{4}$秒为秒大等。三分法是把以上各名目均分为三份，其一为少，其二为太。如三分之一秒为秒少，三分之二秒为秒太。

第五，由日数推日名、辰名者(称"日命以日辰者")，数满旬周(60)则除去之。若所去日辰数有畸零(分、余、秒、蔑)者，应连整数、畸零一并除去之。被减数之中只含减数的整数部分，畸零不足，不可相减。

① "余"字衍文。

第六，秒、篾、分、余的加减乘除法。减法："若减者，秒篾不足，减分余一（即'自分余借一'），加法而减之（加上与除数一样大的数目到秒蔑中，而后再减）。"若分余不足减，从比分余大的单位（日、度或其他）中借一，而后减。凡是代分数，或加或除，都应该连同整数、分数一起加除（"皆当连全及分余共加除之"）。若是乘法，须先把代分化为假分（"母必通全内子"），乘毕再重新化为代分（"乘讫根除"）。对于分母不同的分数加法（"或分余相并，母不同者"），每个分子与其他分母相乘，所得积彼此相加〔"子乘（母）[①] 而并之"〕，作为分子；各分母相乘作公分母（"母相乘为法"）。分子大于或等于分母，则从分子中减去分母，化为整数（"满法从一为全"）。就是先把分母通分（称为"齐同"）。上面从分子中除去分母化为整数，若有剩余（"既除为分余而有不成"），整数为分、为余，剩余的就是秒，是篾，秒、篾数的算法是把余数乘以秒法或篾法，再除以分母（"法乘而又法除"），就得到秒、篾数。已得秒、篾而仍有剩余，又无须继续求下一阶精确度的小数者，将余数四舍五入即可（"过半从一，无半弃之"）。对于分母不同的分数除法，如$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$。要以除数的分母与被除数的分子相乘，除以被除数的分母（"以彼所法之母乘此分余，而此母除之"），作为分子。除不尽者，若须求得次一级商（由分、余求秒、篾），将余数乘秒法或篾法，再除。在上例中，$\frac{ad}{b}$为分子，$\frac{ad}{b}=m\ \frac{p}{b}=m\ \frac{p\times\text{秒法(或篾法)}}{b}=m$ 分余 Q 秒蔑$\frac{n}{b}$。将此"分子"用除数的分子再除$\left[\frac{m\ \text{分余}\cdot Q\ \text{秒蔑}\frac{n}{b}}{c}\right]$得商数。若要求更次一级商（么、幺），可仿上法把余数 n 乘么法或幺法，除以 b 得么、幺。

第七，名词解释。除后有余数者称为"不尽"，或说是"不如"。分子小于分母，不可除者，称为"不成"。

第八，分子中有小、半、大或少、太等名目的分数加减法。分母相同

① "母"为笔者所加。

者，须把小、半、太或少、太化为次一级单位的数字，而后加减。如$\frac{m\text{太}}{a}+\frac{n\text{半}}{a}$，$m$ 和 n 的单位是分，须将太、半化为篾。方法是把太表示为$\frac{2}{3}$，半表示为$\frac{2}{4}$，各与篾法相乘，即将篾法除以 3，乘 2 得太数（设为 b），除以 4 乘 2 得半数（设为 c），m 分 b 篾与 n 分 c 篾就可以相加减了。加减得的和差作分子，仍以公分母 a 作分母，约简后就得到了所求数。

第九，对盈泛、亏总、泛总等名称的解释。说"秋分后春分前为盈泛，春分后秋分前为亏总"。在以后运算中涉及此两名者，都用前面提到的数字代替，即盈泛＝16，亏总＝17。又说："泛总为名，指用其时。"意思是泛总是个时间概念。它的划分，以春分为界，在春分后者为亏，春分前者为盈。至于盈泛、亏总为 16、17 的理由，没有论及。

第十，以后术文中涉及以上概念而没有解释者，解释法都与以上相同〔即所谓"凡所不见，皆放（仿）于此"〕。

2. 推气术

（1）参数。

气日法 46644 和岁数 17036466.5。皇极历的回归年平均数取为 $365\frac{11406.5}{46644}$日$=\frac{17036466.5}{46644}$，分子为岁数，分母为气日法。岁数者，一岁之日分数者也；气日法者，则是指与计算节气有关的日法。此是名称由来。

度准 338。岁率的一半为度准。

约率 9。朔日法的一个因子：9×138＝朔日法。

气辰 3887。使 1 日分数等于气日法，1 个时辰的分数，便是气辰（46644÷12＝3887）。

余通 897。气日法的另一个因子。即气日法 46644＝897×52。897 名为余通，前文已经说过，52 名为日干元。

秒法 48。若求每气日数：$365\frac{11406.5}{46644}\div 24=15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}$日。其中 15 单位是日，10192 的单位是余，37 的单位是秒。秒的分母 48 就叫做

秒法。

么法5。秒下为么，么的分母是5。与秒法一样，也是在实际计算中得到的，例如，计算五行日数：$365\dfrac{11406.5}{46644}\div 5=73\dfrac{2281\dfrac{14\frac{2}{5}}{48}}{46644}$日。即每行所主日数为73日2281余14秒2么。其中5为么法，48为秒法。

(2)推算二十四节气公式。

先求所求年冬至距天正月朔日的日数，皇极历所给公式是：

$$\frac{\dfrac{\dfrac{闰衰}{2}\times 朔实+度准\times 朔余}{约率}}{气日法}=(冬至)去经朔日数\frac{气余}{气日法}\quad\cdots\cdots\quad(12.14)$$

此式可以这样推出：按以前的历法知识，冬至去朔的日数由两项组成：一是计算积月时得到的不够1月的部分($\dfrac{闰衰}{岁率}$)及由积月计算积日时得到的不足1日的部分($\dfrac{朔余}{朔日法}$)。前者单位是月，化为日后与后者相加即为所求：

$$\begin{aligned}冬至距经朔日数&=\frac{闰衰}{岁率}\times\frac{朔实}{朔日法}+\frac{朔余}{朔日法}\\&=\frac{闰衰\times 朔实+岁率\times 朔余}{岁率\times 朔日法}\\&=\frac{\dfrac{闰衰}{2}\times 朔实+度准\times 朔余}{度准\times 朔日法}\\&=\frac{闰衰/2\times 朔实+度准\times 朔余}{约率\times 气日法}\end{aligned}$$

上式右端与(12.14)式左边等效。若把上式左端中包含的整数和分数都表示出来，就得到与(12.14)式完全相同的形式了。

(12.14)式算得的日及余是自夜半为1日之始的日数及余。皇极历以晨时为1日始，晨前至夜半在(12.14)式为今日，在皇极历系昨日，皇极历的日数及余比(12.14)式所得少约$\dfrac{3}{4}$日，所以，《律历志》给出(12.

14)式之后，又说道，把(12.14)式算得的气余"加夜数之半者，减一日"：

$$\frac{\text{(冬至去天正月经朔日之)定余}}{\text{气日法}}+(1\text{日}-\text{夜数之半})$$

$$=\frac{\text{冬至去经朔定余}}{\text{气日法}} \qquad (12.15)$$

其中冬至"去经朔日"《律历志》称为"冬至恒日"，"气余"称为定余，"定"是误字，为与(12.14)式一致，"恒日"仍用"去经朔日"名。又"夜数之半"指半夜的漏刻数。二十四节气半夜漏刻数，《律历志》有附表(见后文)。(12.15)式意义如图12.1，C 为天正冬至夜半，CD 为气余。O 原为头日夜半。冬至点 D 所在日原自夜半 C 点始，改为每日起点自晨始之后，冬至 D 所在日变成了自头日晨 B 点始，与(12.14)式的计算结果相比，所得"冬至去经朔日"数少 1 日，气余增加 $BC=OC-OB$，气余所增就是(12.15)式。《律历志》说是：气余"乃加夜数之半，减一日"。

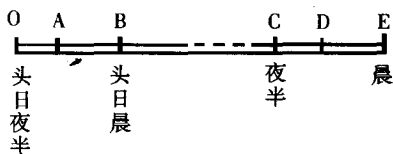



图 12.1　定余计算图

若(12.25)式算得的结果小于 1，则(12.14)式所得"去经朔日数"去 1 日；大于 1 则不去。《律历志》只说了后句"满者因前"。即所得"满"气日法(大于 1)，冬至去经朔日数"因前"所得，不再增减。否则须减 1 日。

求冬至所在辰：皇极历的时辰不是自夜半子初时起，而是自子半始。所以，(12.14)式算得的气余若小于半气辰(1943.5 分)，冬至加辰在子半到丑初之间("子半后")。若气余大于半气辰，则：

$$\frac{\text{气余}+\text{半气辰}}{\text{气辰}}=\text{辰次数}\frac{\text{辰余}}{\text{气辰}} \qquad (12.16)$$

"辰次数"算外，为冬至所在辰。

再将 1 辰分为 12 份，以其中 1 份除辰余，看辰余相当于几份(即相当于气辰的十二分之几)：

$$\frac{\text{辰余}}{\text{气辰}/12}=\frac{\text{辰余}\times 12}{\text{气辰}}=\text{余次数}\frac{\text{余次余}}{\text{气辰}} \qquad (12.17)$$

其中"余次数"是 1 至 12 的自然数，余次余＜气辰。这两个名称是笔者

杜撰，《律历志》只说以“十二辰乘余”，得数为若干，名为某，没有得数的名称是某。得数自 1 至 12 名称由来见图 12.2，先把 1 辰均分为 4 份：小、半、大、全；再将此均分为 3 份，以少、太名之。把这些名字都写在图上方。最后把此辰均分为 12 份，自第 4 份以上的名称《律历志》都已给出，写在图下方。按这种命名规律，第 1 至 3 份的名称可以补出(图中括号内名称)。

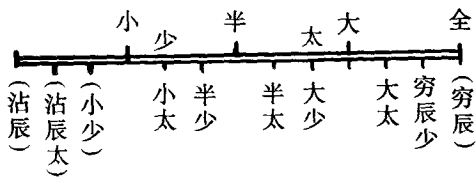



图 12.2 分法

对(12.7)式后边余数(不满十二分之一辰的部分：余次余/气辰)采用四舍五入法，若余次余/气辰小于 0.5，舍去之，称为退；余次余/气辰大于 0.5，化为 1，入整数，叫做进。退者，其前面的(较小的)整数称为强：进者，它后面的(较大的)整数称为弱。如“余次数”为 5，若余次余/气辰小于 0.5，舍去后得 5 强，名半少强；若余次余/气辰大于 0.5，化为整数 1，入于余次数 5 之中，余次数成了 6 弱，名为半弱。

《律历志》说：“初不成一而有退者，谓之沾辰；初成十一而有进者，谓之穷辰。”“一”和“十一”各指 12 等份中的 1 份和 11 份。全文意思是：余次数不足 1，$\frac{\text{余次余}}{\text{气辰}}<0.5$，而被舍弃者，余次数成为 0，称为沾辰；余次数为 11，$\frac{\text{余次余}}{\text{气辰}}>0.5$ 而进 1，使余次数变为 12 者，称为穷辰。

皇极历以晨前为昨日，而夜漏长短又不同，这就可能出现 1 日内有两个相同的时辰名。比如某日卯时三刻黎明，次日卯时四刻黎明。某日就有两个“卯时三刻”。对于这种情况需加区分，如云“冬至在某日晨卯时三刻”，或在“次日晨前卯时三刻”。区别在于各自指出了相邻。《律历志》说，“其名有重者，则于间可以加之”，于相同辰名之间增加一些文字以区别之。所增为邻近日名，即“辨日分辰而判诸日”。

《律历志》说：“因冬至有减日者，还加之。每加日十五，余万一百九十二，秒三十七，即各次气恒日及余。”“冬至有减日者”，“减日”是指利用(12.15)式计算“冬至去朔定日”，使发生在夜半到次日黎明之间的冬至日名提前一日，归入头日之中。但冬至的实际位置并未因日名的变化

而改变。所以，计算一般节气并不用(12.15)式得到的"定余"，仍用(12.14)式算出的气余，而另立(12.16)式计算辰次数。既然如此，若冬至发生在黎明以后，即(12.14)式算出的气余大于所在气半夜漏刻数，不会因日始的改变，对冬至所在日名产生影响，就不必进行(12.15)式的"减日"计算，可直接由(12.14)式算得的恒日数定冬至所在日名。由冬至求下气日名时，在(12.14)式算得的结果上加上1气日数 $15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}$日即可。就是：

$$(\text{冬日})\text{去经朔日数}\frac{\text{气余}}{\text{气日法}}+15\frac{10192\frac{37}{48}}{\text{气日法}}=\text{次气恒日}\frac{\text{余}}{\text{气日法}}\quad\cdots\ (12.18)$$

继续算下去，可得每气恒日及余。问题之一是对于利用(12.15)式通过减日改变了冬至日名的情形，如何推算次气日及余，前引那句话就是答案："冬至减日者，还加之。"因晨时漏刻数各不相同，从晨时起算求"次气及余"，不胜其繁。所以，仍从夜半起算，这要把在(12.15)式中减去的数字重新加回来，由夜半日及余按(12.18)式计算。

问题之二是，对于(12.18)式算得的次气所在日，仍然存在黎明前属于头日，须对它进行"减日"计算的问题。尽管如此，切记不可直接利用(12.15)式的计算结果求次气，这样做，烦琐而又易生错误。

《律历志》说："诸月齐其闰衰，如求冬至法，亦即其月中气恒日去经朔数。"意思是求中气所在，如求冬至法先按(12.14)、(12.18)式所说确定逐气大、小余，再从中减去所在月的经朔大、小余，得到"闰衰"数(叫做"齐其闰衰")，就是所求中气距朔日数。

"其求后月节气恒日，如次之求前节者减之。"是说：求以后诸月节气恒日时，倘若是由次气求前气，则要减去1气日数 $15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}$日，即减去15日10192余37秒。与前文说的由前气求次气加1气日数正相反。

推气术原文的解释到此为止，有必要把它的算法特征再重复一遍：

首先，它也像以前介绍过的历法那样，由闰衰和积日余分两项相

加，求出冬至距天正朔日的恒日数及余分。不同的是由于它是以晨时为日始，子半为辰始，上面算得的日数还要做“减日”计算才能得到冬至日名，而求冬至加辰不是用“减日”计算得到的“定余”，仍由恒日余分求加辰。即冬至日及辰不是由同一式得到的，一须经减日计算，一则不必。

其次，求冬至加辰的(12.16)式左端是“气余＋半气辰”，而不是“气余－半气辰”。表示皇极历之所谓“时从子半”，并非真的从子时半开始，它仍然是从子初开始。不过通常历法所说的“子初”，皇极历把它叫做“子半”就是了。因此，它算出的辰次数比通常历法凭空多了半辰。

再次，计算每一个节气都要由上气恒日求该气恒日，再由减日法得定日日名甲子，不胜其繁。刘焯批评张胄玄《大业历》时，说它“时不从子半，晨前别为后日”，是“违古且疏”、“乖天爽命”。截至今日，除刘焯本人的历法之外，还不知有哪一家的历法是“时从子半”，晨前不作后日的。所谓“违古”，不知从何说起。

3. 推日行迟速

(1)日行速度的调整。

表 12.1 的解释主要方面已见“校勘记”〔六〕了，大致意思是，“缠衰”栏所列数值是本气内太阳实行度与平行度的差，乘以日干元(52)得到的积。“衰总”栏中数字是其前各气缠衰值的累积数。“陟降率”栏中数值是本气内太阳实行度、平行度的差与月每日平行度之比，乘以朔日法所得的积。陟为增，降为减，都是实行相对于平行而言。“迟速数”栏中数值是其前各气陟降率的累积数。

此外再说明以下几点：

第一栏月序数自“十一月”始，与前面“总则”所说(“统求所起，本于天正”)相符，这也是计算历法的传统。

第二栏所列二十四节气顺序与后世相同，而同时期张胄玄的大业历则是先启蛰后雨水，与秦汉间历法相同。这向我们传递了二十四节气形成历史的部分信息。

第四栏衰总有先、后端，第六栏迟速数栏有迟、速本，代表的数值都是 0。

表 12.1　日行迟速表

月序	气	缠衰	衰总	陟降率	迟速数
十一月	大雪				
	冬至中	增 28	先端	陟 50	速本
十二月	小寒节	增 24	先 28	陟 43	速 50
	大寒中	增 20	先 52	陟 36	速 93
正月	立春节	增 20	先 72	陟 36	速 129
	雨水中	增 24	先 92	陟 43	速 165
二月	惊蛰节	增 28	先 116	陟 50	速 208
	春分中	损 28	先 144	降 50	速 258
三月	清明节	损 24	先 116	降 43	速 208
	谷雨中	损 20	先 92	降 36	速 165
四月	立夏节	损 20	先 72	降 36	速 129
	小满中	损 24	先 52	降 43	速 93
五月	芒种节	损 28	先 28	降 50	速 50
	夏至中	增 28	后端	陟 50	迟本
六月	小暑节	增 24	后 28	陟 43	迟 50
	大暑中	增 20	后 52	陟 36	迟 93
七月	立秋节	增 20	后 72	陟 36	迟 129
	处暑中	增 24	后 92	陟 43	迟 165
八月	白露节	增 28	后 116	陟 50	迟 208
	秋分中	损 28	后 144	降 50	迟 258
九月	寒露节	损 24	后 116	降 43	迟 208
	霜降中	损 20	后 92	降 36	迟 165
十月	立冬节	损 20	后 72	降 36	迟 129
	小雪中	损 24	后 52	降 43	迟 93
十一月	大雪节	损 28	后 28	降 50	迟 50
	冬至				

称先、后或迟、速，都是把本栏数值分成两段的意思。如衰总栏的数值分为先段、后段，迟速数栏内数值分作迟段、速段。称先、称后，并无先后可言；称迟、称速，单从陟降率栏中的数字变化，也看不出是迟是速。它反映的是制历者一种基本认识：一年之中，冬至时日行最速。此后渐减，到夏至时日行最迟。夏至以后又渐增到极值。因此认为冬至到夏至日行

速，夏至到冬至日行迟。比较起来，称先、后似乎比称迟、速概念更准确一些。

(2)推迟速术。

这一部分交待计算日行迟速数的公式。术文依次给出如下算式：

$$\frac{\text{所在气朓降率}+\text{后气朓降率}}{2}\times\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}=\text{气末朓降率} \quad \cdots\cdots (12.19)$$

$$(\text{所在气朓降率}-\text{后气朓降率})\times\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}=\text{总差} \quad \cdots\cdots (12.20)$$

$$\text{总差}\times\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}=\text{别差} \quad \cdots\cdots (12.21)$$

先把(12.20)式代入(12.21)式得出别差的表达式：

$$(\text{所在气朓降率}-\text{后气朓降率})\times\frac{\text{日限}^2}{\text{泛总}^2}=\text{别差} \quad \cdots\cdots (12.22)$$

因总差、别差都是正数，(12.20)、(12.22)式成立的条件是：所在气朓降率＞后气朓降率，就是术文说的“率前多者”，对于这种情况：

$$\text{气末朓降率}+\text{总差}=\text{气初日朓降率} \quad \cdots\cdots (12.23)$$

$$\text{气初日朓降率}-\text{别差}=\text{每日数} \quad \cdots\cdots (12.24)$$

把(12.23)式代入(12.24)式：

$$\text{每日数}=\text{气末朓降率}+\text{总差}-\text{别差} \quad \cdots\cdots (12.25)$$

再分别把(12.19)、(12.20)、(12.22)式代入(12.25)式，得：

$$\text{每日数}=\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}\cdot\frac{\text{所在气朓降率}+\text{后气朓降率}}{2}+\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}(\text{所在气朓降率}-\text{后气朓降率})-\frac{(\text{日限})^2}{(\text{泛总})^2}(\text{所在气朓降率}-\text{后气朓降率}) \quad \cdots\cdots (12.26)$$

若所在气朓降率＜后气朓降率，就是术文说的“率前少者”。

$$\begin{aligned}\text{每日数}&=\text{气末朓降率}-\text{总差}+\text{别差}\\&=\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}\cdot\frac{\text{所在气朓降率}+\text{后气朓降率}}{2}-\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}(\text{所在气朓降率}-\text{后气朓降率})+\frac{(\text{日限})^2}{(\text{泛总})^2}(\text{所在气朓降率}-\text{后气朓降率})\end{aligned} \quad \cdots (12.27)$$

在(12.27)式中，由于括号内的数值是负数，括号前的运算符号自然变号，“－”变为“＋”，“＋”变为“－”。变号后与(12.16)式相同。因而(12.

26)、(12.17)式可合为一式，统一用(12.16)式表示。当所在气陟降率<后气陟降率时，代入数值，(12.26)式自动变成了(12.27)式的形式。

这样，根据古代算术传统，二气差只取正数，《律历志》给出了(12.26)和(12.27)两个计算式。运用今日算术知识，允许二气差为负值，两式可以合并成(12.26)一个计算式。

问题在于怎样理解这两个计算式。为了在图上表示得更清楚，(12.26)、(12.27)式中各项参数改用拉丁字母表示，设：

日限为 t，

泛总为 l，

所在气陟降率为 $\triangle_1$，

后气陟降率为 $\triangle_2$，

每日数为 T。

代入(12.26)式：

$$T=\frac{t}{2l}(\triangle_1+\triangle_2)+\frac{t}{l}(\triangle_1-\triangle_2)-\frac{t^2}{l^2}(\triangle_1-\triangle_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12.28)$$

如图 12.3 坐标图，横坐标是时间轴，纵坐标是表示陟降率数的 Y 轴，直线 CE 是函数 $Y=\dfrac{A(t)-p}{Q}$ 的图形。其中 $A(t)$ 是时间 (t) 的函数〔对于此图，$A(t)$ 为降函数〕，表示日实行度，P、Q 都是常数，P 为日每天平均行度，Q 为月每天平均行度。显然 Y 是日行陟降率随时间变化的函数，变化量等于 Y 于时间轴之间四边形的面积。

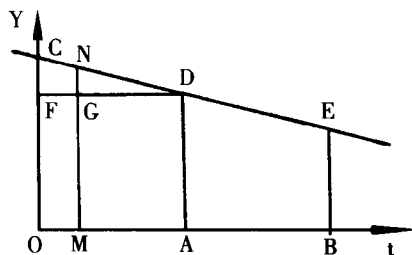



图 12.3　求日行陟降率法意图

设 O 为冬至点，OA、AB 各为 1 气日数，即 A 为小寒点，B 为大寒

点。那么，日行在冬至气中产生的迟疾数是四边形 $OADC$ 的面积($\triangle_1$)；在小寒气中的迟疾数是四边形 $ABED$ 的面积($\triangle_2$)。而 OC 为冬至气初朓降率，AD 为冬至气末朓降率。对于小寒气，AD 为气初朓降率，BE 为气末朓降率。CF 为冬至气中的总差，$\frac{CF}{OA}$为别差。

再设 $OM=1$ 日，MN 为冬至后第 1 日的朓降率，四边形 $OMNC$ 的面积是冬至后 1 日内的朓降数。

由于 AD 是梯形 $OBEC$ 两腰的中点连线，据梯形面积公式知：

$$AD=\frac{\triangle_1+\triangle_2}{2OA}$$

因 $OA=1$ 气日数$=\frac{\text{泛总}}{\text{日限}}=\frac{l}{t}$，代入上式，得：$AD=\frac{\triangle_1+\triangle_2}{2}\times\frac{t}{l}$。这就是前面的(12.19)式。同样可以求得：$OC=AD+CF$，其中 AD 是气末率，CF 为总差，此式就是前面的(12.23)式。从图中面积关系可知：$CF=\frac{\triangle_1-\triangle_2}{OA}=(\triangle_1-\triangle_2)\times\frac{t}{l}$，代入：$OC=\frac{\triangle_1+\triangle_2}{2}\cdot\frac{t}{l}+(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t}{l}=\frac{3\triangle_1-\triangle_2}{2}\cdot\frac{t}{l}$。

又，利差$=\frac{CF}{OA}=CF\times\frac{t}{l}$，此式就是前面的(12.21)式。代入 CF 的表达式得：别差$=(\triangle_1-\triangle_2)\times\frac{t^2}{l^2}$。此为表达式(12.22)。下面为求 MN 的表达式，$MN=AD+NG$，由于$\triangle DNG\backsim\triangle DCF$，$\frac{NG}{GD}=\frac{CF}{OA}$，$NG=\frac{CF}{OA}\cdot GD=\frac{CF}{OA}(OA-OM)=\frac{CF}{OA}(OA-1)=CF-\frac{CF}{OA}$。就是 NG 等于总差减别差，代入 MN 的表达式：

$$MN=AD+NG=AD+CF-\frac{CF}{OA} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (12.29)$$

式中 AD 为气末率，CF 为总差，$\frac{CF}{OA}$为别差。与(12.25)式对照，可知 MN 就是每日数 T。

把前面求得的 AD、CF 以及$\frac{CF}{OA}$的表达式代入，即可得：

$$T=\frac{t}{2l}(\triangle_1+\triangle_2)+\frac{t}{1}(\triangle_1-\triangle_2)-\frac{t^2}{l^2}(\triangle_1-\triangle_2)$$

这就是前面的(12.28)式。

(12.26)式的法理既明，接着往下看本段的术文："所历推定气日随算其数，陟加降减其迟速，为各迟速数。"是说按历法推出某气中某日的大、小余之后，随即推算它的陟降率，陟则加之，降则减之，原来的大、小余增减该日的陟降率后得到的是该日的迟速数(计入迟速以后的大、小余数)。如此可以算出每一日的迟速数来。须加说明的是

首先，(12.28)式算得的是入气后第一日的陟降率数，须乘以月每日平均行度、除以朔日法之后才可与"推定历日"相加减。

其次，求出入气后第一日陟降率后，推算自该日起到气末陟降率总的增减量：新的$\triangle_1$。将它代入(12.28)式重新计算，得出该日后第一日，或者说是入气后第二陟降率数……如此进行下去，可求该气中每一日的陟降率数。欲直接求任一日陟降率数，参见后(12.39)式。

术文接着说："其后气无同率及有数同者，皆因前末，以末数为初率，加总差为末率，及差渐加初率，为每日数，通计其秒，调而御之。"原文中间都用逗号分隔，其实是有层次的，"皆因前末"和"每日数"后可改用句号，把这段话分为三层。第一层是说前气每日数算毕，要算后气每日数，不论后气有无与前相同的数据，只根据前气的末率计算就够了。第二层是说怎样由前气末率计算后气"每日数"：前气的末率就是后气的初率，初率加总差得末率，别差加初率得每日数。

对后一句话要稍加说明，原文是"及差渐加初率，为每日数"。"及"是"别"字的误文。因为，由前(12.29)式，与初率相加减得每日数的只有别差。其次(12.29)式中初率减别差得每日数，此处说是"加"初率。事实上加减皆可。在推导(12.29)的例子中，Y 曲线是个降函数，即是"率前多者"那种函数，后面每一日都比前天的陟降率少，所以用减号。若Y是升函数，自然要用加号。

引文的第三层意思是，计算"各迟速数"时，不但要计入每日数的日、余，连秒数也要"通计"在内，这算出的调整后的气日数，才能使用。

从纯粹数学的角度看,(12.28)式是已知函数某二点数值,求这二点间任何一点值的方法,称为插入法。在所求值的表达式中有二项,又叫做二次插入法。用二次插入法求中间值,不仅是我国天文学的重要成就,也是数学达到了一个新水平的表现。

(3)求月朔弦望应平会日所入迟速。

就是求入于某气的朔(或弦或望)日由于日缠变化应加减的迟速数。所谓"平会日"所入迟速,是指朔弦望的大、小余都是平朔、平弦、平望的大、小余。术文所给公式如下:

$$〔日+(入气辰-经余辰)〕\times 日限=入限 \quad \cdots\cdots (12.30)$$

对前多者(气初陟降率比气末大者):

$$\frac{入限\times 末率}{日限}=总率 \quad \cdots\cdots (12.31)$$

$$(泛总-入限)\times\frac{总差}{泛总}=入差 \quad \cdots\cdots (12.32)$$

$$(入差+总差)\times\frac{入限}{2\,日限}+总率=总数 \quad \cdots\cdots (12.33)$$

对前少者(气初陟降率比气末小者):

$$\frac{入限\times 初率}{日限}=总率 \quad \cdots\cdots (12.34)$$

$$\frac{(入限)^2\times 别差}{(日限)^2\times 2}+总率=总数 \quad \cdots\cdots (12.35)$$

不论"前多"或"前少":

$$其气迟速数\pm 总数=定 \quad \cdots\cdots (12.36)$$

$$经余\pm 定=平会日所入迟速定日及余 \quad \cdots\cdots (12.37)$$

若把(12.30)~(12.36)式都代入(12.37)式得到一个"朔弦望应平会日所入迟速"数的复合计算式,这个式子太长。若改用西文字母表示,又不易理解其含义。姑且先用以上文字式讲法意,最后再用西文字母写出它的复合式。

与前(2)相同,绘出陟降率函数的曲线图如图 12.4:EF 为函数 $Y=\frac{A(t)\pm P}{Q}$ 的直线,AB 为时间轴,$AB=BC=1$ 气日数,MN 是在节气 AB 之间的朔(或弦、或望)日的陟降率。对于"前多"的情形,AF 是初

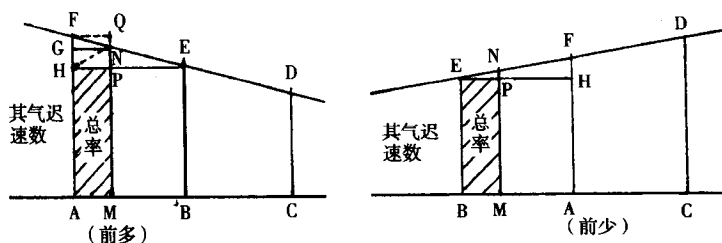



图 12.4　求平会入气迟速图

率，BE 是末率。对于前少的情形，BE 为初率，AF 为末率，$AB=\frac{\text{泛总}}{\text{日限}}$。由本节 3(2)知 FH 为总差，$\frac{FH}{AB}$为别差。下边讨论这一部分初见的几个概念。

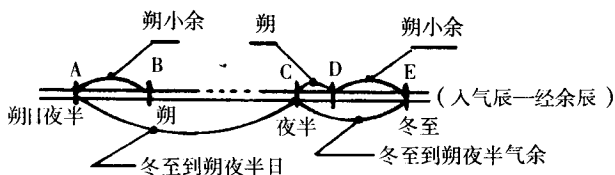



图 12.5　入限图

先说"入限"(见图 12.5)：在(12.30)式中，"入气辰"是前(12.14)式中算得的冬至去经朔(夜半)日及气余中的"气余"CE，除以辰法后化成的时辰数。说是"冬至去经朔(夜半)气余"，其实是冬至点到冬至所在日夜半之间的日分数。它由两部分相加算得：一是积月余分 DE，皇极历叫做闰衰的零分数，一是推月朔算得的积日余分，又叫做朔小余 AB，图中取 $DE=AB$。把这个朔小余换算成时辰数，就是(12.30)式中的经余辰。那么"入气辰—经余辰"，表示合朔点到冬至点之间(BD)整日之外的时辰数(DE)，亦即是合朔点到冬至点之间的积日余分(化辰后的数字)。(12.30)式中的"日"正是冬至到合朔点之间的日数，因此(12.30)式中中括号内的数：日＋(入气辰－经余辰)＝$BD+(CE-CD)=BD+DE=BE$，就是冬至距朔，或者说是朔入中气的日数及余。

亦即图 12.4 中 AM(前多者)或 BM(前少者)的长。$AM\times$日限＝入限。

再看总率的意义。在(12.31)式中：

$$总率=\frac{入限\times末率}{日限}=AM\cdot末率$$

对于"前多"的情形，是指四边形 $AMPH$ 的面积；对于"前少"的情形，是指四边形 $BMPE$ 的面积(图 12.4 中阴影部分)。

再看(12.32)式中的"入差"，把左边化简：

$$\begin{aligned}(泛总-入限)\times\frac{总差}{泛总}&=总差-AM\cdot日限\cdot\frac{总差}{泛总}\\&=总差-AM\cdot\frac{总差}{AB}\\&=FH-\frac{AM}{AB}\cdot FH=FH-FG=NP\end{aligned}$$

即"入差"等于图中 NP 的长。

(12.33)式中的"总数"，就是四边形 $AMNF$(前多者)或四边形 $BMNE$(前少者)的面积。可以这样证明，(12.33)式左端中：

$$\begin{aligned}&(入差+总差)\times\frac{入限}{2\,日限}\\&=(PN+FH)\times\frac{AM}{2}=四边形\ HPNF\ 的面积\end{aligned}$$

此数＋总率，恰好是四边形 $AMNF$ 的面积。这是对于前多的情形。前少者与前相同(略)。

在(12.36)式中，"其气迟速数"，是指朔弦望所入气的迟速数。由"迟速数"的定义知，它是该气以前各气朓肭率的累积数，就是图 12.4 中初率 AF(前多者)或 BE(前少者)左边面积的总和。那么(12.36)式中的所谓"定"，就是朔弦望已前朓肭率的总数，包括所入气以前的朓肭数及入气后朓肭数二部分。式中"＋"、"－"号由迟速数定，迟数用"－"号，速数用"＋"号。

(12.37)式中的"经余"指经朔日及余，"定"是(12.36)式中的调整数。"定"是"迟"数，其前用减号；定是速数，其前用加号。与本节 3(2)一样，这两项加减时，须将单位划同，经余的单位是日度、分，"定"的单位是朓肭率数，须将朓肭率化为度分，先除以朔日法(1242)，再乘以月每

日平均行度之后才可与经余相加。

下边把(12.37)式的复合式用西文字母表示,设:

日限为 t,

泛总为 l,

四边形 $ABEF$ 的面积为$\triangle_1$,

四边形 $BCDE$ 的面积为$\triangle_2$,

$AM=a$,

其气迟速数为 S_0,

经余为 $K(A)$,

朔弦望应平会日所入迟速为 S_0。

由本节 3(2):末率$=\dfrac{\triangle_1+\triangle_2}{2}\times\dfrac{t}{l}$

$$总差=(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}$$

$$初率=末率+总差=\frac{\triangle_1+\triangle_2}{2}\cdot\frac{t}{l}+(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}$$

$$别差=(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}$$

(12.30)式写为:

$$入限=a\cdot t$$

(12.31)式写为:

$$总率=\frac{at\cdot\dfrac{\triangle_1+\triangle_2}{2}\cdot\dfrac{t}{l}}{t}=\frac{a(\triangle_1+\triangle_2)}{2}\cdot\frac{t}{l}$$

(12.32)式写为:

$$入差=(l-at)\cdot\frac{(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\dfrac{t}{l}}{t}=(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}-a(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}$$

(12.33)式写为:

$$总数=\left[2(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t}{l}-a(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}\right]\frac{at}{2t}+\frac{a(\triangle_1+\triangle_2)}{2}\cdot\frac{t}{l}$$

$$=\frac{a}{2}(\triangle_1+\triangle_2)\frac{t}{l}+a(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}-\frac{a^2}{2}(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}$$

$$=\frac{a}{2}(3\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}-\frac{a^2}{2}(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}$$

(12.36)式写为：

$$定=S_0\pm\frac{a}{2}(3\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}-\frac{a^2}{2}(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}$$

(12.37)式写为：

$$S=K(A)\pm S_0\pm\frac{a}{2}(3\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}-\frac{a^2}{2}(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (12.38)$$

这也是用二次插入法得到的计入日行改正值的求朔方程。

(4)求每日所入先后。

"先后"是前面抄录的日行迟速表中衰总栏内的用语：日行速为先，迟为后。所以，"求每日所入先后"就是推算某气中的某日所具有的"衰总"数。本节3(2)是推算每日迟速数，这里推算每日衰总数。这两个数除了单位不同之外，别无差异，因此，推算法也必相同，只要把(12.28)式中的陟降率改为缠衰，迟速数改为衰总就可以了。术文说是"乃缠衰加陟降率，衰总如迟速数，亦如求迟速法"。术文还说，须将某日所在气及后气的缠衰和衰总数乘以余通，而后才能按"推每日迟速数"的公式推每日先后数。乘余通是由于缠衰和衰总都是日实行、平行差与日干元的乘积，再乘余通，相当于日实行、平行差与气日法的乘积。而陟降率是日实行、平行差与月平均行度之比，再与朔日法相乘所得的积。气日法、朔日法，月平均行度都是常数，不改变缠衰、陟降率函数的直线性质，因此求"每日先后"与"求每日迟速数"可以用相同的方程，即都用前(12.28)式：$T=\frac{t}{2l}(\triangle_1+\triangle_2)+\frac{t}{l}(\triangle_1-\triangle_2)-\frac{t^2}{l^2}(\triangle_1-\triangle_2)$计算。不同的是"求每日先后"时，$\triangle_1$、$\triangle_2$是所在气与后气的衰总数。

从本节3(2)中介绍的推算过程知，(12.28)式是求入气后第一日末时的陟降率数的方程，所以影响方程解的只有$\triangle_1$、$\triangle_2$。若求第二日陟降率，须从$\triangle_1$中减去第一日陟降率，得到新的$\triangle_1$，再用(12.28)式计算。

若求任意日的缠衰，可利用前面的"求日行陟降率法意图"(图12.3)重新推导，增设$OM=a$，其他符号均不变，如图可知：

末率：$AD=\frac{(\triangle_1+\triangle_2)}{2AO}=\frac{1}{2}(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t}{l}$

总差：$CF=\frac{(\triangle_1-\triangle_2)}{OA}=(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t}{l}$

入差：$NG=\frac{DG}{DF}\times CF=\frac{OA-a}{OA}\cdot CF=(1-a\cdot\frac{t}{l})\cdot(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t}{l}$

$$=(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t}{l}-a(\triangle_1-\triangle_2)\cdot\frac{t^2}{l^2}$$

$$MN=AD+NG=\frac{1}{2}(3\triangle_1-\triangle_2)\frac{t}{l}-a(\triangle_1-\triangle_2)\frac{t^2}{l^2}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.39)$$

与(12.28)式相比，此式右边第二项多乘了一个 a。

还可仿照(12.36)式求出定数表达式：

其气衰总数±总数＝定数

其中总数不是入气降率调整数的总数，而是入气衰总调整数的总数；所得定数也不像(12.36)式中的定数是入气陟降率数的定数，而是入气衰总的定数。

(5)求定气。

每年日数除 24，得 $15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}$ 日，为一气平均日(度)数，《律历志》称为“恒气”。对于恒气，日每天行 1 度，每气所行日度数相等。但实际日行是变速的，二十四气日数各不相同。日行恒气度数所需的真日数叫做定气数。《律历志》给出的求定气日名的公式是：

冬(夏)至日及余＋所历日及余＝冬(夏)至后气之定气大、小余
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (12.40)

其中“所历日及余”就是冬(夏)至后，太阳行恒气度和分所需的真日数。可以这样描述：设恒气度及分为 P，与日及余相当，姑且称为日及余。在 P 日内，日每天所行缠衰数为 Q_1、$Q_2\cdots\cdots Q_p$，$Q_1+Q_2+\cdots\cdots+Qp=\sum_1^p Q$，则有：

$$P\pm\sum_1^p Q=\text{所历日及余}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.41)$$

其中$\sum_{1}^{p}Q$叫做气余。P由整日和日余两部分组成，日余的缠衰数可按它在所在日内缠衰数的平均数计算。例如：日余$=\frac{1}{a}$，该日缠衰为b，则日余先后数为$\frac{b}{a}$。

按以往惯例，从(12.40)式求得的"冬(夏)至后气之定气大余"之中减去若干甲子周，剩余的1足1甲子的日数算外，就是所求下气首日名。

欲求冬(夏)至后第二气定日，仍用(12.40)式计算，惟将其中"冬(夏)至日及余"替换成"冬(夏)至后首气定日及余"。如此进行下去，可得每定气首日日名。

《律历志》的术文有几处需要解释："其每日所入先后数即为气余"，"先后数"就是缠衰数，每日缠衰为该日气余。"所历日皆以先加之，以后减之"，某日缠衰就是某日增损数，增则加之，损则减之。惟《律历志》称增损为先后，所以，所历日与先后数的关系是先加后减，(12.41)式描述的就是这种关系：P、Q之间，若Q为先数，则相加，Q为后数则相减。"随算其日，通准其余，满一恒气，即为二至后一气之数。"日和日余通通计算在内，数满一恒气，得到的定日数($P\pm\sum_{1}^{p}Q$)，就是二至以后一定气的数目。特别须说明的是头两句"随算其日，通准其余"，而不是"随算其日，通准先后数"。结合(12.41)式解释：日和余都在P之内，当$P=1$恒气日及余时，$P\pm\sum_{1}^{p}Q$称为一个定气。

由首气定日及余求次气定日及余是："以加二气，如法用别其日而命之。"用文字式表示就是：

首气定日及余+(恒气±二气先后数)=二气定日及余

用同样的方法可得：

二气定日及余+(恒气±三气先后数)=三气定日及余

....

如此进行下去，得以后诸气定日及余。《律历志》说是"每相加命，各得其

定气日及余也”。

也可沿相反的方向计算，由四气求三气，由三气求次气……《律历志》说：“以其先后已通者，先减、后加其恒气，即次气定日及余。”表示为：

第 n 气定日及余－(恒气±先后数)＝第($n-1$)气定气日及余

对于“恒气±先后数”的运算，叫做“其先后已通者”；与第一项相减，先后数变号，叫做“先减、后加其恒气”。惟应注意的是，由后向前计算也称头气、次气……如(12.42)式中的第($n-1$)气称次气，n 气为头气而无疑。

术文最后说“命以甲，各得所求”。将定气大余命以甲子的方法与前同，略。

4. 杂推

(1)求土王。

皇极历用五行中的土行“分王四季”的办法，土王日既明，其余四行所王日不推可知。因此，皇极历推五行只讲土王日推法。法理是：每个回归年有二十四气，分作四季，每季有六个季节。若分为五行，每行合四个多季节。木、火、金、水四行分主四季，都自四立始(木始立春、火始立夏、金始立秋、火始立冬)，由于每行只主四个多节气，每季实有六个节气，剩余的的就由土行作主。只要算出每行所主四气之外另有几日，全部问题就很容易解决了。与以往介绍过的历法一样：一年分主五行，每行主日为：$365\frac{11406.5}{46644}\div 5=73\frac{2281.3}{46644}$日。而皇极历每气日数是 $15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}$日，四气合 $60\frac{40771\frac{4}{48}}{46644}$日，那么：

$$1\text{气主日}-4\text{气日数}=73\frac{2281.3}{46644}-60\frac{40771\frac{4}{48}}{46644}$$

$$=12\frac{8154\frac{10\frac{2}{5}}{48}}{46644}\text{日}$$

由此知四立之后，过四个节气，再加 $12\dfrac{8154\dfrac{10\frac{2}{5}}{48}}{46644}$ 日，便是土王所主日。《律历志》表达为：

四立日及余＋四节气日及余＋土王所入日±先后数

$$=\text{四立日及余}+\text{四节气日及余}+12\dfrac{8154\dfrac{10\frac{2}{5}}{48}}{46644}\text{日}$$

$$=\text{土王所主定日及余} \quad\cdots\cdots (12.42)$$

中华书局1987年版《隋书·律历志》描述上式的文字是："求土王：距四立各四气外所入先后加减，满〔二十〕二日、余八千一百五十四、秒十、么二。"其中有两个重要错误：一是把"所入先后加减"六字断入上句，使文意不可读；二是校勘错误，"二十"为"十"字之误。

由(12.42)式可知，皇极历推算出的土王所主日及余是定日及余，这是它与以往历法都不相同之处。

(2)求七十二候日名。

所求为定候日。方法是先求平候每候日数：每平候日数＝每恒气日数 $\div 3=15\dfrac{10192\frac{37}{48}}{46644}\div 3=5\dfrac{3397\dfrac{28\frac{1}{3}}{48}}{46644}$ 日。而后平候"所历之日皆以先加、后减，随计其日，通准其余，每满其平，以加气日而命之，即得次候日。"意思是：从某个定气日开始，经过一个平候日及余，再计入其间的先后数，得定候。即：

$$\text{定气日及余}+\text{所历日及余}=\text{定候日及余} \quad\cdots\cdots (12.43)$$

设其中的"所历日及余"为 n，每日缠衰数为 MN，则有：

$$MN_1+MN_2+\cdots\cdots+MN_n=\text{气余} \quad\cdots\cdots (12.44)$$

$$\text{所历日及余}=\text{平候日及余}\pm\text{气余} \quad\cdots\cdots (12.45)$$

(12.43)式所得为定气后第二候初始时的大、小余数。以引为初候日，重复进行(12.43)、(12.44)、(12.45)式计算，可得第三候以后各定候的大小余。

(3)气、候表。

表 12.2　七十二候及夜半漏刻、昏中度分表

气	初候	次候	末候	夜半漏	昏去中星
冬至(夜 59 刻 86 分)	虎始交	芸始生	荔挺出	27 刻$_{\text{分}43}$	82 度$_{\text{转分}47}$
小寒	蚯蚓结	麋鹿解	水泉动	27 刻$_{26}$	83 度$_{16}$
大寒	雁北向	鹊始巢	雉始雊	26 刻$_{26}$	85 度$_{6}$
立春	鸡始乳	东风解冻	蛰虫始振	25 刻$_{98}$	87 度$_{49}$
雨水	鱼上冰	獭祭鱼	鸿雁来	24 刻$_{76\text{半}}$	91 度$_{36}$
惊蛰	始雨水	桃始花	仓庚鸣	23 刻$_{77\text{半}}$	96 度$_{3}$
春分	鹰化为鸠	玄鸟至	雷始发声	22 刻$_{50}$	100 度$_{37\text{半}}$
清明	电始见	蛰虫咸动	蛰虫启户	21 刻$_{22\text{半}}$	105 度$_{21}$
谷雨	桐始花	田鼠为驾	虹始见	20 刻$_{3\text{半}}$	109 度$_{39}$
立夏	萍始生	戴胜降桑	蝼蝈鸣	19 刻$_{1\text{半}}$	113 度$_{25}$
小满	蚯蚓出	王瓜生	苦菜秀	18 刻$_{23}$	116 度$_{19}$
芒种	靡草死	小暑至	螳螂生	17 刻$_{69}$	118 度$_{18}$
夏至(夜 40 刻 14 分)	鵙始鸣	反舌无声	鹿角解	17 刻$_{57}$	118 度$_{40}$
小暑	蝉始鸣	半夏生	木堇荣	17 刻$_{69}$	118 度$_{18}$
大暑	温风至	蟋蟀居壁	鹰乃学习	18 刻$_{23}$	116 度$_{19}$
立秋	腐草为萤	土润溽暑	凉风至	19 刻$_{1\text{半}}$	113 度$_{25}$
处暑	白露降	寒蝉鸣	鹰祭鸟	20 刻$_{3\text{半}}$	109 度$_{39}$
白露	天地始肃	暴风至	鸿雁来	21 刻$_{2\text{半}}$	105 度$_{21}$
秋分	玄鸟归	羣养羞	雷始收声	22 刻$_{50}$	100 度$_{37\text{半}}$
寒露	蛰虫附户	杀气盛	阳气始衰	23 刻$_{77\text{半}}$	96 度$_{3}$
霜降	水始涸	鸿雁来宾	雀入水为蛤	24 刻$_{96\text{半}}$	91 度$_{36}$
立冬	菊有黄华	豺祭兽	水始冰	25 刻$_{98\text{半}}$	87 度$_{49}$
小雪	地始冻	雉入水为蜃	虹藏不见	26 刻$_{76}$	85 度$_{6}$
大雪	冰益壮	地始坼	曷旦鸣	27 刻$_{26}$	83 度$_{16}$

对七十二候的说明：

七十二候名源出于《礼记·月令》、《吕氏春秋》十二纪、《淮南子·时则训》等书，从汉代训诂家的解释看，大约是洛中一带的物候。皇极历所载，四季月(三、六、九、十二月)物候一般晚半月左右，大约是由地区

不同造成的。

其次，个别词语需要解释：冬至末候“荔挺出”，郑玄注说“荔挺”，是一种香草，俗名马䪥。高诱注《吕氏春秋》及《淮南子》认为荔是草名，指马荔草；“挺出”是动词，为生长貌。总之“荔”不可理解为南方生产的荔枝之荔。

大寒初候“雁北向”，注家以为是指彭蠡之雁始有北飞之意，与其余诸候，非出一地。

立春初候“鸡始乳”，“乳”释为“卵”，鸡初下蛋的意思，与今日习惯用语不同。

雨水末候“鸿雁来”，白露末候也是“鸿雁来”，二者字面相同，含意不同。白露鸿雁是自“北漠”来；雨水鸿雁是从“彭蠡”来。一来自北，一来自南。鸿雁一作候雁。

惊蛰末候“仓庚鸣”中的仓庚，鸟名，一说指黄鹂鸟，黄鹰(莺)儿。一说为啄木鸟。

立夏次候“戴胜降桑”中的戴胜，《吕氏春秋》作戴任，《淮南子》作戴鵀，高诱解作“鸱也”。就是猫头鹰。其子学飞，从桑中落下，称为“降桑”。

小满次候“王瓜生”。王瓜，《本草纲目》释为马瓟，野生蔓草类植物，结实如瓜，如弹丸大。有的释为栝楼。

夏至初候“䴗始鸣”，䴗指伯劳鸟。中候“反舌无声”，“反舌”，高诱注说“伯舌也”，“伯”字同“百”，言其善鸣，如有百舌。高诱说它能“反其舌，变易其声，效百鸟之鸣”。《本草纲目》说是“今之莺也”，“立春后则鸣啭不已，夏至后则无声”。

秋分次候“䍧养羞”，“䍧”是“群鸟”二字合文。

大雪末候“曷旦鸣”，“曷旦”，鸟名，《吕氏春秋》作“鹖鴠”，高诱释为山鸟，郑玄以为“求旦之鸟也”。但《月令》及《吕氏春秋》等都说是“鹖旦不鸣”。此处缺“不”字，误。

对“夜半漏”的解释，《律历志》给出如下计算公式：

夜半漏×2＝夜刻 ………………………………………………… (12.46)

100刻－夜刻＝昼刻 ……………………………………………… (12.47)

昼刻－5＝日见刻 ………………………………………………………… (12.48)

或： 夜刻＋5＝日不见刻 ………………………………………………… (12.49)

栏中数据刻下小字为分，1 刻＝100 分 …………………………… (12.50)

由此知，皇极历的漏刻法是 1 日分为 100 刻，1 刻为 100 分。那么每个时辰为 8 刻 33 $\frac{1}{3}$ 分，辰刻连用计时很不方便，只能辰自为辰，刻自为刻。即计日刻自 1 至百而止，计日辰自子至亥而止，除了子时 1 刻之外，丑以后各辰均无 1 刻之说。

由栏中数据可知皇极历春秋二分夜半漏各 22 刻 50 分，夜漏为 45 刻，日见及不见各 50 刻。是说在二分日，日出于卯、入于酉，昼夜平分。与张胄玄《大业历》不同。《天文志》说刘焯用的是春秋分"定日"，即以实测出的太阳出卯入酉之日为春秋分。又说冬至夜半漏 27 刻 43 分，那么，夜漏 54 刻 86 分，夜长 59 刻 86 分；夏至夜半漏 17 刻 57 分，夜漏 35 刻 14 分，夜长 40 刻 14 分。即冬至夜长等于夏至昼长，值得注意的是：冬夏至昼夜长短不是通常说的 60 刻与 40 刻，各有畸零分。表明也是由实测而得，是所谓"定日"。由此可以认为，表列数值都是实测值，为"定日"漏刻，不是理论推算值。那么，夜半漏刻的大小就不一定对称分布：夏至前若干气与夏至后对应气的夜漏数不一定相等。表中却是相等的，没有不等，校勘者统统改为相等值。

"昏去中星"栏数值是入气始点到所在日昏中星的角距离。度后小数为转分，单位是 1 度＝52 转分，52 称为转法，后面将解释其含义。

(4)求日出入辰刻。

《律历志》公式为：

$\frac{100\text{刻}}{12\text{辰}}=8\frac{1}{3}\text{刻/辰}$ ………………………………………………… (12.51)

半不见刻＋半辰＝日出实 ………………………………………… (12.52)

日出实＋日出见刻＝日入实 ……………………………………… (12.53)

实如法而一：

$\frac{\text{日出实}}{\text{每辰刻数}}=\text{日出所在辰}$ ………………………………………… (12.54)

$\frac{\text{日入实}}{\text{每辰刻数}}=\text{日入所在辰}$ ………………………………………… (12.55)

每日 100 刻，分为 12 辰，求每辰刻数，按(12.51)式计算，不必多说。(12.52)式中的“不见刻”，就是(12.49)式中的日不见刻，是从日入到次日日出之间的刻数，数目等于夜漏刻加 5 刻。半不见刻是它的一半，可以说是从中夜到日出之间的刻数。由于皇极历夜半是从子半开始，半不见刻加半辰就是从子初到日出时的刻数，(12.52)式称为日出实。除以每辰刻数，就把日出实化成了时辰数，就是(12.54)式所得的“日出所在辰”。从子初到日出之间的时辰数叫做“日出所在辰”是由于：从子初算起，此时辰数算外，就是日出所在辰。

(12.53)式中的“日出见刻”就是前(12.48)式中的“日见刻”，是从日出到日入之间的刻数。日出实加此数得从子初到次日日入之间的刻数，(12.53)式称为“日入实”。除以每辰刻数，化为日入所在辰，如(12.55)式，道理与(12.54)式相同。

(12.54)、(12.55)两式所得整数为辰数，不足 1 辰的部分为刻为分，应当是《律历志》说的“不满法，为刻及分”。

(5)求辰前余数。

就是把夜半刻数化为日分数。日分有两种：朔日法和气日法，前者是把 1 日分为 1242 分，后是分 1 日为 46644 分。因 1 日等于 100 刻，夜半刻所化分数便可有以下两种计算法：

$$\frac{\text{气日法}\times\text{夜半刻}}{100}=\text{辰前余} \qquad (12.56)$$

$$\frac{\text{朔日法}\times\text{夜半刻}}{100}=\text{辰前余} \qquad (12.57)$$

由以上两式的内涵，可知所谓“表前余”就是“晨前余日分”的意思。

(6)求每日刻差。

所求为黄道上各点昼夜长短的每日变化数。以“刻”度量称“每日刻差”，以度数量度则称“每日度差”。术文说：

每气取近似值 15 日(“每气准为十五日”)。

1 刻＝225 分(“全刻二百二十五为法”)。

自二至起算(参见图 12.6)，二至到四立(立春、立夏、立秋、立冬)各三气，到二分各六气。

二至与至前1日为1，向前后二个方向，每日增太($\frac{2}{3}$)，三气而止；改为每日增少($\frac{1}{3}$)，二气而止；到二分为止的最后一气起初每日增加"少之小"(即$\frac{1}{4}$)，至最末六日，不增反减，减数与增数同为"少之小"。

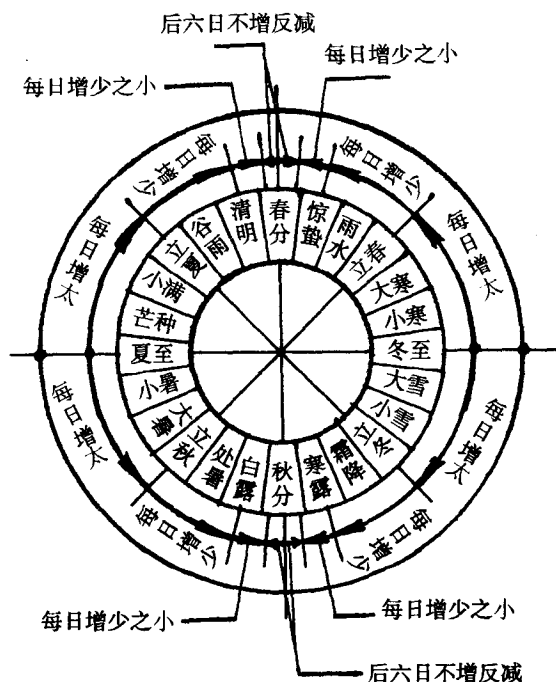



图 12.6 每日刻差图

按以上法则，用等差级数求末项公式：

$a_n=a_1+(n-1)d$，就能求出每气初、末日数。式中 a_1 为初项，n 为项数，d 为公差，a_n 为第 n 项。如自冬至顺行六气到春分：

一气冬至初日 $a_1=1$　　术文："至与前日为一"✓

末日 $a_{15}=1+(15-1)\times\frac{2}{3}=10\frac{1}{3}$　"一气之末日，终于十少"✓

二气小寒初日 $a_{16}=1+(16-1)\times\frac{2}{3}=11$ “稍增为十二半”

末日 $a_{30}=1+(30-1)\times\frac{2}{3}=20\frac{1}{3}$ “终于二十太”

三气大寒初日 $a_{31}=1+(31-1)\times\frac{2}{3}=21$ “三气初日，二十一”✓

末日 $a_{45}=1+(45-1)\times\frac{2}{3}=30\frac{1}{3}$ “终于三十少”✓

四气立春初日 $a_{46}=1+(46-1)\times\frac{2}{3}=31=b_1$ “四立初日三十一”✓

末日 $b_{15}=31+(15-1)\times\frac{1}{3}=35\frac{2}{3}$ “终于十三五太”✓

五气[①] 雨水初日 $b_{16}=31+(16-1)\times\frac{1}{3}=36$ “初日三十六太”

末日 $b_{31}=31+(31-1)\times\frac{1}{3}=41$ “终四十一少”

末气惊蛰初日 $b_{32}=31+(32-1)\times\frac{1}{3}=41\frac{1}{3}=c_1$

“末气初日，四十一少”✓

第九日 $c_9=41\frac{1}{3}+(9-1)\times\frac{1}{4}=43\frac{1}{3}$

第十日 $c_{10}=41\frac{1}{3}+(10-1)\times\frac{1}{4}=43\frac{7}{12}=d_1$

末日 $d_6=43\frac{7}{12}-(6-1)\times\frac{1}{4}=42\frac{1}{3}$ “终于四十二”

后面带“✓”者是计算结果与术文相符者，约占总数的一半，可见这部分术文错误很多，校勘者未加改正，有的是改错了，如二气末“终于二十太”的“太”字，就是校勘者加的错字。

自冬至逆行六气至秋分，以及自夏至顺行六气到秋分，逆行六气到春分，各气初、末日数均与以上同。

初末气既明，术文接着讲“刻差”及相关数的算法：有以下各式：

$$\frac{S\cdot 180}{\text{泛总}\cdot 225}=\text{刻差} \quad\cdots\cdots (12.58)$$

① 由于每气畸零日累积的结果，第五气为 16 日。

$$\frac{夜刻\pm刻差\cdot n}{2}=入气夜半定刻(n\ 为入气日数) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.59)$$

对此二式须说明以下五点：第一，S 是术文中所说“每气前后累算其数”得到的结果，它的算法可由求等差级数前 n 项和的公式解决，此公式为：

$$Sn=a_1n\pm\frac{n(n-1)}{2}d \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.60)$$

如对第一气末，$n=15, a_1=1, d=\frac{2}{3}$，代入得：

$S_{15}=15+\frac{15\times14}{2}\times\frac{2}{3}=85$，即 $S=85$。余略。

第二，由(12.59)式可以看出刻差的意义是每日夜漏刻数的增减量，单位是刻。第三，在(12.58)式中 S 是没有单位的，或者更确切地说，在此之前不知它的单位是什么。既然刻差的单位是刻，S 的单位就不难推知：

$$\frac{S\cdot180}{泛总\times225}=\frac{S\times12\times15}{泛总\times225}=\frac{S\times15}{\frac{泛总}{12}\times225}=\frac{S}{\frac{泛总}{12}\times15}$$

由一节 1(1)“参数”的介绍知，$\frac{泛总}{12}$为每气日数，春分后为$\frac{11\times17}{12}$日，秋分后为$\frac{11\times16}{12}$日。那么，$\frac{S}{\frac{泛总}{12}}$是一气之中每日的平均增量。将此数除以 15，单位既为刻，不除时的单位必小于刻，设为分，且 1 刻＝15 分。这就是 S 的单位和单位制。第四，是(12.59)式中的加减号，夜漏减少者用减号，增加者用加号。即自冬至到夏至用“－”号，自夏至到冬至用“＋”号。第五，由每日平均刻差求入气任一日的夜半刻用(12.59)式。所得虽号为夜半定刻，并非该日夜半的实际刻数，是由每日夜刻增减一个平均增量得到的，此其一；平均增量的单位制：大单位是刻，刻下的单位(分)须重新设定，以保持与“夜刻”一致，不能再用 1 刻＝15 分的单位制，此其二。

由于计算气初、末日夜漏刻数是以“至”日为基准，至前后各六气，至后六气 n 和气序数都是顺数，至前六气则须逆数。对于逆数者：冬至

到秋分，夏至到春分（顺数为春分一夏至、秋分一冬至。即所谓“分后”者），计算法如术文所列公式是：

$$\frac{S\cdot 180}{\text{亏总}^{[1]}\cdot 225}=\text{刻差}\cdots\cdots\quad(12.61)$$

$$\frac{\text{夜刻数}\pm\text{刻差}\cdot n}{2}=\text{入气夜半定刻}\cdots\cdots\quad(12.62)$$

其中 S 是术文所说的分后十五日内“累算尽日”数，即入气后到所求日内的累计增（减）量数。$\frac{S\cdot 180}{\text{亏总}}$，术文称为“所因数”。既称因数，必然要与某数相乘，术文没把这个乘数说出来，根据（12.58）式知，此乘数必是$\frac{1}{225}$。（12.61）式计算刻差与（12.58）式的区别仅在于分母一用泛总，一用亏总。“夜刻数”，术文称之为“上位”，就是“上位数”的意思，是所求数前一位的数字。以上位数减刻差，减之不尽者就是“所加”日的夜刻数。为了取得与（12.59）式相似的形式，将其除以 2，求得为夜半定刻数。术文虽未明言如此，意在此中，是明显的。

（12.62）式分子中的“±”号：对于春分到夏至之间的计算，由于是自夏至向春分逆向计算，“上位”数（靠近夏至的数）小，所求数大，入气增量为正值，分子间用“＋”号；对于秋分到冬至之间，自冬至逆向计算到春分，“上位”数大，所求数小，入气增量为负值，分子之间用“－”号。书中一概说是“以减上位”。

（7）求晨去中星。

就是计算晨时中星所在度。术文叙述的公式是：

$$\text{周度}\ 1-\text{昏去中星}=\text{晨去中星}\cdots\cdots\quad(11.63)$$

“周度 1”就是 1 个周天度。皇极历的周天度等于 $365\,\frac{11406.5}{46644}$度。（11.63）式的法理可由图 12.7 说明：OA 为子午线，A 为上中天位置，日至 C 而昏，$\overset{\frown}{AC}$为昏中星度；至 D 而晨，晨中星度等于$\overset{\frown}{ACBD}$。

$\overset{\frown}{ACBD}=\text{圆周}-\overset{\frown}{DA}$。而$\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AC}$。因此：

---

[1] 亏总当是指 16×11，不应如书中所指：以 16 为亏总。

周度 1－昏去中星＝晨去中星

昏去中星度分由表 12.2“72 候及夜半漏刻、昏中度分表”中查得。由于表中所给为 24 气昏中星，利用(11.63)式算得的也是 24 气晨中星度。欲求每日晨中星度，可按一次内差法推算(由表中每气昏中度分增量求每日平均增量)，再用(11.63)式算出晨中星数。

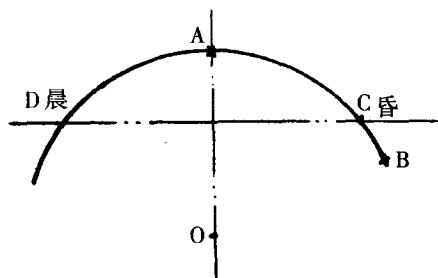



图 12.7 晨去中星图

(8)求每日黄道去极度差。

与本节 4(6)“求每日刻差”方法相仿佛：仍设一气增量为 S(即“准日因增加裁，累算所得”数为 S)，所给公式为：

$$\frac{S\times180\times143}{\text{泛总}\times400}=\text{每日度差} \quad (12.64)$$

《律历志》所说“度差”，是度量之差的意思，单位还不是度，欲化为度，须除转法：

$$\frac{S\times180\times143}{\text{泛总}\times400\times\text{转法}}=\text{每日黄道去极差度数} \quad (12.65)$$

由此得每日黄道去极度数：

$$\text{气初黄道去极度}\pm\frac{S\times180\times143\cdot n}{\text{泛总}\times400\times\text{转法}}=\text{入气第}\,n\,\text{日黄道去极度} \quad (12.66)$$

《律历志》说，对于“分后气间，亦求准外”，意思是求每气 15 整日以外的分日部分，方法与“前求刻”同。若求二至以前日，(12.66)式中的日数 n，自至前 1 日起算，往前逆推得到。也可以至日为对称，求刻差是冬至后减，夏至后加；求去极度是冬至日前渐增(愈近冬至愈增，如图 12.

8)，夏至前渐减。就是《律历志》说的“其刻冬减夏加，而度冬加夏减”。如利用(12.66)式计算冬至前的黄道去极度，由于 n 是自冬至往前逆数，n 增大的方向正是去极度减小的方向，所以，式中用减号，由气初(至前 1 日)黄道去极度减气间度差，《律历志》说是“若至前，以入气减气间”。日余数(不足 1 日者)可以连同后气的部分(合成 1 日者)一同计算，都按“反算”法计算，(即“因后气而反之”)，将算得的结果按“日余数”占全日的比例数乘除之(“以不尽日累算乘除所定”)，加减入前气之中。

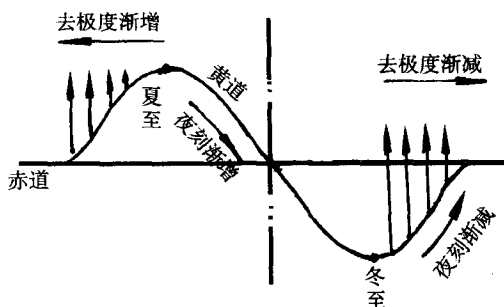



图 12.8 入气刻差、度差加减图

5. 月行计算法

这部分是由月亮运行规律进行的计算。古人把日月行分别称为日缠、月离，因此也可以把这一部分叫做月离法。

(1)主要参数。

皇极历把一个近点月数值取为 $27\frac{1255}{2263}$日，其中 27 为转终日，1255 为转终日余，2263 为终法。而 $27\frac{1255}{2263}=\frac{62356}{2263}$日，62356 称为终实。

终法一转终日余＝2263－1255＝1008。1008 叫做终全余。

另外还有三个参数是以前出现过的，此处更名以后重又出现：

转法 52，一节 1(1)中称为日干元，是气日法的一个因数。

篾法 897，一节 2(1)中称为余通，是气日法的另一个因数。

闰限 676，一节 1(1)中称为岁率，以前的历法称为章法，是设置闰月的最小周限，因此，在这里叫做闰限。

(2)推入转术。

每过 1 个近点月称为 1 转，这一部分是推算所求年第一日入于某转中的第几日。算法是把自上元以来的积日数除以近点月数，剩余的不足一个近点月的部分就是所求入转数。即：

$$\frac{积日}{近点月}=总转数\frac{入转日及余}{近点月} \quad\cdots\cdots (12.67)$$

其中“入转日及余”为所求数，为与《律历志》的叙述吻合，把(12.67)式细化：

$$\frac{积日}{近点月}=\frac{积日}{终实/终法}=\frac{积日}{终实}\times终法 \quad\cdots\cdots (12.68)$$

设$\frac{积日}{终实}=A\cdot\frac{不尽数}{终实}$，其中 A 是积日中所含终实的倍数，如同从积日中除去终实数，除了 A 次之后，剩余的“不尽数”小于终实，不能再除，作为余数写入分子。代入(12.68)式，得：

$$\left(A\cdot\frac{不尽数}{终实}\right)\times终法=(A\times终法)\frac{不尽数\times终法}{终实} \quad\cdots\cdots (12.69)$$

再设$\frac{不尽数\times终法}{终实}=B\,\frac{不如终实者}{终实}$。“不如终实者”就是小于终实的余数的意思。这一步计算可以理解为：从“不尽数×终法”中除去终实，除去 B 个终实后，所余小于终实，不能再去，称为“不如终实者”，放入分子之中，代入(12.69)得：

$$(A\times终法+B)\frac{不如终实者}{终实} \quad\cdots\cdots (12.70)$$

《律历志》把以上运算过程叙述为：以“终实去积日，不尽，以终法乘而又去”得到“不如终实者”。(12.70)式中的(A×终法+B)就是(12.67)式中的“总转数”，不是所求数，因而不必进行计算，在运算过程中随时舍弃即可，就是说，在运算中得 A 去 A，得 B 去 B，不必做(A×终法)、及(A×终法+B)的计算。如此，在(12.70)式中只余$\frac{不如终实者}{终实}$，分子、分母同除以终法得：

$$\frac{不如终实者/终法}{近点月}=\frac{入转日及余}{近点月} \quad\cdots\cdots (12.71)$$

右端与(12.67)右端的分式相同，由于只须求入转日及余，(12.71)

式中只作如下计算即可：

$$\text{不如终实者}/\text{终法}=\text{入转日}\frac{\text{入转日余}}{\text{终法}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.72)$$

《律历志》叙述为："不如终实者，满终法得一日，不满为余，即其年天正经朔夜半入转日及余。"

由上所述，《律历志》虽只作了上面两个假设和(12.72)式三步计算：

$\frac{\text{积日}}{\text{终实}}=A\cdot\frac{\text{不尽数}}{\text{终实}}$； "终实去积日，

$\frac{\text{不尽数}\times\text{终法}}{\text{终实}}=B\cdot\frac{\text{不如终实者}}{\text{终实}}$； "不尽，以终法乘而又去，

$\text{不如终实者}/\text{终法}=\text{入转日}\frac{\text{入转日余}}{\text{终法}}$。 "不如终实者，满终法得一日，不满为余。"

其效果与(12.67)式是相同的。

(3)求次日(入转)。

(12.72)式既已算得头日入转数，求次日，只需在(12.72)式所得结果中加1日即得。须注意的是，加1日之后，所得入转日及余若超过了1个近点月日数，须从中减去近点月日数，剩余的才是次日入转(头日所入转的下一转)日及余数。超过近点日的情形有两种：第一，头日入转日及余为$26\frac{A}{2263}$日$(1255<A<2263)$，次日入转增1日后为$27\frac{A}{2263}$。从中减去1个近点月，得$\frac{A-1255}{2263}$日。即从入转日中减去转终日27，从入转日余中减去入转日余，得$\frac{A-1255}{2263}$日。《律历志》说是"每日满转终则去之"，"转终"包括转终日和转终日余二部分，"每日"指每一个须计算的"次日"入转数。第二，头日入转日及余为$27\frac{B}{2263}$日$(B<1255)$。次日入转增1日后为$28\frac{B}{2263}$日。从中去掉1个近点月：

$$28\frac{B}{2263}-27\frac{1255}{2263}=\frac{2633+B-1255}{2263}=\frac{B+\text{终全余}}{2263}$$

《律历志》说是“二十八日者加(终)作全为夜半入初日余”，括号内的“终”字是脱文。由于$B<1255$，$B+$终全余<2263，所以说是“入初日余”，即入于下一转的第一日。《律历志》特别指出是“夜半”入初日余的原因是皇极历是以晨后为次日，$\frac{B+\text{终全余}}{2263}$只是夜半入初日余。

(4)求弦、望夜半入转日及余。

在本节5(2)求得的“天正经朔夜半入转日及余”中加入“经日”(自朔日夜半到弦、望所在日之间的整日数。如望经日等于朔小余加半个朔望月所得数的整数部分，上、下弦类推)得弦望夜半入转。以上所得不可大于转终数。即：

$$\text{天正经朔入转日}\frac{\text{余}}{\text{终法}}+\text{望经日}-m\cdot\text{转终日}\frac{\text{转终日余}}{\text{终法}}$$
$$=\text{天正月望日夜半入转日及余} \quad \cdots\cdots (12.73)$$

$$\text{天正经朔入转日}\frac{\text{余}}{\text{终法}}+\text{上弦经日}-m\cdot\text{转终日}\frac{\text{转终日余}}{\text{终法}}$$
$$=\text{天正月上弦日夜半入转日及余} \quad \cdots\cdots (12.74)$$

$$\text{天正月望日夜半入转日及余}+\text{下弦经日}-m\cdot\text{转终日}\frac{\text{转终日余}}{\text{终法}}$$
$$=\text{天正月下弦日夜半入转日及余} \quad \cdots\cdots (12.75)$$

以上各式中的m是待定自然数或0，选定的条件是使各式所得结果小于转终大于0。

(5)求次月入转。

由头月求次月，在头月入转数上加次月日数即得。次月日数，大月30日，小月29日，又因为加后所得不可大于转终数，所加30或29日均大于转终数，因此不必全加，在其中减去转终数再加即可。而：

$$30-27\frac{1255}{2263}=2\frac{1008}{2263}$$

$$29-27\frac{1255}{2263}=1\frac{1008}{2263}$$

此二式中的2263为终法，1008为终全余。因此：

$$\text{头月入转日及余}+2\frac{\text{终全余}}{\text{终法}}-m\cdot\text{转终日及余}=\text{次月入转日及余}$$
$$\cdots\cdots (12.76)$$

$$\text{或头月入转日及余}+1\frac{\text{终全余}}{\text{终法}}-m\cdot\text{转终日及余}=\text{次月入转日及余}\quad\cdots\cdots\ (12.77)$$

(12.76)式为大月求法，(12.77)式为小月求法，二式中的 m 也是待定数，满足的条件与(12.73)～(12.75)式同。(12.76)、(12.77)式中的"头月入转"若是指"头月经朔夜半入转"，所得"次月入转"为"次月经朔夜半入转"；"头月入转"若是头月望日夜半入转，所得"次月入转"为次月望日夜半入转。上、下弦同。

(6)求经辰所入朔、弦、望。

本节5(4)、(5)所得都是夜半入转数，此处求朔、弦、望全数(整日及日余)的入转数。方法很简单，只要把朔或弦、望的日余增入本节5(2)、(4)求得的朔或弦、望夜半入转数中去就行了。《律历志》把朔、弦、望的日余叫做经余。如对朔而言，是指"经朔日余"等。要把它们增加到入转数中，须把它们的分母化为终法分，《律历志》称为"经余变从转"，方法为：$\frac{\text{经余}}{\text{终法}}\times$终法。于是得：

$$\text{朔日经辰入转日及余}=\text{经朔夜半入转日及余}+\frac{\text{经余}}{\text{终法}}\times\text{终法}\quad\cdots\ (12.78)$$

其中"经朔夜半入转日及余"为(12.59)式的计算结果。

弦、望算法既可以仿上法由(12.62)式的计算结果加上"经余变从转"得到，也可以直接由(12.78)算得朔日经辰入转日及余加上半个朔望月(或$\frac{1}{4}$个朔望月)的日数得到，加得的结果大于转终数，须随时除去之。用后一种算法时，须把朔望月日数的分母化为终法，才可与经辰入转日数直接相加，化法：

$$1\text{个朔望月日数}:29\frac{659}{1242}=29\frac{659\times2263}{1242\times2263}=29\frac{1200\frac{917}{1242}}{2263}\text{日}$$

$$1/4\text{个朔望月日数}:29\frac{1200\frac{917}{1242}}{2263}\div4=7\frac{865\frac{1160\frac{3}{4}}{1242}}{2263}\text{日}\quad\cdots\cdots\ (12.79)$$

1/2 个朔望月日数：$29\frac{1200\frac{917}{1242}}{2263}\div 2=14\frac{1731\frac{1079\frac{1}{2}}{1242}}{2263}$日 …… (12.80)

3/4 个朔望月日数：$29\frac{1200\frac{917}{1242}}{2263}\times\frac{3}{4}=22\frac{334\frac{998\frac{1}{4}}{1242}}{2263}$日 …… (12.81)

1 个朔望月日数除去 1 个近点月日数：

$$29\frac{659}{1242}-27\frac{1255}{2263}=1\frac{2208\frac{197}{1242}}{2263}\text{日} \quad\cdots\cdots (12.82)$$

朔日入转加(12.79)式得上弦，加(12.80)式得望，加(12.81)式得下弦，加(12.83)式得次朔。加后满转终则去之，即：

朔日经辰入转日及余$+7\frac{865\frac{1160\frac{3}{4}}{1242}}{2263}-m\cdot$转终日及余

＝上弦经辰入转日及余 …………………………………… (12.83)

朔日经辰入转日及余$+14\frac{1731\frac{1079\frac{1}{2}}{1242}}{2263}-m\cdot$转终日及余

＝望日经辰入转日及余 …………………………………… (12.84)

朔日经辰入转日及余$+22\frac{334\frac{998\frac{1}{4}}{1242}}{2263}-m\cdot$转终日及余

＝下弦经辰入转日及余 …………………………………… (12.85)

朔日经辰入转日及余$+1\frac{2208\frac{917}{1242}}{2263}-m\cdot$转终日及余

＝次月朔经辰入转日及余 …………………………………… (12.86)

以上四式中的 m 为待定数，等于 1 或 0，条件是使方程所得小于转终。

给出以上四式后，《律历志》又说："亦朔望各增日一，减其全余(；)[①] 望五百三十一，秒百六十二半；朔五十四，秒三百二十五。"这是另

① 括号内原为逗号(参见《隋书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 472 页第 6 行)，误。

一种叙述方法，对于望日，增 1 日，减全余 531，秒 162.5，就是增加：

$$1-\frac{531\frac{162.5}{1242}}{2263}=\frac{1731\frac{1079\frac{1}{2}}{1242}}{2263}$$

与前面对(12.84)式的描述：加“望日十四，余一千七百三十一，秒一千七十九半”，除了把加整日 14 省略不述之外，是等效的。

同样对于朔日：增 1 日，减全余 54，秒 325，就是增加：

$$1-\frac{54\frac{325}{1242}}{2263}=\frac{2208\frac{917}{1242}}{2263}$$

与对(12.86)式的叙述：次朔增“日一，余二千二百八，秒九百一十七”等效(也略去了对整日的记述)。

(7)求月平应会日所入。

前面曾说过(参见前“求月朔、弦、望应平会日所入迟速”)，“应平会日”与“平应会日”说法不同，意义相同。都是指由平会日(交会日的平均数)求得的“应”会日数(即计入某改正值的平会数)，此处是指计入日行迟速数以后的交会日数。那么，这里“求月平应会日所入”转数就十分简单了，只要把本节 5(6)求得的“经辰所入朔、弦、望”加上迟速数“变从转”以后的数字即可。《律历志》的描述法为：

平应会所入日余＝经辰所入余±月朔弦望会日所入迟速定数变从转余 ……………… (12.87)

(12.87)式只计算所入日余，不计整日。是由于整日的入转数在本节 5(6)中已经算得，此处只考虑迟速数引起的入转数的变动，一般不大于 1 日。个别大于整日者，须与整日入转数一起考虑。其次，(12.87)式中的“经辰所入余”是本节 5(6)中算得的经辰入转日余，而“月朔弦望会日所入迟速定数”是(12.36)式求得的迟速“定”数。将其“变从转余”的方法仍然是分子、分母各乘终法。

6. 求定朔法

(1)月速的不均匀性。

表 12.3　月行迟速表

转日	速分	速差	加减	朓朒积
一日	764	消 7	加 68	朓初
二日	757	消 8	加 61	朓 123
三日	749	消 11	加 53	朓 234
四日	738	消 12	加 42	朓 331
五日	726	消 13	加 31	朓 408
六日	713	消 13	加 18	朓 464
七日	700	消 12	加 5　8 加 减秒太　1 减	朓 496
八日	688	消 14	减 7	朓 505
九日	674	消 14	减 21	朓 492
十日	660	消 12	减 34	朓 454
十一日	648	消 9	减 46	朓 391
十二日	639	消 7	减 55	朓 307
十三日	632	消 6	减 62	朓 207
十四日	626	息 2	减 56　7 减 加 16　2 加	朓 94
十五日	628	息 7	加 66	朒 28
十六日	635	息 9	加 59	朒 148
十七日	644	息 11	加 50	朒 256
十八日	655	息 11	加 39	朒 347
十九日	666	息 13	加 29	朒 419
二十日	679	息 14	加 16	朒 471
二十一日	693	息 12	加 3　6 加 减大　3 减	朒 500
二十二日	705	息 14	减 10	朒 505　当日自减，减见为 504
二十三日	719	息 13	减 23	朒 487
二十四日	732	息 12	减 36	朒 446
二十五日	744	息 10	减 48	朒 381
二十六日	754	息 7	减 58	朒 293
二十七日	761	息 5 篾 4	减 65	朒 188
二十八日	766 篾 4	平 5 息 4 消	减 70　38 少终余 31 太全余	朒 70

表分五栏：转日、速分、速差、加减和朓朒积，结合“校勘记”〔一〇〕，对每栏的意义略作解释：

第一栏“转日”是入转后自一日至二十八日的日序号。

第二栏“速分”中的数据除以转法(52)以后，为本日月亮实行度。如一日速分 764，除以转法得 $14\frac{36}{52}$，表示入转一日，月亮实行 $14\frac{36}{52}$度(平行度 $13\frac{19\frac{104}{676}}{52}$度)。再如二十八日表列速分为 766 篾 4，即 $766\frac{4}{897}$分，除以 52 得二十八日实行 $14\frac{38\frac{4}{897}}{52}$度。

第三栏“速差”中的数据是本日与次日速分之差。数据前加“消”或“息”字，本日速分比次日大者为消，比次日小者为息。从表中可见一转之中，十三日以前为消，十四日以后为息，因此，在二十八日和一日之间速分最大，是近地点时的速度。表中二十七日速分为 761，二十八日速分为 766 篾 4，766 篾 4－761＝5 篾 4。因此，二十七日速差栏中的数字是“息 5 篾 4”。但是，二十八日速差栏中非消非息，而是“平 5 息 4 消”，后四字是小字注。“平”表示一转终结，无增无减的意思。不再把转终速分与下一转初日速分相比较，因而转终速分就无增无减。“平”字下的小字注文“5 息 4 消”与前面的“息×”、“消×”的格式不同，它不是表示增减若干分，而是一个比例数。一转 $27\frac{1255}{2263}$日，二十八日只有$\frac{1255}{2263}$日属于本转之中，另外$\frac{1008}{2263}$日已入下转初日。下转初日速分 764 分，由转终 766 分到下转初 764 分，消 2 分。因此，若把上转二十八日平分为 2263 分，其中 1255 分为息，1008 分为消，1255：1008＝5：4，所以是“5 息 4 消”。

第四栏“加减”，“校勘记〔一〇〕”解释说“是本日月亮实行、平行度之差与月亮平行度之比”。以第一日数字“加六十八”为例：本日实行 $14\frac{36}{52}$度，平行 $13\frac{19\frac{104}{767}}{52}$度；实行度、平行度差为 $1\frac{16\frac{572}{676}}{52}$度；此差值与

平行度之比为：$1\frac{16\frac{572}{676}}{52}$ ∶ $13\frac{19\frac{104}{676}}{52}$ ＝46540∶469924≈10∶101。与表中数据(68)相差甚远，其他各栏计算的结果也不符合。表示栏中数据是有分母的，可以算出此分母约为695(平行度的分子)。即一日加减数是$\frac{68}{695}$，二日加减数是$\frac{61}{695}$等。但是，即便如此，与表列数值的符合率仍不算高(见表12.4)。

表12.4　加减数计算表

日序	速分	实行度	实行度、平行度差	计算值	表列值
一	764	$14\frac{36}{52}$	$+1\frac{16b}{52}$	$+68b$	+68
二	757	$14\frac{29}{52}$	$+1\frac{9b}{52}$	$+61b$	+61
三	749	$14\frac{21}{52}$	$+1\frac{1b}{52}$	$+53b$	+53
四	738	$14\frac{10}{52}$	$+\frac{42b}{52}$	$+42b$	+42
五	726	$13\frac{50}{52}$	$+\frac{30b}{52}$	$+30b$	+31
六	713	$13\frac{37}{52}$	$+\frac{17b}{52}$	$+17b$	+18
七	700	$13\frac{24}{52}$	$+\frac{4b}{52}$	$+4b$	+5 一秒太
八	688	$13\frac{12}{52}$	$-\frac{7a}{52}$	$-7a$	−7
九	674	$12\frac{50}{52}$	$-\frac{21a}{52}$	$-21a$	−21
十	660	$12\frac{36}{52}$	$-\frac{35a}{52}$	$-35a$	−34
十一	648	$12\frac{24}{52}$	$-\frac{47a}{52}$	$-47a$	−46
十二	639	$12\frac{15}{52}$	$-1\frac{4a}{52}$	$-56a$	−55
十三	632	$12\frac{8}{52}$	$-1\frac{11a}{52}$	$-63a$	−62

续表

日序	速分	实行度	实行度、平行度差	计算值	表列值
十四	626	$12\frac{2}{52}$	$-1\frac{17a}{52}$	$-69a$	−56 +16
十五	628	$12\frac{4}{52}$	$-1\frac{15a}{52}$	$+67a$	+66
十六	635	$12\frac{11}{52}$	$-1\frac{8a}{52}$	$+60a$	+59
十七	644	$12\frac{20}{52}$	$-\frac{51a}{52}$	$+51a$	+50
十八	655	$12\frac{31}{52}$	$-\frac{40a}{52}$	$+40a$	+39
十九	666	$12\frac{42}{52}$	$-\frac{29a}{52}$	$+29a$	+29
二十	679	$13\frac{3}{52}$	$-\frac{16a}{52}$	$+16a$	+16
二十一	693	$13\frac{17}{52}$	$-\frac{2a}{52}$	$+2a$	+3 一大
二十二	705	$13\frac{29}{52}$	$+\frac{9b}{52}$	$-9b$	−10
二十三	719	$13\frac{43}{52}$	$+\frac{23b}{52}$	$-23b$	−23
二十四	732	$14\frac{4}{52}$	$+\frac{36b}{52}$	$-36b$	−36
二十五	744	$14\frac{16}{52}$	$+\frac{48b}{52}$	$-48b$	−48
二十六	754	$14\frac{26}{52}$	$+1\frac{6b}{52}$	$-58b$	−58
二十七	761	$14\frac{33}{52}$	$+1\frac{13b}{52}$	$-65b$	−65
二十八	$766c$	$14\frac{38c}{52}$	$+1\frac{18d}{52}$	$-70d$	−70

在上表中，月亮每日平行度为 $13\frac{19\frac{104}{676}}{52}$度，并设 $a=\frac{104}{676}$，$b=\frac{572}{676}$，$c=\frac{4}{897}$，$d=\frac{763}{897}$。“计算值”栏中的数字舍弃小数（a、b、c、d、）后，与表列

值相同者约占50%，可见计算是很粗糙的。

其次，对于七、十四、二十一、二十八日，加减栏的数字都包括两部分，如七日为"+5"、"一秒太"等。解释法如图12.9[①]，横坐标是日数，纵坐标是加减数，等于$\frac{月实行速-平行速}{平行速}$，纵坐标是正值为加，负值为减。可以看出，七、十四、二十一、二十八日是四个特殊的日子：一日之中有增有减。皇极历把1个近点月近似取作$27\frac{5}{9}$日($27\frac{1255}{2263}\approx27\frac{5}{9}$)，分作4段后，分点在$6\frac{8}{9}$、$13\frac{7}{9}$、$20\frac{6}{9}$、$27\frac{5}{9}$日，即在七、十四、二十一、二十八日之内。七日前$\frac{8}{9}$日在第一段为加数，后$\frac{1}{9}$日在第二段为减数；十

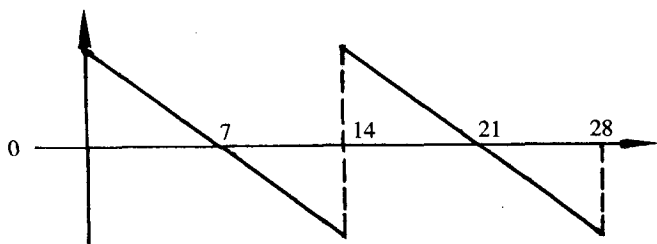



图 12.9 月行加减数图

四日前$\frac{7}{9}$日为减，后$\frac{2}{9}$日为加；二十一、二十八日以此类推。这四日的放大图如图12.10，其中(1)图自A至C为七日，其长为终法(2263)分，均分为9等分，AO为加数，占$2263\times\frac{8}{9}=2011$分；$OC$为减数，占$2263-2011=252$分。七日加数等于$\triangle AOB$的面积，减数等于$\triangle COD$的面积。求出$AB$、$CD$的长度，加减数便可求出。$AB$左边为六日加数，可由五、六两日加减数算出$AB$的长度。如12.11图四边形$A_1B_1B_2A_2$和四边形$ABB_1A_1$面积分别等于五、六两日加减数：31、18，$A_1A_2=A_1A=2263$

① 以下解释参考了刘金沂、赵澄秋《麟德历定朔计算法》，载于《科技史文集》第1辑。

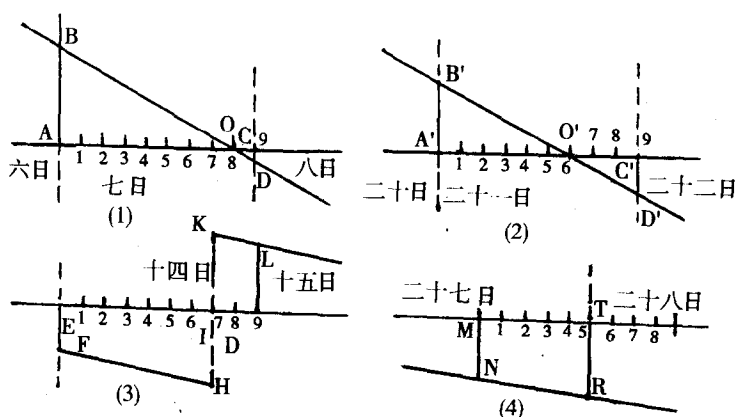



图 12.10　七、十四、二十一、二十八日加减数放大图

（终 法）。因此有：$A_1B_1=\dfrac{31+18}{2\times2263}=\dfrac{49}{2\times2263}$，$B_1Q=B_2Q'=\dfrac{31-18}{2263}=\dfrac{13}{2263}$。$AB=A_1B_1-B_1Q=\dfrac{49}{2\times2263}-\dfrac{13}{2263}=\dfrac{11.5}{2263}$。因$\triangle AOB=\dfrac{11.5}{2263}\times2011\times\dfrac{1}{2}\doteq5$。表示在七日（全日）之内加数为 5。

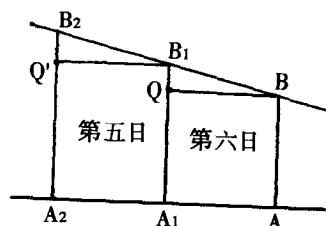



图 12.11　AB 计算图

以同样的方法，由八、九两日的加减数算得 CD 长近似为 0，$\triangle COD$ 面积亦为 0，七日减数为 0。表中说七日加减数“＋5－秒太”，秒太近似为 0。

仿上法，按图 12.10(2)计算$\triangle A'O'B'$的面积为$\dfrac{9.5}{2263}\times1508\times\dfrac{1}{2}=3$。即二十一日加数为 3。$\triangle C'O'D'$ 的面积为$\dfrac{3.5}{2263}\times755\times\dfrac{1}{2}=0.58$。由于 $0.58>0.5$，表中说二十一日减数为大。

由图 12.10(3)求十四日加减数，就是求出四边形 $HIEF$ 和四边形 $IKLP$ 的面积。为此须求出 EF、IH、IK、PL 的长度。EF 和 PL 的长可仿前法分别

由十二、十三日和十五、十六日的加减数求出：$EF=\frac{65.5}{2263}$，$PL=\frac{69.5}{2263}$。IH 的求法可借助十三日的减数图如右：$E_1E=2263$，$EI=1760$。E_1F_1 和 QF 都可由十二、十三日加减数算得：$E_1F_1=\frac{55+62}{2\times2263}=\frac{58.5}{2263}$，$Q_1F=\frac{62-55}{2263}=\frac{7}{2263}$。再由$\triangle F_1Q_1F\backsim\triangle FQ_1'H$，得 $Q'H=\frac{FQ_1'}{F_1Q_1}\times Q_1F=\frac{1760}{2263}\times\frac{7}{2263}=\frac{5.4}{2263}$。$IH=EF+Q'_1H=\frac{65.5}{2263}+\frac{5.4}{2263}=\frac{70.9}{2263}$。这样，四边形 $HIEF$ 的面积可求：四边形 $HIEF=\frac{EF+IH}{2}\times EI=\left(\frac{65.5}{2263}+\frac{70.9}{2263}\right)\times\frac{1}{2}\times1760=53$。即十四日减 53。表中是"$-56$"，误。

图 12.12　十三日日减数图

同样算得四边形 $IKLP$ 的面积：$\left(\frac{71.5}{2263}+\frac{69.5}{2263}\right)\times\frac{1}{2}\times503\doteq16$。

二十八日加减数由图 12.10(4)算出，算法仿十四日加减数的计算法，不过只算出四边形 $MNRT$ 的面积，得出减数来，后$\frac{4}{9}$日的加数属下一转，不必算出。

图 12.13　二十八日减数图

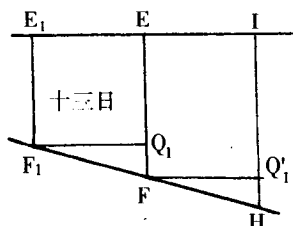
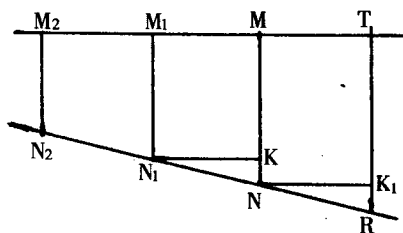
①$M_1N_1=\frac{58+65}{2\times2263}=\frac{61.5}{2263}$

②$KN=\frac{65-58}{2263}=\frac{7}{2263}$

$MN=M_1N+KN=\frac{68.5}{2263}$

③$K_1R=\frac{KN}{KN_1}\times K_1N=\frac{7/2263}{2263}\times1257=\frac{3.9}{2263}$

④四边形 $MNRT$ 面积$=\frac{RN+RT}{2}\times MT=\frac{70.4}{2263}\times1257=39$

倘若更粗糙一些，运算过程中的小数一概舍弃，$M_1N_1=61/2263$，MN

$=68/2263$。$K_1R=3/2263$，$TR=71/2263$。那么，四边形 $MNRT$ 的面积 $=\frac{69}{2263}\times1257=38.3$。

得数 38.3 就是表中二十八日加减数下小注说的“38 少终余”。

在上面的第①步运算中，所乘如不是 1257，而是 2263，即计算出二十八日全天（假定维持日初时的运动态势不变）的减数值得 $\frac{70.4}{2263}\times 2263=70.4$。舍弃小数后，得减数 70。就是表中二十八日下加减数栏中的数字“减 70”。可见它并非是二十八日实际具有的减数值，而是按前 5/9 日的情形扩大到全日以后得出的数值。实际存在的只有前 5/9 日的减数值：“38 少”。小字注称之为“终余”：是近点月一终的余数。

全日“减 70”，前 5/9 日减“38 少”，那么，后 4/9 日所减自然是“31 太”了。前面曾说“以余减法，残者为全余”，与此正合，小字注因称之为“全余”。就是二十八日下加减栏中的另一行小注“31 太全余”的含意。

七、十四、二十一日减数下也有小字注，七日注是“8 加 1 减”，十四日注是“7 减 2 加”，二十一日注是“6 加 3 减”。这只要看一看前面所绘“七、十四、二十一、二十八日加减数放大图”就会明了：七日的前 8/9 日为加数，后 1/9 为减数，就是所谓的“8 加 1 减”。或者说是，把该日平分为 9 份，前 8 份加，后 1 份减，叫做 8 加 1 减。其余 2 日的小注的解释以此类推。

第五栏“朓朒积”中的数据，“校勘记”说是“以加减项之累积数，乘以终法二千二百六十三，再约以朔日法一千二百四十二”得到的。即第 $(n+1)$ 日的朓朒积等于第 n 日以前（包括第 n 日在内）的加减数之和，再乘以 $\frac{2263}{1242}$，由此把各日计算数与表列值列为表 12.5。

表中“计算值”栏中左上角括号内数字为表列加减数的累积值。可以看出，朓朒积的表列值和计算值相符者不多，有些是由于表列值省略了小数的原因，相差较大者则是由于加减数的不同产生的，正可以由此表的计算值检验表 12.4“加减数计算表”计算值的正误。比如此表自十一到十四日之间的计算值明显大于表列值，原因何在？查表 12.4 知，十日的加减数计算值是 -35，表列值是 -34，少 -1。在朓朒积计算表

表 12.5 朓朒积计算表

日序	表列值	计算值	日序	表列值	计算值
一	朓初		十五	朒 28	(15 少)27.94
二	朓 123	(68)123.90	十六	朒 148	(81 少)148.19
三	朓 234	(129)235.05	十七	朒 256	(140 少)255.70
四	朓 331	(182)331.62	十八	朒 347	(190 少)346.80
五	朓 408	(224)408.14	十九	朒 419	(229 少)417.86
六	朓 464	(225)464.63	二十	朒 471	(258 少)470.70
七	朓 496	(273)497.42	二十一	朒 500	(274 少)499.85
八	朓 505	(277 少)505.32	二十二	朒 505	(276 半太)503.95
九	朓 492	(270 少)492.56	二十三	朒 487	(266 半太)485.73
十	朓 454	(249 少)454.30	二十四	朒 446	(243 半太)443.82
十一	朓 391	(215 少)392.35	二十五	朒 380	(207 半太)378.23
十二	朓 307	(169 少)308.54	二十六	朒 293	(159 半太)290.77
十三	朓 207	(114 少)208.32	二十七	朒 188	(108 半太)185.09
十四	朓 94	(52 少)95.35	二十八	朒 70	(36 半太)66.66

中，十一日的朓朒积要按计算值－35 计算应为 214 少，以后直到十四日，每日的加减数累积数都减 1，朓朒积的计算值和表列值就大体符合了。再如十九日以下直到二十八日朓朒值的计算值都明显小于表列值，查表 12.4 知，是由于十八日加减数表列值比计算值小 1 引起的。但是，自十五到十八日每天的加减数表列值都比计算值少 1，倘若都计入表中，表列值与计算值更加悬殊，此又不可理解。只凭臆断，大约由于刘焯计算粗疏，每一步都略去小数，积累起来才有差至一二分者。

(2)推朔弦望定日术。

这部分术文比较难懂，须逐句解释。

原文：各以平会所入之日加减限。

释文：平会朔(弦、望)的大、小余入转后的日数加减每日的“限”，这是求定日的基本思路。

这句话重点是点出了“限”的含意：是平会朔(弦望)入转日每日的增减数。如图 12.14(1)，FD 为时间函数曲线，AC 为时间轴，$AB=BC=1$ 日，四边形 $ABEF$、四边形 $BCDE$ 等都是“限”。

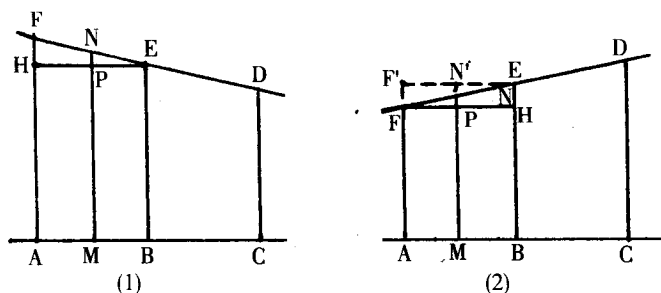



图 12.14　推朔弦望定日

原文：限并后限而半之，为通率；

释文：相邻两限为加以区分，在前者称限，在后者为后限。这句话的意思如下式：

$$\frac{\text{通率}}{\text{日法}}=\frac{\text{限}+\text{后限}}{2} \quad \cdots\cdots (12.88)$$

通率除以 1 日等于前限、后限和之半，除 1 日等于不除，故原文不言“除一日”。后面的计算中，须把 1 日化为日法分，因此，(12.88)式中暂用括号表示出来。从图 12.14(1)中可以看出，若四边形 $ABEF$＝限，四边形 $BCDE$＝后限，则 $BE=\frac{\text{通率}}{\text{日法}}$，即通率＝$BE\times$日法。

原文：又二限相减为限衰。

释文：$FH=\frac{\text{限衰}}{(\text{日法})}$＝限－后限。　　限衰＝$FH\times$日法 $\cdots\cdots$ (12.89)

原文：前多者，以入余减终法，残乘限衰，终法而一，并于限衰而半之；

释文：“前多”即对于时间函数为降函数的情形，如图 12.14(1)的函数曲线，有如下代数式 $A(m)$：

$$A(m)=\frac{\text{限衰}+\frac{\text{终法}-\text{入余}}{\text{终法}}\times\text{限衰}}{2} \quad \cdots\cdots (12.90)$$

其中终法－入余＝$AB-AM=PE$，代入限衰和终法的图形符号得：

$$A(m)=\frac{\left(FH+\frac{PE}{EH}\times FH\right)\times \text{日法}}{2}=\frac{FH+NP}{2}\times \text{日法} \quad \cdots\cdots\cdots (12.91)$$

原文：前少者，半入余乘限衰，亦终法而一，减限衰[1]。

释文：前少是指降函数的情形，如图 12.14(2)：$EH=\frac{\text{限衰}}{\text{日法}}$，其余与"前多者"同。原文所指代数式设为 $A(n)$。

$$A(n)=\frac{\frac{\text{入余}}{2}\times \text{限衰}}{\text{终法}}-\text{限衰} \quad \cdots\cdots (12.92)$$

由图中符号代替为：

$$A(n)=\left(\frac{\frac{AM}{2}\times EH}{AB}-EH\right)\times \text{日法}=\left(\frac{NP}{2}-EH\right)\times \text{日法} \quad \cdots\cdots (12.93)$$

原文：皆加通率入余乘之，日法而一，所得为平会加减限数。

释文："皆加通率"是说，不论"前多"或"前少"，即(12.90)、(12.92)式都要作如下计算：

$$\frac{[A(m)+\text{通率}]\times \text{入余}}{\text{日法}}=\text{平会加减限数} \quad \cdots\cdots (12.94)$$

或 $$\frac{[A(n)+\text{通率}]\times \text{入余}}{\text{日法}}=\text{平会加减限数} \quad \cdots\cdots (12.95)$$

把(12.91)、(12.93)式以及通率、入余的表达式分别代入，以上两式的意义就清楚了。

$$\text{前多者}:\frac{\left[\frac{FH+NP}{2}\times \text{日法}+BE\times \text{日法}\right]\times AM}{\text{日法}}$$

$$=\left(\frac{FH+NP}{2}+BE\right)\times AM=\text{平会加减限数} \quad \cdots\cdots (12.96)$$

其中 $\frac{FH+NP}{2}\times AM$ 是梯形 $FHPN$ 的面积；$BE\times AM$ 是矩形 $AMPH$ 的面积。两者相加是四边形 $AMNF$ 的面积。

$$\text{前少者}:\frac{\left[\left(\frac{NP}{2}-EH\right)\times \text{日法}+BE\times \text{日法}\right]\times AM}{\text{日法}}=\left(\frac{NP}{2}-EH+BE\right)$$

---

① "减限衰"三字是校勘者所加，误，宜改为"去限衰"。前者限衰是被减数，后者限衰是减数。

$\times AM=$平会加减限数 ………………………………… (12.97)

从图 12.14(2)可以看出,其中 $EH\times AM$ 是矩形 $FPN'F'$ 的面积,$\frac{NP}{2}\times AM$ 是$\triangle FPN$ 的面积,二者相减得到梯形 $FNN'F'$ 的面积,符号是负。$BE\times AM$ 是矩形 $AMN'F'$ 的面积,它与一个负面积相加,就是从中减去梯形 $FNN'F'$ 的面积,得到的是梯形 $AMNF$ 的面积。

因此,无论前多或前少,所谓"平会加减限数",都是指与入余对应的函数曲线下到时间轴之间围成的图形的面积,即入余之增量。

原文:其限数又别从转余为变余,朓减朒加本入余。

释文:"转余"已如前述,是由于日行不均匀产生的改正数("迟速定数")变为入转数得到的日余分。简言之,就是入转数中的日余分。此例所言为平会所入转之转日和转余,从它的转余之中又引出一个新的参量——变余,是加在"本入余之上的(朓减朒加),可以当做本入余的第二级修正值。前面说过,本入余的第一级修正值——本入余增量等于速度函数与本入余对应的部分之下及时间轴围成的图形的面积,而速度函数采用了直线函数,与实际的速度函数并不相同,难免产生误差。由此算出的入余增量就需要修正。修正方法如前引《律历志》文所述,在入余之上增减一个修正数——变余,算出变余产生的增量,朓减朒加入本入余增量。自然,这种方法也是近似的,还可进行第三级修正等。

原文:限前多者,朓以减与未减,朒以加与未加,皆减终法,并而半之,以乘限衰;

释文:即对于前多的情况,朓者有代数式 $B(m)$:

$$B(m)=\frac{〔终法-(本入余-变余)〕+(终法-本入余)}{2}\times 限衰$$

……………………………………………………………… (12.98)

朒者有代数式 $B(n)$:

$$B(n)=\frac{〔终法+(本入余-变余)〕+(终法-本入余)}{2}\times 限衰$$ … (12.99)

原文:前少者,亦朓朒各并二入余,半之,以乘限衰。

释文:对于前少的情况,朓、朒也是有代数式 $B(m)$、$B(n)$。所谓"亦朓朒各并二入余",只是一种简化叙述法,二入余并非直接相并,加减变

余、减终法都与“前多者”相同，所以说是“亦”“各并二入余”。“二入余”指“已减(加)”和“未减(加)”。

原文：皆终法而一，加于通率，变余乘之，日法而一。

释文：即对于朓朒分别有：

$$C(m)=\frac{\left(\frac{B(m)}{\text{终法}}+\text{通率}\right)\times\text{变余}}{\text{日法}}\quad\cdots\cdots(12.100)$$

$$C(n)=\frac{\left(\frac{B(n)}{\text{终法}}+\text{通率}\right)\times\text{变余}}{\text{日法}}\quad\cdots\cdots(12.101)$$

原文：所得以朓减朒加限数，加减朓朒积而定朓朒。

释文：即

朓： 朓朒积±限数$-C(m)=$定朓朒 ……………………… (12.102)

朒： 朓朒积±限数$+C(n)=$定朓朒 ……………………… (12.103)

原文：乃朓减朒加其平会日所入余，满若不足进退之，即朔弦望定日及余。

释文：

朓： 平会日所入余－定朓朒＝朔弦望定日及余 …………… (12.104)

朒： 平会日所入余＋定朓朒＝朔弦望定日及余 …………… (12.105)

“满若不足进退之”是指若平会日所入余＜定朓朒，(12.104)式左端不够减，需要从平会所入日中借1，退一位化为分，与平会日所入余相加，而后再减。

定朔、弦、望的计算式已如上述，下面解释它们的意义，先来看$B(m)$、$B(n)$、$C(m)$、$C(n)$式的意义。

$B(m)$、$B(n)$是在入余上增减一个叫做变余的量进行的计算，在图12.14中，假定MK及MK'为变余，则$AK=AM+MK=$(本)入余＋变余，$AK'=AM-MK'=AM-MK=$(本)入余－变余(如图12.15)。设L、L'分别是MK、MK'的中点，则：

$$B(m)=\frac{(AB-AK')+(AB-AM)}{2}\times\text{限衰}$$

$$=\frac{K'B+MB}{2}\times FH\cdot\text{日法}$$

$$=L'B\cdot FH\cdot\text{日法}$$

$$B(n)=\frac{(AB-AK)+(AB-AM)}{2}\times 限衰$$

$$=\frac{KB+MB}{2}\times FH\cdot 日法$$

$$=LB\cdot FH\cdot 日法$$

代入$C(m)$、$C(n)$的表达式(12.100)、(12.101)得:

$$C(m)=\left(\frac{L'B\cdot FH}{AB}+BE\right)MK=(S'Q'+BE)\cdot MK=L'Q'$$

$$\times MK=四边形 MNR'K' 面积$$

$$C(n)=\left(\frac{LB\cdot FH}{AB}+BE\right)MK=(SQ+BE)\cdot MK=LQ\times MK$$

$$=四边形 MNRK 面积$$

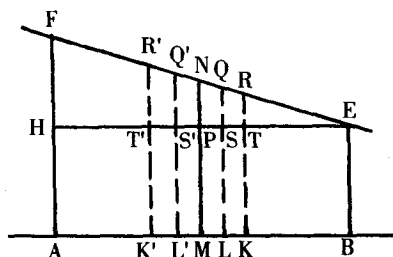



图 12.15　变余增量意义图

由(12.104)、(12.105)式可知,朔、弦、望定日及余等于平会日入转后得到的日余,加减定朓朒而得(朓减朒加)。而定朓朒由二个量组成:一是朓朒积,二是限数,它们都是因月行不均匀产生的增量:朓朒积是入转整日产生的增量,限数是不足1日的畸零分(叫做入余)产生的增量。此外,还有一个由变余产生的增量,也是月行增量。而由一节5(7)的计算,“平会”入转日余中是包括了由于日行不均产生的修正数的。这样,(12.104)、(12.105)式就表示朔、弦、望定日及余是由平朔弦、望加减月行改正值及日行改正值两项得到的。

为了估计皇极历的精确性,刘金沂等人的论文《麟德历定朔计算法》中曾推算改正值的理论值,如图12.16,日月分别沿黄、白道运行,分别行至S、M点交会,谓之合朔。但平朔用的是平均值,日实行到了

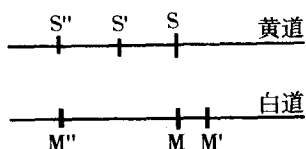
S' 点，月才行至 M' 点。日须再行到 S'' 点，月再行到 M'' 点，日月交会。此时是真交会，称为定朔点。日月自平朔后再行至定朔点所需时间 T 为求定朔改正值：定朔时刻＝平朔时刻＋T。而：

$$T=\frac{S'S''}{\text{日实行速}}=\frac{M'M''}{\text{月实行速}}$$

图 12.16 定朔修正值图

由上图：$M'M''=M'M+S'S''=M'M+SS'+\frac{M'M''\cdot\text{日实行速}}{\text{月实行速}}$

$$M'M''\left(1-\frac{\text{日实行速}}{\text{月实行速}}\right)=M'M+SS'$$

$$M'M''=\frac{M'M\cdot\text{月实行速}}{\text{月实行速}-\text{日实行速}}+\frac{SS'\cdot\text{月实行速}}{\text{月实行速}-\text{日实行速}}$$

因此：$T=\frac{M'M''}{\text{日实行速}}=\frac{M'M}{\text{月实行速}-\text{日实行速}}+\frac{SS'}{\text{月实行速}-\text{日实行速}}$

$=$月行改正值＋日行改正值

在上式中，月行改正值等于平朔时月亮的行度差（$M'M$）除以月实行速与日实行速的差，日行改正值等于平朔时的太阳行度差（SS'）除以月实行速与日实行速的差。而皇极历中月行改正值（如朓朒积）是月行差（实行度、平行度差）与月亮平行度之比（乘终法，除以朔日法只是为了改变单位）。日行改正值（如迟速数）是日行差（每日实行度、平行度差）与月每日平行度之比。显然，皇极历以月每日平行度代替每日的月实行度与日实行度之差，这是它的第一项误差。此外，前面用插入法计算入余产生的增量及其修正值时，函数曲线都用直线，与实际不符，这是它的第二项误差。由于这两项误差的存在，皇极历求定日的准确性是有限的。它的意义是在与它的前辈的比较中产生的。

定日及余的计算法至此已经介绍完毕，但是《律历志》在此下还有一大段文字：

“（定日小余）不满晨前数者，借减日算，命甲子算外，各其日也。”这还是由于皇极历以晨前为昨日，若小余不满夜半漏刻（晨前）数，所得仍为昨日，故须从整日中借一算（减去 1 日），甲子算外，才是所求日的日名。

“不减与减，朔日立算与后月同。若俱无立算者，月大，其定朔算后加所借减算。”“减与不减”是指是否从整日中借一算。借或不借，求朔日的计算法（立算）是相同的，都是以夜半为一日之始，减算只是算后的处理。“若俱无立算者”，计算定朔，如何能不立算？“立”当是“借”字之误。若连续两个月没有借算，下个月必是大月。可以这样理解：夜漏最小为40刻，晨前刻为20刻，是1日的$\frac{1}{5}$，合248.4分（1日为日法1242分）。假设第一个月没有借算，它的小余（X_1）应大于248.4分。第二个月又不借算，第一个月的小余必小于583分（因$X_1+659<1242$），即$248.4<X_1<583$。每月有小余659分，因此，第二个月的小余X_2应满足$907.4<X_2<1242$。$907.4>583$，下月必是大月。其实，既知第一个月小余小于583，第二个月必是小月，那么第三个月必是大月。由于历法是自晨时为日始，计算历法仍以夜半为日始。所以，所借之算仍要加入到算出的定日之中去。

“闰衰限满闰限，定朔无中气者为闰。满之前后在分前（若近春分后、秋分前），而或月有二中者，皆量置其朔，不必依定。”①闰衰限就是一节1(2)求得的积月余分，叫做闰衰。闰衰满闰限，又无中气之月，置为闰月，这与以往历法全同，毋庸解释。“满之前后在分前”，满之前后在中气之前就容易出现一月两个中气的情形，在二分之前，出现这种情形尤其容易。原因是皇极历以为二分是最特殊的日子，其迟速数最大，春分后日行开始小于平均速度；秋分前，渐增至平均速度，都是极易出现一月之内二中气的情形的。为了避免出现这种情形，不必拘泥于定朔位置所在，皇极历允许提前或推后月朔的位置。

“其后无同限者，亦因前限。前多，以通率为初数，半衰而减之；前少，即为通率。”“限”，就是前面使用过的初率、末率之率。“其后无同限者”就是不同时具有初率、末率。这时计算时，以前限为基准。对于前限多的情形，“以通率为初数”。前限、后限间的中限为通率，所以对于后限来说，通率就是它的前限，或叫做初数。如图12.17，对于前多的情形

① 此段对中华书局1987年版《律历志》中的标点做些变动，原点法为：“……定朔无中气者为闰，满之前后，在分前若近春分后、秋分前，而或月有二中者，皆量置其朔，不必依定。”

($\triangle AOC$)AC 为通率，为初数。欲求其增量（$\triangle AOC$ 的面积）：因为，前限面积＝通率×终法＝$AC \cdot AO$，后限面积＝0，所以，按前述计算法：

图 12.17 “其后无同限者”图

$$\frac{前限+后限}{2}=通率$$

$$前限-后限=限衰$$

那么，$\frac{限衰}{2}-通率=前限-\frac{前限}{2}$

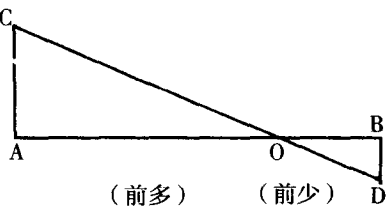
$=\frac{1}{2}前限=\frac{1}{2}(AC\times AO)=\triangle AOC$ 面积。此式左端$\left(\frac{限衰}{2}-通率\right)$就是原文说的“以通率为初数，半衰而减之”。

对于前少的情况，所求增量就是通率。因为前少者，后限为零，通率$=\frac{前限+后限}{2}=\frac{1}{2}$后限，而后限面积$=OB\times BD$，$\frac{1}{2}$后限$=\triangle BOC$的面积＝所求增量。所以原文说“前少，即为通率”。

“其加减变余进退日者，分为一日，随余初末如法求之，所得并以加减限数。”这一段是对前面 $B(m)$、$B(n)$ 表达式的补充。其中入余加减变余等于 AK 和 AK'，即 $AM+MK=AK$，$AM-MK=AK'$。倘若所得 $AK>1$ 日或 $AK'<0$，前者要去掉 1 日，并入转的整日部分；后者须从入转的整日部分借 1 日，化为分并入 AM，而后再减。这样“进退一日”之后，剩下的余数，再按 $B(m)$、$B(n)$ 及以后各式，如 $C(m)$、$C(n)$ 计算，所得结果与限数相加减，如前面的（12. 102）、（12. 103）式。

“凡分余秒篾，事非因旧，文不著母者，皆十为法。”无论分余秒篾之下，有新增单位，文中又未指明分母为若干（如以××为法），全都用十进位制（即以 10 为分母）。

“若法当求数，用相加减，而更不过通远，率少数微者，则不须算。”此言小数除理法：“用相加减”的小数，小数点以后的位数无须保留过多（“更不过通远”），过小的数字，可以舍弃，不须计算在内。

“其入七日余二千一十一，十四日余千七百五十九，二十一日余千

五百七，二十八日始终余以下为初数，各减终法以上为末数。”前面说过，皇极历取近点月为 $27\frac{1255}{2263}$日，分作四段，各分点是：$6\frac{2011}{2263}$，$13\frac{1759}{2263}$，$20\frac{1507}{2263}$，$27\frac{1255}{2263}$。就是原文说的：第一分点入于七日，余 2011 分；第二分点入于十四日，余 1759 分第三分点入于二十一日，余 1507 分；第四分点入于二十八日，此日自终余（38 少，折合 1255 分）以下为初数，终法减初数所得分以上为末数。如七日 2011 分为初数，终法－初数＝2263－2011＝252 为末数；十四日前 1759 分为初数，后 504 分为末数；二十一日前 1507 为初数，后 756 分为末数；二十八日前 1255 分为初数，以下 1008 分为末数，及下一转首日初数。

“其初末数皆加减相返，其要各为九分，初则七日八分，十四日七分二十一日六分，二十八日五分；末则七日一分，十四日二分，二十一日三分，二十八日四分。”初末数之和等于 1 日整分，所以可以“加减相返”，即初数、末数相加得整日分；整日分减初数得末数，减末数得初数。简要说来，分一日为 9 分，四分点的初数：七日为 8 分，十四日为 7 分，二十一日为 6 分，二十八日为 5 分；末数：七日为 1 分，十四日为 2 分，二十一日为 3 分，二十八日为 4 分。这在介绍月行迟疾表时已经讲过了。

“虽初稍弱而末微强，余差止一，理势兼举，皆今有转差，各随其数。”设全日为 9 分，初数、末数分数可按下比例式计算：

初数为 X，七日　　$2011:2263=X:9$　得 $X\doteq 7.99$

十四日　　$1759:2263=X:9$　　$X\doteq 6.99$

二十一日　　$1507:2263=X:9$　　$X\doteq 5.99$

二十八日　　$1255:2263=X:9$　　$X\doteq 4.99$

以上四点初数取为 8、7、6、5，数稍不足；末数取 1、2、3、4 必稍强，即所谓“初稍弱而末微强”，而强弱不过 0.01（“余差止一”）。“今有转差”，“校勘记”说，“‘今’疑是‘令’字之讹”，“令有转差”，与上下文意思不合。今有转差是算法名。《周礼·地官》、《周礼·保氏》“九数”注中有“今有重差”，都是比例计算法。“重”字误为“转”，成了“转差”。皇极历中有速差、转余等名，没有转差这个词语。这段话的全部意思是说，初弱末强，而且“余差止一”，并不是人为制造出来的，而是根据算法，各随其数算

出的，其理、其势都是如此。

“若恒算所求，七日与二十一日得初、衰数[1]，而末初加隐而不显。且数与平行正等，亦初末有数而恒算所无。”“恒算”是指前面求定日的计算法，七日与二十一日得初限、限衰两数，参见图 12.10“七、十四、二十一、二十八加减数放大图”，初限为 AB、$A'B'$；入余确定后，限衰也很容易算出。而末限与初限相加这一类计算法就不太明显了。而且，初数、末数都与月亮的平行数相等，月平行数虽初、末有数，也是一样的恒算中没有算法。

“其十四日、二十八日既初、末数存，而虚衰亦显，其数当去，恒法不见。”十四、二十八日都有初限、末限，限衰（在虚线处，因称虚衰）也很明显。其数应增应减，恒法中也没有记述。

这四个分点的“数”的求法，《律历志》都没明载，但是，它们的算法并不困难。如图 12.18，对于七日、二十一日，入余 AM 的可能位置有两种：分别在 O 点左右，在 O 点之左者，计算“平会加减限数”就是求出四边形 $AMNB$ 的面积。前文已讲过 AB、CD 的长度的计算法，利用比例关系 MN 的长度也不难算出，入余 AM 的长是已知的，对于四边形 $AMNB$ 这种直角梯形，已知上底（MN）、下底（AB）和高 AM 的长，它的面积就可算出。MN 在 O 点之右（如二十一日图），所求“平会加减限数”等于$\triangle AOB$ 和$\triangle MON$ 面积之差。AB 既已算出，$\triangle AOB$ 的面积就是已知的；CD 经算出，由$\triangle MON \backsim \triangle COD$ 也能算出 MN 的长。OM 是已知的，那么，$\triangle MON$ 的面积也是已知的。平会加减限数也就求出来了。对于十四日、二十八日，入余也可能有两种位置，在 O 点之右（如十四日图），所求平会加减限数等于四边形 $AOCB$ 和四边形 $DOFE$ 面积之差；在 O 点之左（如二十八日图），所求为四边形 $AMNB$ 的面积。显然都是可求的。

（3）求朔弦望之辰所加。

就是求朔弦望加于一日之中的某个时辰。皇极历以子正为夜半，即

---

[1] 以下标点与中华书局 1987 年版《律历志》不同，该书把末句“亦初末有数而恒算所无”断在下句，尤为不妥。

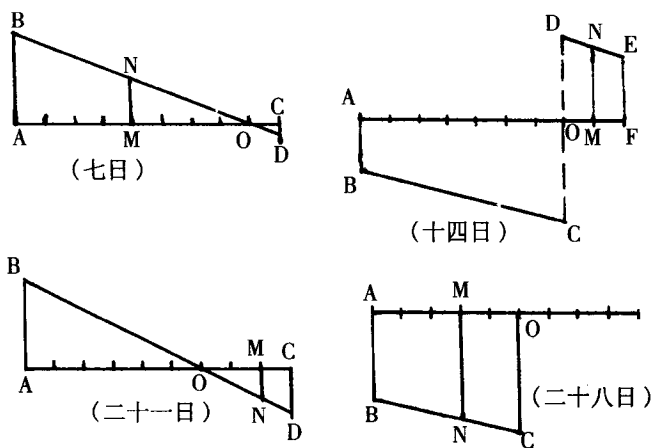



图 12.18　四分点限数计算图

子时半个时辰在头日，半个时辰入今日。每辰日分数等于朔辰（103.5分），那么，若本节 6(2)算得的朔弦望定日小余不满半朔辰分数（51大，即 51$\frac{3}{4}$分），朔弦望在子时的前半个时辰之内，《律历志》称为“子过”。若大于半个朔辰分数，加时在子之后，算法是定小余加半朔辰分，除以朔辰。自子初起算，算外即所在辰。归结为如下两式：

$$\begin{cases}\text{若定日小余}\leqslant 51\text{大，加时为“子过”}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12.106)\\ \text{若定日小余}>51\text{大，}\dfrac{\text{定日小余}+51\text{大}}{103.5}=\text{辰次}\dfrac{\text{余}}{103.5}\cdots\cdots\cdots\cdots(12.107)\end{cases}$$

辰次等于 12 以上，复自子初起算。就是《律历志》说的，“十二算外，又加子初”。

得出“所加辰”之后，由(12.107)式中的“余”数求“入辰强弱”。算法就像一节 2(2)求二十四气加辰一样，把辰余乘 12，除以朔辰，即：

$$\frac{\text{余}\times 12}{103.5}=\text{余次数}\frac{\text{余次余}}{\text{朔辰}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12.108)$$

余次数得 3 为小，6 为半，9 为大，12 为全。1 为沾唇太；2 为小少；4 为小大或名为少；5 为半少；7 为半太；8 为大少，又名为太；10 为大太；11 为穷辰少。

7. 推宿度数

《律历志》称为“求入辰法度”。

（1）常用参数。

有六个：度法、周数、周分、转、篾、周差。

度法，46644。就是一节2(1)中的气日法，为一日分数。由于太阳每日行1度，可以1日分等于1度，因称此分数为度法。

周数，17037076。为周天分数。一节2(1)计算岁实时介绍过一个参数名为岁数，等于17036466.5，周数－岁数＝17037076－17036466.5＝609.5。由此出岁差数：日行每年一周天差609.5分，$\frac{46644}{609.5}$年≐76.5年差1度，通常称此数为岁差。

周分，12016。周天度的畸零数。以周数除以度法得周天度：$\frac{17037076}{46644}=365\frac{12016}{46644}$。其中365为整度数，12016为零分，是不足一周的零分数。

转，13。每年月绕地行的周数。《律历志》说“变周从转，谓之转”。所以转就是周的另一种表述法。但是，转数不等于1，而等于13，表示它不是日行之转，而是月行之转。

篾，355。周天度$365\frac{12016}{46644}$度，其中零分12016除以蔑法897，等于$13\frac{355}{897}$分。365为度，13为分，355为篾。即周天度：$365\frac{12016}{46644}=365\frac{13\frac{355}{897}}{52}$度。

周差，609.5。周数与岁数之差，见前“周数”释文。

《律历志》在参数后有一段文字，说明参数命名的法则：“在日谓之余通，在度谓之篾法。亦气为日法、为度法，随事名异，其数本同。”翻译出来就是：计算日数时，参数897叫做余通，计算度数时就叫做篾法；同样，46644这个数字，计算节气时叫做气日法，计算度数时就叫度法。在不同的场合用不同名称，数目是相同的。

《律历志》接着说：“女末接虚，谓之周分。变周从转，谓之转。晨昏

所距日在黄道中，准度赤道计之。”意思是：自女宿末度到虚宿之间的星度有 12016 分的畸零数，称之为周分。若把周天之“周”改称为“转”，就有了“转”这个单位名词。晨昏之间日行黄道中，黄道度数要以赤道度为基准加以度量。

（2）二十八宿赤道度数。

表 12.6　二十八宿赤道度数表

星名	北方玄武七宿							总计	西方白虎七宿							总计
	斗	牛	女	虚	危	室	壁		奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	
星度	26	8	12	10	17	16	9	98	16	12	14	11	16	2	9	80
星名	南方朱雀七宿							总计	东方苍龙七宿							总计
	井	鬼	柳	星	张	翼	轸		角	亢	氐	房	心	尾	箕	
星度	33	4	15	7	18	18	17	112	12	9	15	5	5	18	11	75

二十八宿赤道度数自汉历以降，基本没有变动过，所变者不过是周天度的尾数，随各历斗分不同而变化。所以，皇极历在记述了二十八宿矩度之后，下了十二字评语：“其数常定，纮带天中，仪极攸准。”

（3）推黄道术。

如前所说，黄道度的量度是以赤道度为准，增减赤道度而得。增减规律如下表：

表 12.7　黄道度增减表

初末数	（冬至）97	98	…	107		109	110	…	（春分）119	119	118	…	109		107	106	…	（夏至）97
限数	1	2	…	11		1	2	…	11	1		…	11		1	2	…	11
限度	4°	8°	…	44°	3°少弱	48°	52°	…	88°	88°	84°	…	48°	3°少弱	44°	40°	…	4°
黄道增度	0°	1°	…	10°	平	10°	11°	…	20°	20°	19°	…	10°	平	10°	9°	…	
初末数	（夏至）97	98	…	107		109	110	…	（秋分）119	119	118	…	109		107	106	…	（冬至）97
限度	1	2	…	11		1	2	…	11	1	2	…	11		1	2	…	11
黄道	4°	8°	…	44°	3°少弱	48°	52°	…	88°	88°	84°	…	48°	3°少弱	44°	40°	…	4°
黄道增度	0°	1°	…	10°	平	10°	11°	…	20°	20°	29°	…	10°	平	10°	9°	…	0°

上表初数 97 到末数 107 之间共 11 限，限度（赤道度）差合 44°；自

初数 109 到末数 119 之间也是 11 限 44°。而 107 到 109 之间有 3°少弱，黄赤道度无增无减，《律历志》谓之“平”，因此不入限数。初数 97 时为冬至，末数 119 时为春分，中间 22 限，差 88°。加上不入限 3°少弱，总 91°少弱，恰为一象限数，黄道增度 20°，黄道限差 88°+20°=108°。同样，自春分到夏至，又是一个象限，赤道度差 91°少弱，黄道减度 20°。自冬至到夏至，黄道度先增后减，总数不增不减，与赤道度数一样，为二个象限(182°余)数。此后自夏至到冬至是自冬至到夏至过程的重复。

此外，应该说明的是，每限增(或减)1°，并非指在该限度的区间内，黄道值比赤道值多(或少)1°，比如赤道度是 4°，黄道度必是 5°(或 3°)。它仅仅表示黄、赤道度之间的比例关系，如每限增 1°，是指赤道度 4°，黄道度增$\frac{5}{108}$〔见(12.109)式〕，并非真的就是赤道度 4°，黄道度 5°。

《律历志》给出的黄道度数的计算分式是：

$$\frac{(\text{初末})\text{数}\times\text{限度}}{108}=\text{度差} \qquad (12.109)$$

$$\text{度差}+\text{冬至赤道度}=\text{黄道度} \qquad (12.110)$$

(12.109)式的意义可以这样理解：自冬至到春分的一个象限内的黄道度数(总 108 度)划分成为 22 部分，每部分与它相应的赤道度的比例数规定为$\frac{X}{108}$，X 叫做初末数。

《律历志》此段文字中的最后几句需要解释。“度有分者，前后辈之”：度后若有小数，取舍时要注意，使前后对应位置上的历日(如冬至与夏至，春分与秋分等)小数相同。“辈之”，班辈相同的意思。

“宿有前却，度即依体”：由表 12.7 和(12.109)、(12.110)式算得的是黄道度，要按传统方法求出黄道宿度来，方法是：首先需要知道黄道的初始宿度(如冬至点的黄道度)及列宿黄道矩度。由算得的黄道度中依次减去冬至所在宿以后的各宿矩度，直到减至某宿，不能再减(此时所余黄道度小于该宿的宿度)所余黄道度就是入于该宿的黄道度。但是，列宿矩度并不是绝对不变的，可能超前或滞后(即所谓“宿有前却”)。不可拘泥于运算结果，算得的宿度要以实测为根本(“度即依体”)

“数逐差迁，道不常定”：“数”指算法。它随计算与实测间的差异不

断修订。“道”指历理、天文理论。这也不是一成不变的。这两句话反映了古人对理论与实践关系的认识，是制历准则。

“准令为度，见步天行”：历法一经朝廷颁行就成了政令。天文工作者按此计算出各种天度数（“准令为度”），还要在观测到的天体运行中得到证实（“见步天行”）。

“岁久差多，随术而变”：年代愈久，误差累积数愈大。不仅如此，误差的大小还随计算方法而异。历法不同，计算的结果会有很大差异。

（4）列宿黄道度。

表 12.8　二十八宿黄道度数表

星名	北方玄武七宿							总计	西方白虎七宿							总计
	斗	牛	女	虚	危	室	壁		奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	
星度	24	7	11.5	10	17	17	10	96.5	17	13	15	11	15.5	2	9	82.5
星名	南方朱雀七宿							总计	东方苍龙七宿							总计
	井	鬼	柳	星	张	翼	轸		角	亢	氐	房	心	尾	箕	
星度	30	4	14.5	7	17	19	18	109.5	13	10	16	5	5	17	10.5	76.5

《律历志》说，以上黄道宿度，用来推步太阳的运行情形。月与五星出入黄道的计量，也循此进行。

（5）推月道所行度术。

所求为黄道数，求法是先列月亮运行的黄赤道差度表：

表 12.9　黄赤道差度表

	D				里				*A*				表					*C*
初末数	（交半）11	10	…	1		1	2	…	（交）11	11	10	…	1		1	2	…	（交半）11
限数	1	2	…	11		1	2	…	11	1	2	…	11		1	2	…	11
限度	4°	8°	…	44°	3°强	4°	8°	…	44°	4°	8°	…	44°	3°强	4°	8°	…	44°
黄道增度	−1°	−2°	…	−11°	平	1°	2°	…	11°	−1°	−2°	…	−11°	平	1°	2°	…	11°
黄赤道差	0.24	0.44	…	0.24	—	0.02	0.09	…	2.69	0.24	0.44	…	0.24	—	0.02	0.09	…	2.69
说明	“黄道增度”栏，负数为损，正数为增。																	
	C				里				*B*				表					*D*
初末数	11	10	…	1		1	2	…	（后交）11	11	10	…	1		1	2	…	（交半）11

续表

	C				里				B		表							D
限数	1	2	…	11		1	2	…	11	1	2	…	11		1	2	…	11
限度	4°	8°	…	44°	3°强	4°	8°	…	44°	4°	8°	…	44°	3°强	4°	8°	…	44°
黄道增度	−1°	−2°	…	−11°	平	1°	2°	…	11°	−1°	−2°	…	−11°	平	1°	2°	…	11°
黄赤道差	0.24	0.44	…	0.24	—	0.02	0.09	…	2.69	0.24	0.44	…	0.24	—	0.02	0.09	…	2.69
说明																		

表中“黄赤道差”栏中的数据，是据《律历志》所给公式“各积其数，百八十而一”算得，参照本节 7(3)“推黄道术”中(12.109)式的算法，知“其数”二字是指“初末数”和“限度”，所给公式可写为：

$$\frac{\text{初末数}\times\text{限度}}{180}=\text{黄赤度差} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.111)$$

已知月行赤道度，加减黄赤度差就得了月行黄道度，加减的判定法由表中“黄道增度”栏中正负数表示的增、损，及月行在表、在里共同决定。表、里，增、损与加或减的关系如表 12.10。

表 12.10　表里交点前后增损表

月在表	半后—交前	交后—半前
	损减增加	损加增减
月在里	交前—半后	半前—交后
	损加增减	损减增加

为确定表里与先交、后交、交半之间的位置关系，绘出表里增损减加图(见图 12.19)。图中黄、白二道交于 A、B 两点，A 为先交点，B 为后交点，C、D 分别是两个半交点。$\overset{\frown}{ABC}$为表为外，$\overset{\frown}{ADB}$为里为内。A、B、C、D 等符号标在前黄赤道差度表中的相应位置上，从表 12.9“黄道增度”栏中表示的损或增，结合表里交点前后增损表，就能确定表里增损减加图中在月道表里各段上赤道度数与(12.111)式求得的黄赤道差之间的加减关系。即：

$$\text{月行赤通度}\pm\text{黄赤道差}=\text{月道所行(黄道)度} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.112)$$

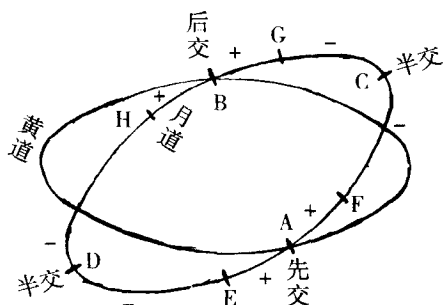



图 12.19 表里增损减加图

其中黄赤道差是由黄赤道差度表按限度多少算得的，若月行度不是限度单位(4°)的整数倍，《律历志》提供的算式是：

$$\frac{\text{直行数}\times\text{入度}}{4}=\text{所入度的黄赤度差} \quad\cdots\cdots (12.113)$$

其中“入度”是入于某限之度，如所求赤道度是6°，在*DA*段。查“黄赤道差度表”可知，入于第二限，入度是2。“直行数”是所入限内的全部黄赤道差数。在上例中，第一限黄赤道差是0.24，第二限的黄赤度差是0.44，则0.44就是本例的直行数。显然(12.113)式算得的是在所入限内黄赤度差的平均数，是很不准确的。

《律历志》还说，若不是由赤道度求黄道度，而是相反，由黄道度求赤道度，可以仿照上法进行。先由黄道度确定赤道度所在的表、里位置，而后由黄赤道差度表推知黄赤道度的增损关系，并进而推出黄道率来，反用(12.112)式，就求出月行赤道度了。所谓黄道率，可由黄赤度差和赤道度求得：黄道度±黄赤道差＝赤道度。两端同除赤道度，移项得：

$$\frac{\text{黄道度}}{\text{赤道度}}=1\mp\frac{\text{黄赤道差}}{\text{赤道度}} \quad\cdots\cdots (12.114)$$

左端就是所谓黄道率。

(6)推日度术。

就是推算所求年初(冬至夜半)日所在度。与以往历法不同的是它直接以黄道宿命度，计算出的是黄道宿度数。所给公式是：

$$入元距所求年\times岁数=积实 \quad\cdots\cdots (12.115)$$

$$\frac{积实-m\cdot周数}{度法}=积度\frac{分}{度法} \quad\cdots\cdots (12.116)$$

其中 m 为待定自然数，满足 $0\leqslant积实-m周数<周数$。

$$分-冬至余=夜半分 \quad\cdots\cdots (12.117)$$

其中“冬至余”就是前面(12.14)式中的“气余”，是冬至点到冬至所在日夜半之间的日分数。它的分母是“气日法”，与此处(12.116)式中的“度法”相同，因此，可以直减。若“分”小不足减，应取(12.116)式所得积度1，破为分，而后再减。下面解释其意义：

将(12.115)式代入(12.116)式：

$$\frac{入元距所求年\times岁数-m\cdot周数}{度法}=积度\frac{分}{度法}$$

左边化为：$入元距所年\times\frac{岁数}{气日法}-m\cdot\frac{周数}{度法}$，第一项是自入元到所求年之间的岁度(日)数，第二项是相应的周天度数，两者相减是所求年岁首或者说是冬至日入于第($m+1$)周天的天度数。换句话说就是(12.116)式右边所得是冬至点所在的周天度分数。若如(12.117)式那样，再从其中分数减去冬至余分也就是减去冬至点到冬至夜半之间的日分数，所余自然是冬至夜半的周天度分数了。

从周天度分中依次减去列宿黄道度，皇极历周天宿自女末虚初始，所以减列宿黄道度时自虚1度减起，减至某宿，所余积度分数不足该宿度，余数就是冬至夜半入于该宿的黄道度数。

(7)求年天正定朔度。

前面解释过定气求法，还有定朔求法，定朔到冬至定气之间的日数及余都可当做是已知的。如图12.20：A 为定朔点，C 为冬至定气点，B 为定朔所在日夜半。AC 为朔到冬至定气之间的日及余。所求“天正定朔度”是指 BC 的度分数。而 AC 之间的度数(《律历志》称为“冬至度”)是指 BC 的

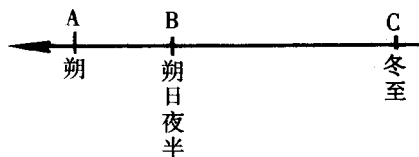



图12.20　天正定朔度求法图

度分数。而 AC 之间的度数(《律历志》称为"冬至度")是已知的,那么,只要求得 AB 之间的度数,由于:

$$BC = AC - AB \quad \cdots\cdots \quad (12.118)$$

问题也就解决了。

AB 是定朔到冬至之间的日余,即整日之外的畸零分。由于日速不等,整日及余都有先后数,《律历志》说:"以定朔日到冬至每日所入先后:余为分,日为度[1]。加分以减冬至度,即天正定朔夜半日在所度分。""加分"是指定日中的日余加上在日余期间产生的先后数,两者之和就是图 12.20 中 AB 表示的度分数;"冬至度"则是 AC 表示的度分数。因此,"加分以减冬至度"就是(12.118)式右边的代数式。(12.118)式用文字表示就是:

$$\text{天正定朔夜半度分} = \text{冬至至朔定度分} - \text{冬至到朔日余定度分} \quad \cdots\cdots \quad (12.119)$$

简写作:

$$\text{天正定朔夜半度分} = \text{冬至度} - \text{日余分} \quad \cdots\cdots \quad (12.120)$$

《律历志》还给出另一个求法:"亦去朔日乘衰总已通者,以至前定气除之。又如上求差加,以并去朔日,乃减度,亦即天正定日所在度。""定气除之"以前,是指如下代数式:$\dfrac{\text{去朔日} \times \text{衰总}}{\text{至前定气}}$。"去朔日"是所求的天正定朔夜半到合朔点之间的日分数,在图 12.20 中是指 AB 间的日数。"衰总"指冬至前气先后数的累积值。"至前定气"指冬至点到冬至前的大雪点之间日数。显然,此代数式表示的是在"去朔日"内先后数的累积数。"又如上求差加"意思是:就像上述算法那样,求出日行差还要加上日数〔比如(12.120)式中的"日余分"求法〕。"以并去朔日",此处由上面的代数式求出了"去朔日"(合朔点到朔日夜半)的日行差(即先后数的累积值),也要加上"去朔日"数。"乃减度",就是用冬至到定朔之间的日行度分数去减。如此,《律历志》叙述的方法可表示如下:

$$\text{冬至度} - \left(\frac{\text{去朔日} \times \text{衰总}}{\text{至前定气}} + \text{去朔日} \right) = \text{天正定朔日所在度} \quad \cdots \quad (12.121)$$

---

① 此句中标点与中华书局 1987 年版《隋书·律历志》有所不同,参见该书第 479 页第 5 行。

(12.120)式与(12.121)式本质上并无不同，

《律历志》此段最后说："皆日为度，余为分。其所入先后及衰总用增损者，皆分前增，分后损其平日之度。"在把先后数与日、余相加时，日、余要化为度分：日化为度，余化为分；(12.121)式用衰总计算有时涉及缠衰，缠衰数都有增、有损，基本规律是在春分、秋分之前为增，之后为损，各到二至而终。"增"指比平行度大，损指比平行度小。

以上所求为朔日夜半定度分数，下面求次日夜半、弦望及次月朔夜半定度：

次日夜半定度等于朔日夜半度加次日所入先后分再加次日度：

$$\text{定朔度}+\text{次日度}\pm\text{次日先后分}=\text{次日夜半定度} \quad (12.122)$$

同样思路可求弦望夜半定度：

$$\text{定朔度}+\text{弦望距朔日度}\pm\text{弦望距朔每日所入先后分}$$
$$=\text{弦望夜半定度} \quad (12.123)$$

亦可求下月朔夜半定度：

$$\text{定朔度}+\left\langle\begin{matrix}30\text{日(大月)}\\29\text{日(小月)}\end{matrix}\right.\text{所化度}\pm\text{每日所入先后分}$$
$$=\text{次日朔夜半定度} \quad (12.124)$$

自(12.120)式至(12.124)式所求定度，若由之推算入于某宿距度，就像在本节7(6)中进行的那样，自虚宿1度开始，依次减去各宿黄道度，至到所余不足某宿度，为入于该宿矩度数。须注意的是，自虚1度依次减各宿度时，若再至虚宿，不可忘记虚宿之前女宿之末除了减去前面二十八宿黄道度数表中列出的12度之外，周天星度的零分数(即所谓"周分"数)是附在女宿之末的，也要减去。《律历志》说是"至虚去周分"。

(8)求朔弦望辰所加。

"辰所加"就是"所加辰"，所以，通常历法都是指朔弦望加于一日的某个时辰，算法是把朔弦望的日余分除以每辰分数。此处似乎有所不同，从所述的计算法看，所求是朔弦望所在度分数，算法是先求定余度分，再加夜半度分，得全数。

$$\frac{\text{度准}\times\text{定余}}{\text{约率}}=\text{平分} \quad (12.125)$$

$$\text{平分}\pm\frac{\text{定余}\times\text{其日所入先后分}}{\text{日法}}+\text{其夜半度分}$$

=朔弦望辰所加度分 …………………………………… (12.126)

(12.125)式算出的是在定日余时间内,若以平均速度运行,所行度分数。日余通常表示为$\frac{日余}{日法}$;日平行每日行1度,$\frac{日余}{日法}$日行$\frac{日余}{日法}$度,日、度数目相同,是不需要计算的。但是日余的分母日法是朔日法(1242),在(12.126)式中要与在日余期间,由于日行不均产生的先后数相加减,先后数的分母是气日法(46644),须把两者单位化同,都化为朔日法或者都化为气日法,《律历志》采取了后者,方法是把定余分子分母同乘以岁率:

$$\frac{定余\times岁率}{朔日法\times岁率}=\frac{2\times度准\times定余}{2\times度准\times138\times约率}=\frac{度准\times定余}{气日法\times约率}$$

$$=\frac{度准\times定余}{约率}/气日法$$

其分子就是日余分母化为气日法以后的日余数,《律历志》称为"平分",这就是(12.125)式的由来。

分母既已化同,再由前面的表12.1"日行迟速表"算得朔弦望所在日一日之内的先后数,据以算出在日余其间(不足1日)的先后数$\left(\frac{日余}{日法}\times其日所入先后分,其中日法为朔日法(1242分)\right)$,加上夜半时度分,就得到了(12.126)式。

(12.125)、(12.126)式算得的度与分,单位制已如前述是1度=气日法分,气日法=篾法×转法(即46644=879×52)。因此,把算得的分除以篾法,所得商叫做转分,不足篾法的余数叫做篾。

若所求仅是朔辰所加,也就是合朔时,即日、月同处的度分数。

(9)推月而与日同度术。

此处专论合朔时的日、月所在度。分六步计算。

第一步,"各以朔平会加减限数、加减朓朒,为平会朓朒"。即:

朔平会±限数±朓朒=平会朓朒 …………………………………… (12.127)

"朔平会加减限数"的算法见一节6(2),它的意义是"入余增量",再"加减朓朒",入余增量是由入余朓朒产生的,此处加减之朓朒当然不再包括入余朓朒,只能是指朔"平会"整日的朓朒。朔平会只由整日和入

余两部分组成，(12.127)式前一部分是它的入余增量，后一部分是整日增量，可知(12.127)所求之“平会朓朒”，意义是平会月行增量。

第二步，“(平会朓朒)以加减定朔，度准乘，约率除，以加减定朔辰所加日度，即平会辰日所在”。所指算式是：

$$\text{定朔辰所加日度}\pm\frac{(\text{定朔}\pm\text{平会朓朒})\times\text{度准}}{\text{约率}}=\text{平会辰日所在} \quad \cdots\cdots (12.128)$$

此式重点在于弄懂左端第二项的意义。其中“乘度准，除约率”是为了把分母由朔日法变换为气日法，现在看“定朔±平会朓朒”的意义。“平会朓朒”已如前述，是指平会月行增量；“定朔”呢？从全式看，由定朔辰度得平会辰度，增减数必然是“平会增量”，它包括两部分：月行增量和日行增量。平会朓朒既是月行增量，定朔应是指日行增量。因此，可以断定：“定朔”后脱“先后数”三字。(12.128)式应该写为：

$$\text{定朔辰所加日度}\pm\frac{(\text{定朔先后数}\pm\text{平会朓朒})\times\text{度准}}{\text{约率}}=\text{平会辰日所在} \quad \cdots\cdots (12.129)$$

第三步，“又平会余乘度准，约率除，减其辰所在，为平会夜半日所在”。即：

$$\text{平会辰日所在}-\frac{\text{平会余}\times\text{度准}}{\text{约率}}=\text{平会夜半日所在} \quad \cdots\cdots (12.130)$$

“平会余”就是平会日余，是不足一日部分，辰日度减日余得整度，整日度就是夜半度。把平会余乘度准，除约率也是为了把分母化同，或者说是为了把单位制化同：与辰日度一样，都变为 1 度＝46644 分。

第四步，“乃以四百六十四半乘平会余，亦以周差乘，朔实除，从之，以减夜半日所在，即月平会夜半所在”。以文字式表示为：

$$\text{平会夜半日所在}-\left(\text{平会余}\times 464.5+\frac{\text{平会余}\times\text{周差}}{\text{朔实}}\right)$$
$$=\text{月平会夜半所在} \quad \cdots\cdots (12.131)$$

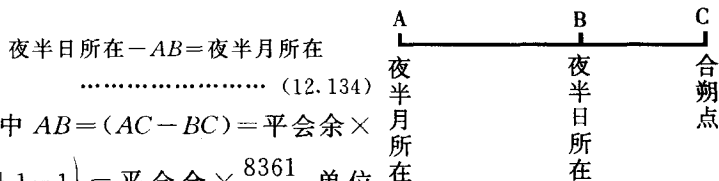
由夜半日所在求夜半月所在，可以这样考虑，如图 12.21，月行 AC 与日行 BC 所历时间都是平会余。而：

$$AC=\text{平会余}\times\text{月速}$$
$$=\text{平会余}\times\left(\frac{\text{月率}}{\text{岁率}}+1\right)$$

$$=平会余\times\left(\frac{8361}{676}+1\right) \quad \cdots\cdots (12.132)$$

$$BC=平会余\times 日速=平会余\times 1 \quad \cdots\cdots (12.133)$$

那么：

$$夜半日所在-AB=夜半月所在 \quad \cdots\cdots (12.134)$$

其中 $AB=(AC-BC)=平会余\times\left(\frac{8361}{676}+1-1\right)=平会余\times\frac{8361}{676}$，单位制与“夜半日所在”化同，即将 AB“乘度准，除约率”，得：

A　B　C

夜半月所在　夜半日所在　合朔点

图 12.21　日月夜半差度图

$$AB=平会余\times\frac{8361}{676}\times\frac{338}{9}\doteq 平会余\times 464.5 \quad \cdots\cdots (12.135)$$

本来将(12.135)式代入(12.134)即得“夜半月所在”。但是皇极历考虑得更加精细，顾及了在平会余期间岁差的影响，把(12.134)式写为：

$$夜半日所在-(AB+\triangle)=夜半月所在 \quad \cdots\cdots (12.136)$$

△的求法可以这样考虑，皇极历的岁差数为周差(609.5)，即每岁差天 609.5 度。求“平会余”之内差几度，这是一个简单的比例问题。须注意的是平会余的分母是朔日法(1242)，1 周岁的度分数不应该像通常那样取岁实数，而应取朔实数。此比例式可以列为：

$$朔实:周差=平会余:X$$

$$X=\frac{平会余\times 周差}{朔实}$$

代入(12.136)得：

$$夜半日所在-\left(平会余\times 464.5+\frac{平会余\times 周差}{朔实}\right)$$

$$=月平会夜半所在。$$

这就是《律历志》所给的(12.131)式

第五步，“三十七半乘平会余，增其所减，以加减半，得月平会辰平行度”。“增其所减”就是指把在上一部作被减数的“平会夜半日所在”增加进来，因此，可表示为下式：

$$37.5\times 平会余+平会夜半日所在\pm 0.5=月平会辰平行度 \quad \cdots (12.137)$$

“37.5×平会余”就是把平会余“乘度准，除约率”后所取近似值。此数与平会夜半日所在相加，从图 12.21 可以看出是 B 点的夜半日所在加上 BC，得 C 点即合朔点度，它既是合辰日度，又是合辰月度。(12.137)式说是月度，完全正确。但是(12.137)式中又有“加减半”一项，这反映了(12.137)式的精确度，从图 12.21 知，按月行与日行计算合朔度所得结果应该相同，若不相同，增减半度调整之。

第六步，“五百二乘朓朒，亦以周差乘，朔实除而从之，朓减朒加其平行，即月定朔辰所在度，而与日同”。“其平行”三字是指第五步计算所得“月平会辰平行度”，可写为下式：

$$\text{月平会辰平行度} \pm \left(502 \times \text{朓朒} + \frac{\text{朓朒} \times \text{周差}}{\text{朔实}}\right) = \text{定朔辰月所在度} \quad \cdots\cdots (12.138)$$

即由平会辰度增减二项修正值，可得定朔辰度：一项是朓朒值包含的度差数，另一项是与朓朒数对应的岁差数。

朓朒包含的度差数＝朓朒×月平行度

再与月平会辰度单位化同，即“乘度准，除约率”得：

$$\text{朓朒} \times \text{月平度} \times \frac{\text{度准}}{\text{约率}}$$

$$= \text{朓朒} \times \left(\frac{8361}{676} + 1\right) \times \frac{338}{9}$$

$$\doteq 502 \times \text{朓朒}$$

朓朒对应的岁差值照例是以朓朒与朔策之比乘周差。

这两项与月平会辰度相加减，就得到了(12.138)式。《律历志》说，所得“月”定朔辰所在度，也是“日”定朔辰所在度。又说“若即以平会朓朒所得分加减平会辰所在，亦得同度”。若把“朓朒所得分”理解为朓朒化度分及朓朒所得岁差分，这段话就是(12.138)式。

(10)求月弦望定辰度。

就是计算月在弦望时的定度数。一节 6(2)有“推朔望定日术”，定日与日所在度等，因而，可以认为日在弦望时的定度数是已知的。而上弦时日月度相差 1 象限，望时相差半周天，下弦时相差 3 象限，由此可得弦望时月度求法，先求象限度：

$$周天度=\frac{周数}{度法}=\frac{17037076}{46644}=365\frac{12016}{46644}度$$

$$1象限=\frac{1}{4}周天=91\frac{14665}{46644}=91\frac{16\frac{313}{897}}{52}度$$

其中由于分母 52 为转法，分子 16 因名为转分；897 为篾法，分子 313 就是篾。这样得 1 象限为 91 度 16 转分 313 篾。

半周天＝2 象限＝182 度 32 转分 626 篾

3 象限＝273 度 49 转分 42 篾

由此得：

上弦辰所加定日度分＋91 度 16 转分 313 篾＝上弦辰定月度 ……………………………………………………………… (12.139)

望辰所加定日度分＋182 度 32 转分 626 篾＝望辰定月度 …… (12.140)

下弦辰所加定日度分＋273 度 49 转分 42 篾＝下弦辰定月度 ……………………………………………………………… (12.141)

由于皇极历周天起于女虚之间，所求月度至虚宿则除去周天分。《律历志》说是“皆至虚，去转周求之”，与本节 7(1)说的“女末接虚，谓之周分，变周从转，谓之转”意思雷同。

(11)定朔夜半入转。

因所求是“夜半”入转经朔与定朔相比，时刻会有不同，而增减达 1 日以上者，终属少数，只要所差不及 1 日，经朔夜半与定朔夜半并无区别。就是《律历志》说的，经朔与定朔夜半有增损者“亦以 1 日加减之”，不及 1 日则“因经朔为定”。

求定朔次日，弦望定日及次月定朔等日夜半入转的日、月辰度，与求定朔夜半一样，差不及一日，均以经朔次日、弦望、次月朔等日夜半辰度为定。

(12)推月转日定分术。

即推算月在每个入转日内的行度分的方法。先推每日月行定分，给出了两个计算式：

$$\frac{夜半入转余\times 逡差}{终法}=见差 \quad\cdots\cdots (12.142)$$

其日逡分±见差＝月每日行逡定分 ……………………………… (12.143)

将以上两式合并为一式得：

$$\text{其日逡分}\pm\frac{\text{夜半入转余}\times\text{逡差}}{\text{终法}}=\text{月每日行逡定分}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(12.144)$$

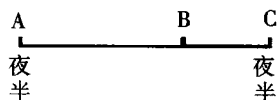
逡差、逡分、逡定分等名目中的“逡”字都作“速”字读，如此以上（及以后）各式就与前面表 12.3 的“月行迟速表”联系在一起了。以上三式可作如下解释：欲求某日（如图 12.22 中的 *AC*）的月转日定分，先求该日的入转数，得转日和转余，设 *AB* 在某转日内，*BC* 为转余。某转日的速分及其与次日的速差都能由“月行迟速表”查得。*BC* 段多行（息）或少行（消）数是$\frac{\text{入转余}}{\text{终法}}\times$速差，这便是“见差”。*AB* 全日行速分增减此数（息加消减），就得到了 *AC* 全日的月行速定分了。这就是(12.143)式的由来。

A B C
夜半 夜半

图 12.22 某日入转图

《律历志》又给出几种求次日月转定分的求法：

由逡定分求夜半法。《律历志》公式是：

$$\frac{\text{逡定分}+\text{转分}}{\text{转法}}=\text{次日夜半月转定度}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(12.145)$$

逡定分如前述，是头日夜半时的月转定分，单位与“月行迟速表”中的速分相同，除以转法（日干元）才是月行度分。转分由第二日月实行度分化成。化法如：月平行度每日 $13\frac{249}{676}$度，化为转分 $13\frac{249}{676}=\frac{695\frac{2}{13}}{52}$，其中 $695\frac{2}{13}$为转分，52 为转法。实行度分化转分法与此同。不用实行度分而用转分，是为了与逡定分单位制相同。如此，(12.145)式就很容易理解了，由它求得的是自头日夜半到隔日夜半 2 日之内的月行度分数。

再加得头日到第三日夜半的月转定分数……如此计算下去，可得朔、弦、望各日夜半月所在定度分。这就是《律历志》说的“因日转若各加定日，皆得朔、弦、望夜半月所在定度”。

第二种是“就辰加以求夜半”法。即由某日的“辰”所加度分数求该日夜半时的月在度分。已知“辰”所加度分对于月行，就是已知在定日和定余内月行全部度分数。求夜半月度，只要算出在“定余”期间的月行度

分数，从辰所加度分中减去此数就是了。在定余期间的月行度分数包括两部分：一是平行分数，二是在定余期间由于月行速度的变化产生的增减数，即：

$$\text{辰加度分}-(\text{定余平行分}+\text{定余增减分})=\text{夜半月行度分} \quad \cdots\cdots (12.146)$$

下面看一看《律历志》所给公式。《律历志》按定余是“消”或是“息”分别给定公式。

原文：各以逡分[①]，消者，定余乘差，终法除，并差而半之。

释文：无论消息，各以逡分作首项。对于“消”者（就是月速由大变小者），第二项是$\frac{\text{逡差}\times\text{定余}}{\text{终法}}$。第二项与首项关系是“差而半之”，即：

$$\text{逡分}-\frac{\text{逡差}\times\text{定余}}{2\,\text{终法}} \quad \cdots\cdots (12.147)$$

原文：息者，半定余以乘差，终法而一。

释文：对于“息”者，第二项是$\frac{\frac{1}{2}\text{定余}\times\text{逡差}}{\text{终法}}$。与首项关系用加号，即：

$$\text{逡分}+\frac{\frac{1}{2}\text{定余}\times\text{逡差}}{\text{终法}} \quad \cdots\cdots (12.148)$$

可以看出(12.147)、(12.148)式的不同，仅在于二项之间的加减号。

原文：皆加所减，乃以定余乘之，日法而一，

释文：“皆”字是说(12.147)、(12.148)两式都如此。“所减”，被从中减去若干的数。审视(12.147)、(12.148)两式不难认定，此数是指“逡分”。如此，可得两式。

$$\text{“消”者：}\quad \frac{\left(\text{逡分}-\frac{\text{逡差}\times\text{定余}}{2\,\text{终法}}+\text{逡分}\right)\times\text{定余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (12.149)$$

$$\text{“息”者：}\quad \frac{\left(\text{逡分}+\frac{\frac{1}{2}\text{定余}\times\text{逡差}}{\text{终法}}+\text{逡分}\right)\times\text{定余}}{\text{日法}} \quad \cdots\cdots (12.150)$$

---

① “校勘记”于此字下补“半逡差减”四字，此处不取。

原文：各减辰所加度，亦得其夜半度。

释文："各减辰所加度"也是通消、息二式而言。对于"消"者：

$$\text{辰所加度}-\frac{\left(\text{逡分}-\frac{\text{逡差}\times\text{定余}}{2\text{终法}}+\text{逡分}\right)\times\text{定余}}{\text{日法}}=\text{夜半度}\quad\cdots(12.151)$$

对于"息"者：

$$\text{辰所加度}-\frac{\left(\text{逡分}+\frac{\frac{1}{2}\text{定余}\times\text{逡差}}{\text{终法}}+\text{逡分}\right)\times\text{定余}}{\text{日法}}=\text{夜半度}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12.152)$$

与（12.146）式比较，"辰所加度"就是"辰加度分"，末一项$\frac{\text{逡分}\times\text{定余}}{\text{日法}}$就是"定余平行分"。因此，评论(12.151)、(12.152)两式的合理性，关键是看此二式的中间项$\frac{\left(\text{逡分}\pm\frac{\text{逡差}\times\text{定余}}{2\text{终法}}\right)\times\text{定余}}{\text{日法}}$是否就是(12.146)式中的"定余增减分"。

在前列"月行迟速表"中只能查到整数日的增减分，"定余"不足1

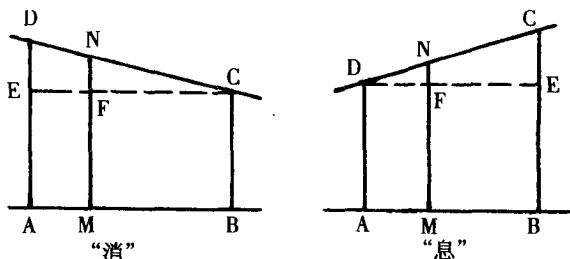



图 12.23　定余增减分计算图

日，应该用内插法计算出来。内插法前面应用已不止一次，如图 12.23：DC 为逡分函数曲线（"消"者为降函数，"息"者为升函数），AB 为时间轴，$AB=1$ 日，AM 为定余。所谓"定余增减分"就是四边形 $AMND$ 的面积。下面计算出此四边形的面积，看一看与上两式的中间项是否相同。先看左边"消"者图，AD 为逡分，DE 为逡差。

$$四边形 AMND 面积=\frac{1}{2}(AD+MN)\cdot AM$$

$$=\frac{1}{2}[AD+(MF+NF)]\cdot AM$$

利用$\triangle CFN \backsim \triangle CED$,可以得到$NF=\frac{CF\cdot DE}{CE}$,代入上式得:

$$四边形 AMND 面积=\frac{1}{2}\left[AD+MF+\frac{CF\cdot DE}{CE}\right]\cdot AM$$

$$=\frac{1}{2}\left[遒分+(遒分-遒差)+\frac{(终法-定余)\times 遒差}{终法}\right]\times\frac{定余}{日法}$$

$$=\left[遒分-\frac{遒差}{2}\left(1-\frac{终法-定余}{终法}\right)\right]\times\frac{定余}{日法}$$

$$=\frac{\left(遒分-\frac{遒差\times 定余}{2终法}\right)\times 定余}{日法}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(12.153)$$

再看右边“息”者图,AD 为遒分,CE 为遒差。

$$四边形 AMND 面积=\frac{1}{2}(AD+MN)\cdot AM$$

$$=\frac{1}{2}[(AD+(MF+NF)]\cdot AM$$

利用$\triangle DFN \backsim \triangle DEC$,知$NF=\frac{DF\cdot CE}{DE}$;代入上式得:

$$四边形 AMND 面积=\frac{1}{2}\left[AD+\left(MF+\frac{DF\cdot CE}{DE}\right)\right]\cdot AM$$

$$=\frac{1}{2}\left[遒分+\left(遒分+\frac{定余\times 遒差}{终法}\right)\right]\times\frac{定余}{日法}$$

$$=\left(遒分+\frac{定余\times 遒差}{2终法}\right)\times\frac{定余}{日法}\quad\cdots\cdots\quad(12.154)$$

(12.153)、(12.154)两式分别与(12.151)、(12.152)两式的中间项相同,表明(12.151)、(12.152)两式成立。

《律历志》接着说:“因夜半亦如此求遒分,以加之,亦得辰所加度。”这是讲对(12.151)、(12.152)式进行的逆运算。(12.151)、(12.152)式是已知辰加度分求夜半度分,此处是由夜半度分求辰加度分。须注意的是,这两种情况下,都认为定日、定余是已知的,由此可求入转日,进而从“月行迟速表”查出遒分和遒差,才能顺利进行各步运算。算法略。

对于计算过程，《律历志》说，由入转日求逡分、逡差时，起初可以把从表中查得的逡分、逡差数当做篾数进行计算，算至结果再以转分(52)除，求得转分，也就是求得了实行度分。

最后讲“因经朔夜半求定辰度”的方法，第一步是“以定辰去经朔夜半减”，此处“定辰”必非所求之“定辰度”，应该是指定朔之“辰”的日及日余，系由已知条件“经朔夜半”推出。“夜半”是整日，推不出日余来，还应该知道经朔日余。果如此，这一部分的已知条件和所求数也就可以断定了：已知经朔大、小余及夜半月度（可由大、小余推出），求定朔加辰月度。《律历志》给定算法是，先由经朔大、小余求出定朔大、小余，就是定朔时的日辰度。再减经朔夜半日度（即经朔大余数），求得“定辰去经朔夜半”之间的日度分数。前边说过，定朔辰距经朔夜半一般不超过1日，只有日分元日度。个别超过1日者，有分有度。这个日分数改变分母后就化成了入转余，查“月行迟速表”，求出对应的逡分和逡差，按(12.142)式和(12.143)式算出对应的逡定分，经朔夜半月度分加减逡定分就得到了定辰度分。

(13)求月晨昏度。

本节7(12)既已求得某日夜半月行度，查表求出该日的夜漏数〔表12.2“七十二候及夜半漏刻、昏中度分表”，从表中查出某气夜半漏刻数计算某气中某日的夜半漏刻，算法参见一节4(4)〕，晨昏月度也就不难计算了。《律历志》所给公式有四个：

$$\frac{\text{每日夜漏之半} \times \text{逡定分}}{100} = \text{晨分} \quad (12.155)$$

$$\text{逡定分} - \text{晨分} = \text{昏分} \quad (12.156)$$

$$\frac{\text{晨(昏)分}}{\text{转法}} = \text{转度} \quad (12.157)$$

$$\text{夜半定度} + \text{(晨或昏)转度} = \text{月晨昏度} \quad (12.158)$$

对于(12.155)式，逡定分〔量名始见(12.143)式〕是所求日内全日的月行分（除转法则化为度）；$\frac{\text{夜漏之半}}{100}$是夜半漏刻占全日(100刻)的几分之几，乘以逡定分显然是指在夜半漏刻的时间内月行分数，计量时间从夜半始，所以把此分数称为晨分。

对于(12.156)式，全日的月行分为逡定分，减去晨分(自夜半到晨之间的月行分)应为自晨到夜半间的月行分。但是由于自夜半到晨，与自昏到夜半间的月行分相等，所以，自晨到夜半，与自夜半到昏之间的月行分相等，后者称为昏分。即：

逡定分＝夜半到晨＋晨到昏＋昏到夜半之间月行分

昏分＝夜半到晨 ＋晨到昏之间月行分

由于夜半到晨 ＝昏到夜半之间月行分，所以，昏分＝晨到昏＋昏到夜半之间月行分。

对于(12.157)式，由于前两式所得晨分及昏分都与逡定分单位相同，逡定分与速分单位相同，除以转法后才能化为度，(12.157)式称为转度是说算得的为入转度数，与普通天度大小并无区别。

对于(12.158)式，夜半月度加晨度得晨月度，加昏度得昏月度，这是不言而喻的。《律历志》却说"望前以昏，后以晨，加夜半定度，得所在"。难道夜半定度在望以前只有加昏转度才能得知月所在度？同样，难道夜半定度在望以后只有加晨转度才能得知月所在度？当然不是，无论望前后，亦不论加晨昏，都能得到月所在度。《律历志》所说当不止此。所谓"得所在"不仅得知月所在度，还应包括观察到在天体上的位置。因此，在望以前，日月相距一般小于 180°，日东月西，昏以后现于天穹，所以说"望前以昏"；望以后，日月相距一般大于 180°，日西月东，晨前月现于天穹，所以要望"后以晨"。

(14)求晨、昏中星。

是计算晨、昏中星的天度数，《律历志》所给公式是：

$$\text{度数}+\text{夜半定度}=\text{中星度} \qquad (12.159)$$

所谓晨昏中星就是晨昏时通过上中天的星，与夜半度相差半周天，(12.159)式中的度数当为半周天度：$182\dfrac{29330}{46644}$度。如图 12.24，晨中星度＝夜半定度＋$\widehat{ABD}$＝夜半定度＋半周天。

昏中星度也是此数。但是为何把半周天度称为"度数"，在皇极历中找不到这种先例。"度数"还可以解释为"七十二候及夜半漏刻、昏中度分表"中的"昏去中星"的度数，即图 12.24 中的$\widehat{BD}$或$\widehat{CD}$的度数。若如

此，加夜半定度之外，还要再加上晨去夜半度，即(12.159)式中的度数包括晨去中星度得晨去夜半度两项。

《律历志》在这一节中还给出了求朔、弦、望所加时刻的计算式：

$$\frac{100\times\text{定余}}{\text{日法}}=\text{各定辰近入刻数} \qquad (12.160)$$

每日 100 刻，朔(或弦、望)日畸零部分(定余)折合的刻数($\frac{100\times\text{定余}}{\text{日法}}$)就是朔(或弦、望)入于该日的刻数，即所谓“定辰近入刻数”。

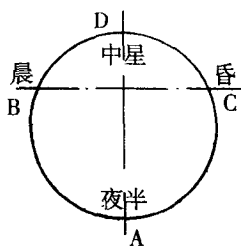



图 12.24 中星度图

$$\text{各定辰近入刻数}-\text{夜半漏刻数}=\text{所人晨刻数} \qquad (12.161)$$

若各定辰近入刻数<夜半漏刻，所得各“定辰近入刻数”在晨前，属于昨日。

二、交食计算法

1. 推入交术

(1)主要参数。

不限于推算入交所需参数，推算交、会、食等参数都包括在内。

复月，5458。是一个交会周期月数。古人把月亮运行中出入黄道一次(一出一入)叫做一复。每次出入黄道的角度、交点各不相同，呈周期性变化，这个周期就是 5458 月。

交月，2729。是复月的一半。月入黄道谓之交，一出一入为一复。从出入黄道的次数论，交是复数的$\frac{1}{2}$。因此所谓交月并不是像复日那样，可以理解为黄白道交的周期是 2729 月，只是一个象征数。

交率，465。皇极历的交会周期前面说是 5458 月，更确切说是每 5458 月 5923 交，多出的 465 交叫做交率。后边将要说到，每会 5$\frac{404}{465}$月

$=\frac{2729}{465}$月。在乾象历、景初历等历法中，465 都名为会率。由此知，交率（或名会率）是有关交食周期的重要参数。

交数，5923；交法，7356366；会法，577530。见后面释文。

交复日，27；余，263；秒，3435。皇极历取一个交点月为 $27\frac{1561184}{7356366}$ $=27\frac{263\frac{3435}{5923}}{1242}$日。其中 27 为交复日，1242 为朔日法，263 为余，3435 为秒，5923 为交数，7356366 为交法。从此可知，所谓交法是把交点月的每一日划分成的日分数。满此数就是 1 日，这是称之为"法"的原因。而交数则是把朔日法变为交法之数。此外，交数＝复月＋交率。可以这样理解：月在每个朔望月出入黄道各 1 次，入者为交，是月行 1 周天 1 交。而在复月之内有 5923 交。多出的 465 交为交率，是在复月期间的日行周天数。

交日，13；余，752；秒，4679。一个交点月是 27 日余，半个交点月就是 $13\frac{752\frac{4679}{5923}}{1242}$日。仿照复月和交月的命名法，27 日既命名为交复日，13 就是交日。752 为余，4679 为秒，是应有之义。

交限日，12；余，555；秒，473.5。张胄玄大业历计算月食设四差：外限、内限、中限、次限。其中外限等于单数减望差。皇极历交限与此相仿佛：

$$\frac{\text{交点月}}{2}-\frac{\text{朔望月}-\text{交点月}}{2}=13\frac{4458775}{7356366}-1\frac{1171036.5}{7356366}$$

$$=12\frac{3287738.5}{7356366}=12\frac{555\frac{473.5}{5923}}{1242}\text{日}$$

其中 12 为交限日，555 为余，473.5 为秒。把此数化成假分，分子就是大业历中的外限。

望差日，1；余，197；秒，4205.5。半个朔望月与半个交点月的差，就是上面说的$\frac{\text{朔望月}-\text{交点月}}{2}=1\frac{1171036.5}{7356366}$日，把它的分母化为朔日

法：$1\frac{197\frac{4205.5}{5923}}{1242}$。其中 1 为望差日，197 为余，4205.5 为秒。大业历中也有望差，也是等于半个朔望月与半个交点月的差。区别只在于大业历是把皇极历的望差日、余、秒化为假分的分子作为望差的。

朔差日，2；余，395；秒，2488。大业历也有这个参数，物理意义是朔望月与交点月与交点月之差：$29\frac{659}{1242}-27\frac{263\frac{3435}{5923}}{1242}=2\frac{395\frac{2488}{5923}}{1242}$日。

会限，158；余，676；秒，505。见下文。

会日，173；余，384；秒，283。皇极历认为：月入黄道为交，日与月交为会。前面说在交会周期 5458 月内，月交黄道数多 465 交（465 叫做交率），每多 1 交须经$\frac{5458}{465}$月$=11\frac{343}{465}$月。而每会的周期只有它的一半，即为 $11\frac{343}{465}\div2=5\frac{404}{465}$月/会。把此数化为日：

$$5\frac{404}{465}\times29\frac{659}{1242}=\frac{100091533}{577530}$$

分母 577530 叫做会法，继续化简：

$$=173\frac{178843}{577530}=173\frac{384\frac{283}{465}}{1242}\text{日/会}$$

其中 173 为会日，384 为余，283 为秒。

交有交限，会也有会限。前面说，交限$=\frac{\text{朔望月}}{2}-\frac{\text{朔望月}-\text{交点月}}{2}$ $=\text{交点月}-\frac{\text{朔望月}}{2}$。与此相仿，1 个会日减半个朔望月叫做会限，即：

$$173\frac{384\frac{283}{465}}{1242}-14\frac{950.5}{1242}=158\frac{676\frac{50.5}{465}}{1242}\text{日}$$

其中 158 为会限，676 为余，50.5 为秒。

（2）推月行入交表里术。

就是推算所求年正月朔日入于某交会周期中的位置。算法是从所

求年的入元积月中除去交会周期复月数，直到剩余不足 1 个复月数，即：入元积月 $-m\cdot$ 复月，m 为待定自然数，使满足如下条件：$0\leqslant$ 入元积月 $-m\cdot$ 复月 $<$ 复月。

由剩余的不足 1 个复月的月数，计算它包含多少交。因每交月数为 $\frac{复月}{交率}$，将（入元积月 $-m\cdot$ 复月）除以此数即得。除以 $\frac{复月}{交率}$，等于乘交率、除复月，得 1 为 1 交会（复），得 2 为 2 交会（复）……直到剩余不足 1 交会（复）的数目为所求朔入于该复数。由于只求余数，满 1 复则除去之。上述“除”复月。《律历志》变为“除掉”复月，即把实际运算变为：

（入元积月 $-m\cdot$ 复月）$\times$ 交数[①] $-n\cdot$ 复月

同样 n 也是待定自然数，条件是使上式大于或等于 0，小于复月。余数不足 1 复，由于 1 复包括一入一出；入谓之交，余数若大于交月是已入黄道，月在黄道之南，或称为在里；小于交月是尚未入黄道，月在黄道北，又称为在外、在表。

以上计算总括为下式：

$$（入元积月-m\cdot 复月）\times 交数-n\cdot 复月=A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.162)$$

若 $A>$ 交月，则月在里，$A-$ 交月 $=$ 入交里数；若 $A<$ 交月，则月在表，A 为入交表数。

所谓“入交表里数”全称是“所求年天正经朔入交表里数”。

(3)求次月。

从(12.162)式可见，每增加 1 个月，等于 A 值增加 1 个交率数，入交数也增加 1 个交率数，增后的入交数若大于交月，月位由在表变成在里，在里则变成了在表。加后的入交数仍不大于交月，则月位无变化。表示如下：

头月入交数 $+$ 交率 $=B$

若 $B>$ 交月，则 $B-$ 交月 $=$ 次月入交表里数，月位改变；$B<$ 交月，$B=$ 次月入交表里数，月位不变。

(4)月距黄道度的变化。

---

① 《律历志》为“交率”，误。不合历理，且与后面(12.163)算式不符。

表 12.11　月去日道度增损表

入交日	去交衰	衰　积
一日	进 14	衰始
二日(余 198 以下,食限)	进 13	14
三日	进 11.5	27
四日	进 9.5	38.5
五日	进 7	48
六日	进 4	55
七日	进 2　5 分　4 进强 退 1　　　　1 退弱	59
八日	退 2	60　60 又 1 分 1 分当日退
九日	退 5	58
十日	退 8	53
十一日	退 10.5	45
十二日	退 12.5	34.5
十三日(余 555 以上,食限)	退 13.5	22
十四日	退 14 小　3 退强 2 进弱	8.5

表分三栏,各作如下说明:

第一栏为“入交日”。在前面介绍主要参数时已经说到 1 个交点月(交复日)为 27 日余,月亮出入黄道各一次,每交日数为 13 日余,称为交日。表中入交日数自一至十四而止,是 1 交之内的日序数。其中二、十三两日下各有小字注,是点出食限的位置。如二日下注“余 198 以下,食限”,是指望差数 $1\frac{197\frac{4205.5}{5923}}{1242}$ 日,在大业历中说过,望差是不偏食限,小于此数才能发生月偏食。所以说,在入二日的 198 分以下(准确数是 $197\frac{4205.5}{5923}$ 分)为食限。十三日小注是指入十三日 555 分以上(准确数是 $555\frac{473.5}{5923}$ 分)是交限点,前面说交限就是大业历中的外限,也是与望差有关的食限。

第二栏“去交衰”，所列数值为月距日道的赤纬数。单位是分，1 秒=10 分。每数前有“进”或“退”字，赤纬数为正值者为进，负者为退。进退大小与月速有关，前云，月速变化有四个转折点：七日由加入减(8 加 1 减)，十四日由减入加(7 减 2 加)等。这在“去交衰”栏中也有反映：七日是由进入退，十四日是由退入进。进退比例同样由四段法判定：每个交复日 $27\dfrac{263\frac{3435}{5923}}{1242}$ 日，四分之得 $6\dfrac{997\frac{2339.5}{5923}}{1242}\approx 6\dfrac{4^{+}}{5}$ 日，二分之得 $13\dfrac{752\frac{4619}{5923}}{1242}\approx 13\dfrac{3^{+}}{5}$ 日等。因此，表中七日下说“4 进强，1 退弱”，而十四日下说“3 退强，2 进弱”。4、1，3、2 是比例数：分 1 日为 5 等分，有 4 分多进，不到 1 分退，叫做“4 进强，1 退弱”；同样有 3 分多退，不足 2 分进，叫做“3 退强，2 进弱”。至于进退之数，更当别论：七日下注说“进 2 退 1”，进与退相抵后尚余 1，此栏经数是“进 1”。因此，“衰积”栏由 59 增至 60。十四日栏下大字“退 14 小”也是进退之数，与进退比例数不同。

七日栏下又有大字“5 分”殊不易解，上有“进 2 退 1”讲进退数；下有“4 进强，1 退弱”讲进退比例。当讲的已经说尽，“5 分”二字实为衍文，无意义可言。若定要追究它的来历，大约因误致衍，此栏去交衰数当是“进 1”。大字既云“进 2 退 1”，退是进半。进为 1，退者必是 5 分，实进也是 5 分(十进制)。

第三栏“衰积”，是入交以来到该日之前去交衰的累积数。别无可言，只八日下有小注“60 又 1 分，1 分当日退”。意思是七日进 2 分，此应为 61。但七日当日又退 1 分，所以此栏数字虽是 61，当日退 1 分，只余 60。

(5)推月入交日术。

前面所求入交表里数是所入复月中的月分数，这里要把它换算为日，乘以每个朔望月日数($\dfrac{\text{朔实}}{\text{朔日法}}$)即得。说“入交表里数”是所入复月的“月分数”，是由于它是在计算过程中把月数乘以交数〔参见(12.162)式〕得到的。要把它变为月数，必须除以交数，而后才能与朔望月日数相

乘，如此，得入交日计算法为：

$$\frac{\text{表里数}}{\text{交数}}\times\frac{\text{朔实}}{\text{朔日法}}=\frac{\text{表里数}\times\text{朔实}}{\text{交法}}=\text{入交日}\frac{\text{余}\frac{\text{秒}}{\text{交数}}}{\text{朔日法}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12.163)$$

其中“表里数×朔实”，《律历志》名为交实。“入交日”名为所求年“经朔，月平入交日”数，而“入交日”算外，是所求年“经朔月平入交日”的日名，《律历志》说是所求年“经朔月平入交日余”，“余”字衍。入交日余就是(12.163)式中的“余$\frac{\text{秒}}{\text{交数}}$”不在“算外”。

(6)求望。

即求所求年天正月望的入交日及余。把(12.163)式所得加上半个朔望月日数，满交日除去之即得。即：

$$(12.163)\text{式所得}+\frac{\text{朔望月}}{2}-n\cdot\text{交日}=\text{望入交数}$$

照例 n 为自然数或 0，且满足不等式：$0\leqslant$望入交数<交日。由$\frac{\text{朔望月}}{2}>$交日，上式可作如下简化：

$$(12.163)\text{式所得}+\left(\frac{\text{朔望月}}{2}-\text{交日}\right)-(n-1)\text{交日}=\text{望入交数}$$

其中$\frac{\text{朔望月}}{2}-$交日＝望差，命 $n-1=m$，上式可写为：

$$(12.163)\text{式所得}+\text{望差}-m\cdot\text{交日}=\text{望入交日} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.164)$$

此即《律历志》所给算式，其中 $m=1$ 或 0。

下边解释表里判定法：由本节 1(2)知表里数满交月则表里易位。在(12.163)式中把表里数除以交数，乘朔实，除朔日化成了入交日。那么，交月经过同样的处理，即除以交数、乘朔实、除朔日法，应该是判定入交日表里易位的标准数，由下面的计算知，此数就是交日数：

$$\frac{\text{交月}}{\text{交数}}\times\frac{\text{朔策}}{\text{朔日法}}=\frac{2729}{5923}\times\frac{36677}{1242}=13\,\frac{752\,\frac{4679}{5923}}{1242}$$

如此知入交日满交日数则表里易位。在(12.164)式中由“(12.163)式所得”加“望差”，就是超过了 1 个交日数，表里换了一次位，所得“望入交日”若又大于交日数，表里再次易位，二次易位等于不易位，即朔日所入

在表(或里),望仍在表(或里)。若(12.164)所得望入交日数不大于交日数,只易一次位,朔在表(或里),望应在里(或表)。就是《律历志》说的满交日"则月在表里与朔同;不满者与朔返"。

倘若望时月食,且是先交(望日处在前交点附近),入交日必在食限(望差)$1\frac{197\frac{4205.5}{5923}}{1242}$日之内(小于此数),不大于交日数,望与当月朔表里同。若是后交(望在后交点附近),入交必在食限(交限)$12\frac{555\frac{4735}{5923}}{1242}$日之外(大于此数而小于交日),自然仍与当月朔表里相同。不仅如此,由于自望到下月朔入交日又增一个望差,$12\frac{555\frac{473.5}{5923}}{1242}+1\frac{197\frac{4205.5}{5923}}{1242}$

$=13\frac{752\frac{4679}{5923}}{1242}$=交日望时入交日大于交限,下月朔入交日必大于交日,望与下月朔表里也相同,就是《律历志》说的"先交与当月朔,后交(且)与(下)[①] 月朔表里同"。

(7)求次月。

即求次月朔的入交日。可以按本节1(6)的思路,由望日入交日加望差得次月朔入交。所得大于交日则减之,表里与望同;小于交日,表里与望返。也可直接由朔日入交加上1个朔望月的日数得次月朔入交日。由于1个朔望月日数等于2倍交日加朔差,加朔望月数与加朔差等效。《律历志》用后法,算式为:

朔日入交+朔差=次朔入交 ………………………………………… (12.165)

得数满交日表里与前月朔相反,不满则与前月朔同。

(8)求经朔望入交常日。

皇极历的朔望月有三种,一是只计平均日数的经朔望;二是计入日行迟速数的"应平会日所入迟速定日";三是计入日、月行迟速,朓朒数

① 括号内文字为释者所增。

的“定朔望”。本节1(2)～(7)算出的是经朔望的入交日，称为经朔望月行的“平入交日”。后面计算定日的入交日称为“定朔望入交定日”，此处是计算“应平会日所入迟速定日”的入交日。由于“迟速定日”不是定朔望，且日行迟速数与月行朓朒数相比，数量较小，计入日行迟速数的“迟速定日”仍算是经朔望，它的入交日称为“经朔望入交常日”。算法是在经朔望平入交日中加减日行不均产生的迟速定数(迟减速加)即得：

$$\text{经朔望平入交日及余} \pm \text{月入气朔平会日迟速定数} = \text{经朔望入交常日及余。} \quad \cdots\cdots (12.166)$$

有加减就有是否满交日的问题，满交日则表里易位与前同。《律历志》言未及此，是省文。

(9)求定朔望入交定日。

似乎在(12.166)式的计算结果中再加入月行不均产生的增量定朓朒即得。《律历志》没有这样做，而是相加之前对定朓朒进行“预处理”，然后计入“入交常日”：

$$\text{入交常日及余} \pm \frac{\text{定朓朒} \times \text{交率}}{\text{交数}} = \text{定朔望所入定日及余} \quad \cdots\cdots (12.167)$$

为什么要做这样的“预处理”？基本理由首先由于入交常日及余的单位是日，定朓朒是月行度，单位制不同。那么，把定朓朒化为日，通常的方法是除以月每日行度数($\frac{\text{月率}+\text{岁率}}{\text{岁率}}$)，(12.167)式为何不这样做？是由于月亮的每日行度$\frac{\text{月率}+\text{岁率}}{\text{岁率}}$是个平均值，求定朔入交定日不能再用这样的数字。那么，把定朓朒乘交率、除交数就能把月行度化作入交日的理由是什么？可以这样考虑：前面说过，交数(5923)是在复月时间内月亮行过的天周数，而交率(465)是在相同时间内的日行天周数。因而，月速：日速＝交数：交率。今知月行定朓朒度，相当于日度几？或者说相当于几日？设所求为X，得如下比例式：

$$X = \frac{\text{定朓朒} \times 465}{5923} = \frac{\text{定朓朒} \times \text{交率}}{\text{交数}}$$

入交常日与此数相加才能得到定朔所入定日及余。这样得到了(12.167)式。

对于(12.167)式的计算结果，《律历志》又说“其去交如望差以下，

交限以上者月食，月在里者日食”。去交在两限之内月食，不需再释。“月在里者日食”是指月在黄道以里，同时又满足二限的条件（小于望差，大于交限）会有日食。道理是月在黄道以里，日月在地的同一旁，日远月近，入交后满足二限条件就会出现月掩日的现象，就是日食。

2. 推入会术

月入黄道为交，日与月交为会。

（1）推日入会日术。

可以完全仿照推月入交的方法进行。区别在于凡用月行周数（交数）者仅用日行周数（交率）。如第一步先推“入会表里”：“置入元积月，复月去之。不尽，交率乘而复去，不如复月者，满交月去之，为在里数；不满为在表数，即所求年天正经朔日入会表里数。”与求月入交表里的文字相同，区别在于月在里则日在表，原因是日在表里是指日在白道表里。

第二步再推日入会日：“以朔实乘表里数为交实，满会法为日，不满者交率而一为余，不成为秒，命日算外，即经朔日平入会日及余。”第二句写为算式是：

$$\frac{\text{朔实}\times\text{表里数}}{\text{会法}}=\text{日入平会日}\frac{\text{余}\frac{\text{秒}}{\text{交率}}}{\text{朔日法}}\cdots\cdots(12.168)$$

此式左端分子名为交实，代入式中：

$$\frac{\text{交实}}{\text{会法}}=\text{经朔日入平会日}\frac{\text{余}\frac{\text{秒}}{\text{交率}}}{\text{朔日法}}\cdots\cdots(12.169)$$

（2）求望。

即求望时日入会日及余。仿入交算法，在经朔日入平会日及余中加半朔得望加全朔得次月朔，加后满会日则除去之。即：

$$\text{经朔日入平会日及余}+\text{半朔}-m\cdot\text{会日}=\text{望时日入平会日及余}\cdots\cdots(12.170)$$

$$\text{经朔日入平会日及余}+\text{朔}-m\cdot\text{会日}=\text{次月朔，日入平会日及余}\cdots\cdots(12.171)$$

其中减会日一项此处无具文。具文在本节 2(3)，是综(1)～(3)而

言之。式中 m 为待定数 0 或 1，选定条件是使该式左边得数大于或等于 0，小于会日。

《律历志》又说，其表里皆准入交。已如前述〔见本节 2(1)〕。

(3)求入会常日。

只计入日行增量。公式为：

$$入平会日余 \pm \frac{月入会朔望平会日迟速定数 \times 交数}{交率} - m \cdot 会日$$

$$= 所入常日余 \cdots\cdots \quad (12.172)$$

$$所入常日余 \pm 定朓朒\ m \cdot 会日 = 日定朔望所入会日及余 \cdots\cdots \quad (12.173)$$

以上两式中 m 是待定的自然数或零，选定条件是使左端所得大于或等于 0，小于会日。加减号确定法是(12.172)式中由迟速定数确定，速加迟减；(12.173)式中由定朓朒确定，朓减朒加。

(12.172)式中"入平会日余"就是(12.169)式算出的"经朔日入平会日余"。第二项中的"月入气朔望平会日迟速定数"，是由于日行不均产生的修正值，把它乘交数，除交率，是变为相应的入交月行度数。就像前(12.166)式求入交常日那样，直接加日行修正值不好吗？为什么把它变为入交月行度然后再加？这是由于求入会日是求日距日月交会点的日数。日行迟，月行速，日增减 1 度，相当于日月间的角距离增减$\frac{交数}{交率}$度，日要走完$\frac{交数}{交率}$度才能交会，即是说日每增减 1 度，日入会日增减$\frac{交数}{交率}$日，亦可以说日入会日的增量等于月度增量值。所以(12.172)式中要把日行增量化为入交月度，而(12.173)式中却直接把月行度(定朓朒)增入常日余的原因。把这一层弄清楚，(12.172)、(12.173)式无须再释。

《律历志》接着说："其朔望去会，如望日以下，会限以上者，亦月食，月在日道里则日食。""朔望去会"就是朔望时日的入会日及余数，此数在望日以下，会限以上，表示日距交会点的角距离小于 $14\frac{950.5}{1242}$度，在月偏食限内，所以发生月食。在食限内，又加上月在日道里，发生日食理由与本节 1(9)论交食同。

3. 推入交定日夜半

(1)求定朔望入交定日夜半。

《律历志》公式为：

$$\text{定朔望所入定日余}-\frac{\text{定余}\times\text{交率}}{\text{交数}}=\text{夜半定入} \cdots\cdots (12.174)$$

从中可以看出定朔望所入定日余与定朔望定余是不同的。这是由于求入交数时要从中减去每交日数，它不是整数，所以，入交定日不等于定日，入交定余也不等于定余。

左边第二项定余乘交率除交数的原因与前相同，是为了化月度为入交日度。不另释。

(2)求次日。

$$\text{定朔所入定日及余}+1\text{日}\pm\text{该日迟速数}=\text{次日所入定日及余} \cdots\cdots (12.175)$$

“该日迟速数”是次日由于日行不均产生的修正值，二分前用加号，二分后用减号，参见一节3(1)“日行迟速表”。

(3)求次月。

仿本节3(2)求次日的方法，在头月定朔所入定日及余之中加上该月日数及日行修正数，即可。由于加该月日数后的入交日若大于交复日及余，须从中减去之。该月若是大月为30日，小月为29日，无论大小月都大于交复日。与其加后再减，不如减后再加。从30日中减去交复日及余 $27\frac{263\frac{3435}{5923}}{1242}$ 日，得 $2\frac{978\frac{2488}{5923}}{1242}$ 日。小月减交复日及余所得少1日。因此有：

$$\text{头月定朔所入定日及余}+\begin{cases}(\text{大月})2\dfrac{978\frac{2488}{5923}}{1242}\\[2ex](\text{小月})1\dfrac{978\frac{2488}{5923}}{1242}\end{cases}\pm\text{该月迟速数}$$

$$=\text{次月定朔所入定日及余} \cdots\cdots (12.176)$$

加减号的确定法与(12.175)式同，次月定朔若在二分前用加号，二分后用减号。

这里有一个问题，求定朔入交为何只由经月加日行迟速数，不加月行朓朒数？由一节6(2)中的定朔修正值图，从经朔到定朔等于1个朔望月加日行修正值（迟速数）与月行修正值（朓朒数）。(12.176)式计算的是从定朔到下月定朔，与以上不同。从事实上朔到定朔的算法有何根据？是由(12.175)式推出。第二式由定朔求次日，算法是定朔加1日，再加1日的修正值迟速数，与月行朓朒数无关。求第二日，再加1日及其修正值……一直进行下去，29日或30日后分别得大月、小月后的定朔入交数。每日都与朓朒数无关，30日或29日后的定朔自然也与朓朒数无关。

《律历志》此后有一段文字，大意是说定朔入交日若是七日，前$\dfrac{977\dfrac{2339.5}{5923}}{1242}$日为进，后$1-\dfrac{997\dfrac{2339.5}{5923}}{1242}=\dfrac{244\dfrac{3583.5}{5923}}{1242}$日为退；入交若是在十四日，前$\dfrac{752\dfrac{4629}{5923}}{1242}$日为退，后$1-\dfrac{752\dfrac{4679}{5923}}{1242}=\dfrac{469\dfrac{1242}{5923}}{1242}$日为进。若分1日（1242分）为5等份，七日中的4等份进，1等份退；十四日3等份退，2等份进。这些在二节1(4)“月去日道度增损表”中已经讲过。问题在于这里所说进退是月距日道的赤纬数，而(12.176)式所求入交数，等于朔到交点的赤经数，不是一码事，应该移到本节4(1)之后。

4. 推食与不食

(1)求月入交去日道。

按照《律历志》的叙述，整理如下计算式：

$$\text{交余}\rightarrow\text{秒积} \qquad (12.177)$$

$$\frac{\text{后衰}+\text{去交衰}}{2}=\text{通数} \qquad (12.178)$$

对于进的情形（以前所谓“前多者”）：

$$\frac{\text{衰积}+\dfrac{\left(\dfrac{\dfrac{(\text{衰法}-\text{秒积})\times\text{衰}}{\text{交法}}+\text{衰}}{2}+\text{通数}\right)\times\text{秒积}}{\text{交法}}}{10}=\text{度}^{\pm} \qquad (12.179)$$

对于退的情形(以前所谓“前少者”):

$$\frac{衰积-\dfrac{\left(\dfrac{\dfrac{秒积}{2}\times衰}{交法}+通数\right)\times秒积}{交法}}{10}=度^{\pm}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(12.180)$$

(12.179)、(12.180)两式右端“度$^{\pm}$”读为“度强弱”,整数为度,有余为强,不足为弱。

下边考察它们的法理:所求为交日及日余距日道度数,入交日的去日道度数可以直接由前面列出的表 12.11“月去日道度增损表”查得,日余不足 1 日,由皇极历以前表现出的水平,必用二阶插入法计算,算式也应该有相似的形式。以此为出发点,与一节 6(2)推朔法望定日术中的公式比较,对(12.179)、(12.180)式可作下面解释及补充。

对于(12.179)式:

“衰法”:无此参数,“衰”为“交”字误文。

“衰”:在(12.178)式中有“去交衰”和“后衰”,此处又有“衰”,就(12.179)式中表达的意义论,它就是一节 6(2)中的限衰。如图 12.25,AD 为去交衰,BC 为后衰,EF 为通数,AM 为秒积(交余),$AE=EB=$ 1 日$=$交法。DH 为衰,就是上文说的限衰〔对于“退”的情形,FH 为衰(限衰)〕。如此,(12.179)式中的“交(衰)法$-$秒积”$=AF-HG=GF$,$\dfrac{GF\times衰}{交法}=\dfrac{GF\times DH}{HF}=NG$ $\left(\dfrac{NG+衰}{2}+通数\right)\times$ 秒 积 $=\left(\dfrac{NG+DH}{2}+EF\right)\times AM=$四边形 $HGND$ 面积$+$四边形 $AMGH$ 面积$=$四边形 $AMND$ 面积,增减衰积不必论。

实际计算时要注意单位,交法单位是秒,秒积的单位也是秒。衰和通数都是由月去日道度增损表查得,它的数量单位是分,除 10 以后才能化为秒,否则不能投入运算。每项除 10,暂且不除,除以交法以后再总除,是一样的。除以交法是为了把以上算得的秒积数化为日或度。因此,(12.179)式右端得数为度,不足 1 度者用强、弱表示之。

对于(12.180)式:

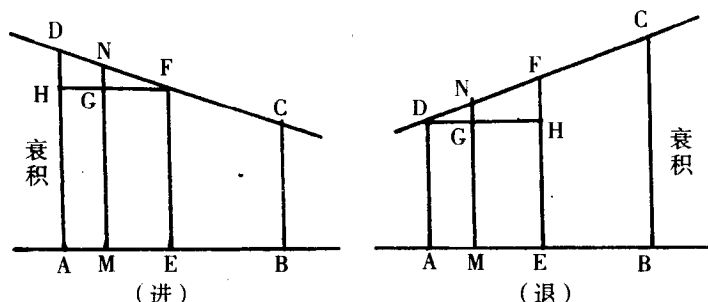



图 12.25 入交去日道度推法图

$$\frac{\frac{\text{秒积}}{2}\times\text{衰}}{\text{交法}}=\frac{\text{秒积}\times\text{衰}}{2\,\text{交法}}=\frac{DG\times FH}{2\cdot DH}=\frac{NG}{2}$$

在一节 6(2)中，“校勘记”于此处补入“减限衰”三字，前文说道，“减”应改为“去”字。此处也应有相应的改动，可补入“去衰”二字。接下来：

$$\left(\frac{NG}{2}-\text{衰}+\text{通数}\right)\times\text{秒积}=\left(\frac{NG}{2}-FH+EF\right)\times AM$$

$$=\left(\frac{NG}{2}+AD\right)\times AM=\text{四边形 }AMND\text{ 面积}$$

然后，除 10，把上式单位化为秒积；再除交法，化为度，这就是(12.180)式。

根据以上解释，把(12.179)、(12.180)两式改正为：

$$\text{“进”者：}\frac{\text{衰积}+\dfrac{\left(\dfrac{\dfrac{(\text{交法}-\text{秒积})\times\text{衰}}{\text{交法}}+\text{衰}}{2}+\text{通数}\right)\times\text{秒积}}{\text{交法}}}{10}=\text{度}^{\pm}$$

$$\cdots\cdots(12.181)$$

$$\text{“退”者：}\frac{\text{衰积}-\dfrac{\left(\dfrac{\dfrac{\text{秒积}}{2}\times\text{衰}}{\text{交法}}-\text{衰}+\text{通数}\right)\times\text{秒积}}{\text{交法}}}{10}=\text{度}^{\pm}\quad\cdots\cdots(12.182)$$

进退的界限，就是二节3(3)中说过的一段属于错简的文字应移到这一节"进退衰积"之下，所得"度$^{\pm}$"就是所求的月入交去日道度数。

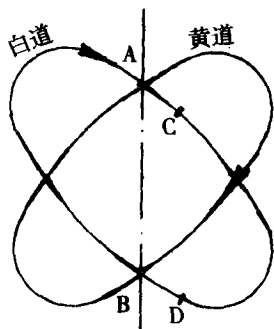
《律历志》于此之下还有几句话："月朔望入交，如(交)[1]限以上，减交日，残为去后交数；如望差以下，即为去先交数。"如图12.26，黄、白道交于A、B两点，A为先交点，B为后交点。$\overparen{ABCD}$=交日，$\overparen{ACD}$为交限，$\overparen{AC}$=望差。显然，如入交>交限，即入交>$\overparen{AD}$，入交点在交日－交限=$\overparen{ACDB}-\overparen{ACD}=\overparen{BD}$之间，近于后交点$B$；若入交<望差，即入交<$\overparen{AC}$，入交点近于先交点。又：

$$\frac{\text{去交日及余}}{\text{朔辰}}=\text{去交辰}\frac{\text{辰余}}{\text{朔辰}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12.183)$$

图12.26 先交、后交图

去交日及余全都化为去交辰，就是《律历志》说的"全日同为余"的情形，适用于去交日数很少，只用去交辰更方便的时候。

"其月在日道里，日应食而有不食者；月在日道表不应食而亦有食者。"

前一句是针对"求定朔望入交定日"中所说"月在里者日食"而言。释文中已经说过，此句当与上句连读，除了月在日道里，还要满足去交日及余在望差以下或交限以上，即去交在二食限以内。同时满足这二个条件，才有日食。后一句也是对该段文字中所说的"其去交如望差以下、交限以上者月食"而言。无论日食或月食，都有当食不食的情况发生。

(2)推应食不食术。

此处论述应当发生日食而不食的情形，见表12.12：

---

① 括号内文字为笔者所加。

表 12.12 当食不食表

朔先后在	合朔点所加辰	不日食的去交数
夏至 10 日以内		12 辰少
夏至 20 日以内		12 辰半
夏至 1 月以内		12 辰大
闰四月内	加南 3 辰(巳午未)	13 辰以上
六月内	加南 3 辰(巳午未)	13 辰以上
夏至 20 日内	自辰半一申半南 4 辰	13 辰
闰四月内	南 4 辰	13 辰半以上
六月内	南 4 辰	13 辰半以上
谷雨—处暑之间	加南 3 辰	13 辰半以上
清明—白露之间	加巳半以西—未半以东 2 辰	13 辰半以上
春分前	加午 1 辰	13 辰半以上

由于望差$=1\dfrac{197\dfrac{4205.5}{5923}}{1242}$日$\doteq$13.91 辰，从以上所列各种情况下的入交数知，全都小于望差，若月在日道南，日食的两个条件都具备了，因此属于“应食”的范畴，但都没有发生日食。从表列条件看，可能由于以下原因：第一是入交点在夏至前，时当盛夏，日在极北，距人最近，接近直射，日光最强。由于日大月小，日远月近，月不能掩蔽日光。第二入交点虽不在盛夏，加辰在午时前后，由于日光太强，月亦不能掩蔽日光。第三，在地面上能够看到日食的区域本来很小，在皇极历时期，人们还没有计入观测地域对观测结果的影响。所列当食不食的情形之中，不排斥有一部分是受了观测地域选择不当的影响。

(3)推不应食而食术。

指日不应食而食者。

表 12.13 不应食而食表

朔先后在	朔加辰	去交数
夏至前后 1 月内	加 2 辰	2 辰
夏至前后 46 日内	加 2 辰	1.5 辰
夏至前后 1 月内	加 3～4 辰	1.5 辰

续表

朔先后在	朔加辰	去交数
夏至前后46日内	加3辰	1.5辰
谷雨—处暑	巳少—未太之间	0.5辰之下
清明—白露	加2辰	0.5辰之下
春分—秋分	加1辰	0.5辰之下

按日食的两个条件：一是入交点在食限界内（小于望差或大于交限），二是月在日道里。从表列数据入交都在食限界内，所谓“不应食”是指不符合第二个条件，即入交时月不在日道里。不在日道里如何能掩蔽日光而日食？从表列的几种情形最显著特征是去交数极小，不超过2辰，在这样近的角距离内，表里的变化有可能顷刻发生，由此出现不应食而食的情形。

5. 推食分、食辰及方位

(1)推月食多少。

就是推算月食的食分。将原文和算式对照如下：

原文：“望在分后，以去夏至气数三之。”

对于望在二分之后的情形（以下用“后”表示），算式为：3×望去夏至气数。

原文：“其分前，又以去分气数倍而加分后者。”

对于望在二分之前的情形（以下用“前”表示），算式为：2×望去分气数+3×望去夏至气数。

原文：“皆又以十加去交辰，倍而并之，减其去交余，为不食定余。”

后：3×望去夏至气数+2×(10+去交辰)；

前：2×望去分气数+3×望去夏至气数+2×(10+去交辰)。

后：去交余－〔3×望去夏至气数+2×(10+去交辰)〕=不食定余；

前：去交余－〔2×望去分数+3×望去夏至气数+2×(10+去交辰)〕=不食定余。

原文：“乃以减望差，残者九十六而一，不满者求其强弱，亦如气辰法，以十五为限，命之，即各月食多少。”

后及前：$\frac{\text{望差}-\text{不食定余}}{96}=\text{月食分}^{\pm}$

“月食分”整数之外有余分者，舍弃为强，进为整分为弱，分别记为“月食分$^{+}$”及“月食分$^{-}$”。所谓“以十五为限”，是说“月食分”最大不超过15分。

可以按以上记述，把望在分前、分后月食分的计算式各写一个综合式：

$$后:\frac{望差-\{去交余-[3\times望去夏至气数+2\times(10+去交辰)]\}}{96}=月食分^{\pm}\quad\cdots\cdots(12.184)$$

$$前:\frac{望差-\{去交余-[3\times望去夏至气数+2\times望去分气数+2\times(10+去交辰)]\}}{96}=月食分^{\pm}\quad\cdots\cdots(12.185)$$

由于望差：$1\frac{197\frac{4205.5}{5923}}{1242}=\frac{1439.71}{1242}=\frac{1440}{1242}$日，分1日为1242分，则望差等于1440分。再把望差均分为15份，每份为：$\frac{1440}{15}=96$分。(12.184)、(12.185)两式的分子都是以望差减某数，必不大于望差。再以96除，所得就不会大于15分，这就是原文所说“以十五为限”的根据。

前边曾说，皇极历以望差为食限，去交余大于望差则不食。去交余愈小，月距交点愈近，所食愈多，因此以上求食分公式的主体是$\frac{望差-去交余}{96}$，其余部分：

$$后:\frac{3\times望去夏至气数+2\times(10+去交辰)}{96}$$

$$前:\frac{3\times望去夏至气数+2\times望去分气数+2\times(10+去交辰)}{96}$$

是月食受节气及发生时辰影响的调整数。该调整数由三个元素组成：去夏至气数(0～12)、去分气数(名义上也可选择0～12之间的数字，但是由于第一元素已规定自夏至起算，望去分气数只能选择0～6之间数字)，去交辰(由于去交余≤望差，去交辰的范围为0～13.9)。这样不难估计调整数的大小。当望去夏至气数为0，去分气数为6，去交辰为0，调整数最小只有20分；当去夏至气数为12(望在冬至)，去分气数为6，调整数最大可达68+2×去交辰。由此可以推知，月食在夏至前后，入交余相同的情况下，食分最大；冬至前后，食分最小。

节气对食分的影响是由于不同节气时，日地距离不等造成的，如图

12.27，CD 是地，EF 为月面。当日在较远距离时，比如 AB，留在月面上的地影直径为 EF；当日地距离缩小时，如在 $A'B'$，在月面上留下的地影直径为 GH。由此可知，日地距离越远，食分越大。夏至时，日在近地

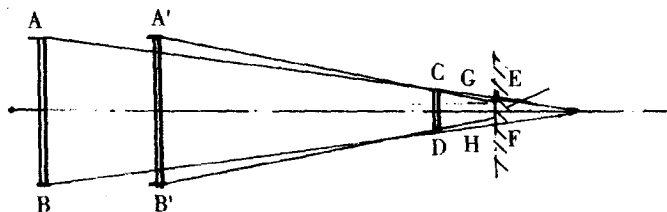



图 12.27 节气影响食分示意图

点，食分最小；冬至时，日在远地点，食分最大，这与皇极历对食分的调整结果恰相反。陈美东先生最早注意到这个问题[①]，他说："刘焯已经虑及了太阳所处位置不同对月食食分大小的影响，可惜，他未能予以正确的描述。"但是隋大业历和唐麟德历亦如此，唐一行大衍历则略去日地远近的影响，又是何故？历法是建立在实测基础之上的，到唐时，中国的历法观测已相当精密，照理不应有这样相反的结论。可能的解释是节气的影响只是各种因素之一，而且由于日地极远，日极大，太阳光线大致可视为平行线；黄道椭圆长短轴相差不大（与轴径相比），节气的影响像图 12.27 那样的结果极不明显。相反，由于季节不同，大气密度化所引起的视差，以及其他因素的影响可能更为显著些。一句话，皇极历的推算可能是符合天文实际的。后面将要述及，刘焯对"节气影响食分示意图"中的道理是明白的，而他考虑的是多种因素的综合影响，不应该因与某种因素不合就责备他。

(2)推日食多少术。

对于一般日食（月在日道内者），算式为：

$$\frac{\text{望差}-\text{定不食余}}{96}=\text{食分}^{\pm} \qquad (12.186)$$

定不食余有许多修正数，列如表 12.14：

---

① 见陈美东《中国古代的月食食限及食分计算法》，《自然科学史研究》第 10 卷第 4 期。

表 12.14　定不食余的修正表

序号	朔位	加辰	定不食余
		(一)加南诸辰	
1	朔在夏至前后 2 气	加 2 辰	去交余＋1 辰太
		加 3 辰	去交余＋1 辰少
		加 4 辰	去交余＋太(辰)
2	朔在夏至前后 3 气内	加 2 辰	去交余＋2 辰
		加 2 辰	去交余＋太(辰)
		加 4 辰	去交余＋少(辰)
3	朔在夏至前后 4 气内	加 2 辰	去交余＋太(辰)
		加 3 辰	去交余＋少(辰)
4	朔在夏至前后 5 气内	加 2 辰	去交余＋少(辰)
		加 3 辰	依平(＝去交余)
5	朔在立夏后、立秋前(6 气内)	加 2 辰	依平(＝去交余)
		加 4 辰	依平(＝去交余)
		(二)加北诸辰	
6	朔去立夏、立秋、清明、白露气数	加辰数	去交余$-\frac{\text{辰数}}{4}$(余辰依平)
7	朔在雨水后、霜降前	加北辰	去交余$-\left(\frac{\text{去分日数}}{2}+\text{二分去二立日数}\right)$
8	朔在冬至前后	加北辰	去交余$-\left(\frac{\text{去霜降、雨水日数}}{3}+\text{霜降、雨水当气所得数}\right)$

从表中看，朔在二十四气中的位置尚不明显，再绘图 12.28，图中数字

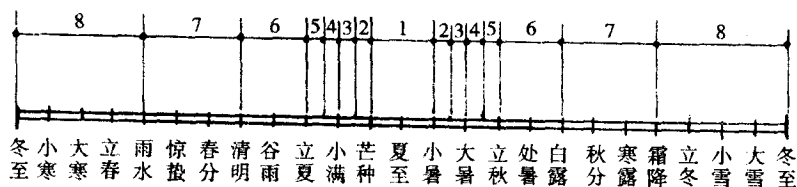



图 12.28 朔在二十四中位置图

与表中第一栏的“序号”数同，数字所在就是该栏所列朔的位置范围。弄明白此部分，就可以由表末所列“定不食余”及算式(12.186)，算出日食分来了。

对于特殊的日食(月在日道外者)，食分计算法分两种情形：一是“日气所系之限，止一而无等次者”，即只有 1 个去交数，没有其他的随日气不同使食分变化的“限”，在麟德历中，叫做“食差”。没有食差存在时，食分只有一个参数决定，就是“去交辰”。用去交辰表示“食数”，需要“加所去辰一”。原因是，食分本为 15 分，若用去交辰表示食分，最大只有 $\frac{望差}{朔辰} \doteq \frac{1440}{103.5} = 14$ 分，用 14 分表示 15 分，就有了“所去辰一”，去交辰加此数，才是“食数”。设去交辰为 A，食分为 X，则有 $14:15 = A:X$，$X = \frac{15A}{14} = A + \frac{A}{14}$。去交辰表达的“食数”为“不食分”，于是有：

$$去交辰 + \frac{去交辰}{14} = 不食分 \quad \cdots\cdots (12.187)$$

二是有食差时，就是除了去交分，还给出多少日或气，食分增减多少的条件，《律历志》说是“限有等次”。这时要在去交分上加食差，所得也是不食分。(12.187)式中的食分用去交辰表示，为了上下一致，这里也用去交辰，写为：

$$去交分 + 食差 = 不食分 \quad \cdots\cdots (12.188)$$

去交分表示为去交辰，连同食差一起(就是把食分)“返其衰”。递减为“衰”，“返”回不食分的递减数，就是返回到食分中来，食分与不食分的关系是：

望差－不食分＝食分 …………………………………………… (12.189)

按这种关系，由不食分"返"回到"食分"中来，《律历志》说是"以少为多，以多为少"。不食分多，则食分少，反之亦然。不论食分或不食分，只要用去交辰表示，"亦加其一"，以此作为食数(或不食数)，都是以15为限。表示为：

$$15-\left[\text{去交辰}+\frac{\text{食差}}{\text{朔辰}}+\left(\frac{\text{去交辰}}{14}+\frac{\text{食差}}{14\text{朔辰}}\right)\right]=\text{食分} \quad (12.190)$$

下边解释法理：用去交辰表示食数，要再加$\frac{\text{去交辰}}{14}$，理由已如前述。再解释为何去交辰就是不食分？

如图12.29：月A在白道OC上，日B在黄道OD上，黄、白道交点为O，日月交点为E、G，月在日道外。日全食时，日月相掩，可以近似认为二者视半径相等。设$\overset{\frown}{ED}$＝食限，即等于日、月视半径之和，自E、G、B分别作$\overset{\frown}{AC}$的平行线，交$\overset{\frown}{CD}$于F、H、K。由于$\overset{\frown}{CD}=2AG$，$\overset{\frown}{FH}=\overset{\frown}{KD}$＝食分。在弧度很小的情况下，

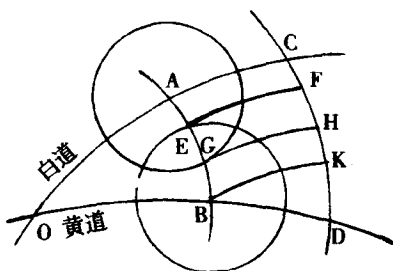



图12.29　月在外道日食图

可以把图中各弧三角当做平面三角形处理。由$\triangle AOB\backsim\triangle COD$，有$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{OD-BD}{OD}$；又由$\triangle BDG\backsim\triangle ODC$，有$\frac{OD-BD}{OD}=\frac{CD-DK}{CD}=\frac{CK}{CD}$。即$\frac{OA}{OC}=\frac{CK}{CD}$。$OA$为月行去交分，$CK$为不食分。当食差＝0时，$OC=CD$，则$OA=CK$，就是去交分＝不食分。式中的"分"，单位制与日分之"分"同。倘若以$\overset{\frown}{CD}$＝15分，去交分改为去交辰，则有(12.187)式。

当食差≠0时，设$OC=CD-\text{公差}$或$CD+\text{公差}$，取前者，代入分式得$OA=\frac{CK}{CD}(CD-\text{公差})=(1-\frac{\text{公差}}{CD})CK=CK-\frac{\text{公差}}{CD}CK$，或者$OA+\frac{\text{公差}}{CD}CK=CK$。命$\frac{\text{公差}}{CD}CK$为食差，此式就是(12.188)式。

在 12.29 图中，日、月分别行到 D、C 位置时，边际相接，在食与不食之间，过此则食，不至此则不食，CD 就等于食限(望差)。可以看出，此后日、月行至 OC、OD 之间的任何位置，都有 $CD=CK+KD$，这就是(12.189)式。

把(12.189)式中的望差化为 15 分，用去交辰表示去交分，就得到了(12.190)式，即(12.190)式是(12.189)式的变形。

《律历志》此下有一段对日月食总认识的论述，文字很多，不逐句解释了。主要内容可归结为四层，第一层自起始“凡日食月行黄道”到“相搏而不掩”，讲日食是日月“体所映蔽”造成的，映蔽程度不同，食之多少也不同，日月正交，形同“累璧”，那是全食。偏离正交愈远，食分渐差。第二层自“因遥而蔽多”到“皆随所而渐异”。论影响日食的三个条件：日道远近，观测者地域不同，日食发生的时间(季节、早晚)。因此，计算结果时常与实际不同。第三层自“然月食以月行虚道”到“虚道即亏”，论月食成因，是由于日光照地，在地背后产生“暗虚”，月行入其中(即所谓“月行虚道”)，就发生月食。第四层自“既月兆日光”到段末。通过两件事论述“天光神妙”，一是日照月，隔地则生月食；而月照日，正午时日月分居子午两旁，中间虽然隔着地，不能使日食。同样，夜半时，日月分居子午，中间隔地，月亦不食。二是日月“体同势等”，在完全相同的条件下，月食的食分较大，日食的食分较小。

(3)推日食所在辰术。

“日食必在朔”，从这个意义说，日食所在辰就是合朔时的定余化成的辰刻数。但是，这样算得的日食辰刻很不精确，在一年中的不同季节，一日之中的不同时辰，发生日食的视觉效果是不同的，使得人们感知到的日食辰刻与实际日食辰刻会有些差异，皇极历把这个差异叫做定差。定余加或减定差为所求日食辰。皇极历出一套定差的计算公式：

$$\frac{\text{定余}-2\times\text{日限}}{3\times\text{朔辰}}=\text{象数}\frac{\text{余}}{3\times\text{朔辰}} \cdots\cdots (12.191)$$

其中“象数”是把一日分作艮、巽、坤、乾四个象限的顺序数，例如象数是 2 为巽限，是 3 为坤限等等。此外，若：

$$\text{余}<\frac{3}{2}\text{朔辰，余}=\text{率}$$

$$余>\frac{3}{2}朔辰，余-\frac{3}{2}朔辰=率$$

再由率求差，当月在黄道里时：

$$\frac{\frac{10+去交辰}{3}\times 率}{14}=差 \quad\cdots\cdots (12.192)$$

由差求定差分作三种情形。

第一，当朔在二分(春分、秋分)前后一气之内时：

$$差=定差 \quad\cdots\cdots (12.193)$$

第二，当朔近冬至时：

$$差\pm\left(2\times+去寒露或惊蛰气数+\frac{去交辰}{3}\right)=定差； \quad\cdots\cdots (12.194)$$

式中“±”取舍根据是“艮巽以加，坤乾以减”，即根据(12.191)式算得的象限数决定。

第三，当朔近夏至时：

$$差\mp\left(2\times+去清明或白露气数+\frac{去交辰}{3}\right)=定差 \quad\cdots\cdots (12.195)$$

式中“∓”号的取舍与(12.194)式相反：“艮巽以减，坤乾以加”。

最后由定差求食余：

$$定余\pm定差=食余 \quad\cdots\cdots (12.196)$$

“±”的取舍是：艮坤加，巽乾减。

当月在外道(黄道外)时，定差的计算比较简单：

$$\frac{\frac{去交辰}{3}\times 率}{14}=定差 \quad\cdots\cdots (12.197)$$

由定差求食余与(12.196)式相反：

$$定余\mp定差=食余 \quad\cdots\cdots (12.198)$$

符号取舍的原则是“艮坤以减，巽乾以加”。

由食余求日食所在辰的方法，《律历志》说是“如气求入辰法”，就是按照前述“推气术”中求气所在辰的方法计算，此法表示为(12.16)式，仿此得：

$$\frac{食余+半朔辰}{朔辰}=辰次数\frac{辰余}{朔辰} \quad\cdots\cdots (12.199)$$

所得“辰次数”算外为日食所在辰。若进一步求日食所在刻分，《律

历志》说是“以辰克乘辰余，朔辰而一，得刻及分”。本部分有所谓“克减”、“克乘”语，为以前所无。克减就是减，克乘就是乘，如此，“辰”字后脱“刻分”二字，“辰刻分”可释为每辰刻数及分数，分别“克乘”辰余，除朔辰得日食所在刻及分数，即：

$$\frac{\text{辰余}\times\text{刻数}/\text{辰}}{\text{朔辰}}=\text{辰刻数}\frac{\text{刻余}}{\text{朔辰}} \quad \cdots\cdots (12.200)$$

$$\frac{\text{刻余}\times\text{分数}/\text{刻}}{\text{朔辰}}=\text{刻分数}^{\pm} \quad \cdots\cdots (12.201)$$

“刻分数±”读为“刻分数强或弱”，与现代数学一样，强弱算法用四舍五入法。

每辰刻数及每刻分数按一节 4(3)中规定的单位制：“刻分以百为母”，即每日（十二辰）百刻，每刻百分。

求得的日食辰刻分若与朝夕相近，还要由前“推气术”中的算法算得日食朔日所入气的日及日余数，再由表 12.2“七十二候及夜半漏刻，昏中度分表”求得该日的日出入辰刻数，与日食辰刻比较，判断出日食在日出入前或后的位置，以确定日食见或不见，见之多少，何时为正见（时甚时刻）等。

在本部分给出的十个计算式中，就法理而言(12.191)、(12.192)两式最为关键。(12.191)式是由定余求率，(12.192)式是由去交辰和率求差。至于由差求定差三式只不过是加上节气引起的修正值，多是经验式，连同以后诸式均无太多道理可言。

(12.191)式的思路是，分 1 日为艮、巽、坤、乾四个象限，求得定余所在象限，这是式中把定余除以“3×朔辰”的原因。至于从定余之中减去 2 倍日限，这也是一个修正数。日食时的日余与合朔时的日余理论上应该是相同的，由于视觉误差，其实不同。从经验知道相差约 22 分，恰等于 2 倍日限，因此，除了“日限”代表的数字 11 之外，(12.191)式中虽有“日限”二字，从概念上扯不上任何关系。

由(12.191)式中的“余”，进一步求得“率”，所谓率就是乘数、因子、比率的意思。定余和食余之间有个差数，差数的产生，是一个因素或因数，另一个因数是由去交数引起的，去交数直接与食相关，不会产生差数。但是，若用去交辰表示去交分就有了误差，在“推日食多少术”中曾

经说过，此误差为$\frac{\text{去交辰}}{14}$，此数也应分入四象限之中，每象限3辰，欲求它所在象限数，须除以3，得$\frac{\text{去交辰}/3}{14}$。在(12.192)式中，除以3以前，交辰先加整数10，即$\frac{\frac{10+\text{去交辰}}{3}}{14}$，再与率相乘得差数。与(12.197)相比较知：月在内道加10，在外道则不加。可见，10也是个修正数。

(4)推月食所在辰术。

第一步，先求日不见分：

$$\frac{\text{望入气日不见刻}\times\text{朔日法}}{100}=\text{望入气日不见分} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.202)$$

其中“望入气日不见刻”先由一节4(3)中的“七十二候及夜半漏刻、昏中度分表”中查得夜半漏刻，倍之得夜刻，再增加5刻得日不见刻。已知每日100刻，除朔日法得每刻日分，再乘日不见刻为日不见刻所化日分，叫做入气日见分，是望入气那一日的日不见分数。

第二步，将此数与食余“等”。“等”就是求差，两数相减得差数。不说相减而说“与之等”，是由于预先不知两数谁大谁小，不能确定谁减谁，无法叙述为“某减某”。说“与之等”则不同，它总是用大数减小数。因此，(12.202)式得数“不见分”与食“等”，有两种可能的表达式：

$$\text{当不见分}>\text{食余，不见分}-n\cdot\text{食余}=\text{差} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.203)$$

$$\text{当不见分}<\text{食余，食余}-n\cdot\text{不见分}=\text{差} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.204)$$

第三步，以朔日法减以上差数：

$$\text{朔日法}-\text{差}=\text{残} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.205)$$

代入(12.203)式或(12.204)式，即若不见分>食余，有：

$$\text{朔日法}-\text{不见分}+n\cdot\text{食余}=\text{残} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.206)$$

若不见分<食余，有：

$$\text{朔日法}-\text{食余}+n\cdot\text{不见分}=\text{残} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.207)$$

第四步，是把残与食余“等”，同样有两种情形：

$$\text{一是食余}>\text{残，食余}-m\cdot\text{残}=\text{正见数} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.208)$$

$$\text{一是食余}<\text{残，残}-m\cdot\text{食余}=\text{正见数} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12.209)$$

各自代入(12.206)式和(12.207)式得：

对于不见分>残，食余$-m$(朔日法$-$不见分$+n\cdot$食余)$=$正见数

即，食余$-m\cdot$日见分$-m\cdot n\cdot$食余$=$正见数 ………………（12.210）

及(朔日法$-$不见分$+n\cdot$食余)$-m\cdot$食余$=$正见数

即，日见分$-(m-n)$食余$=$正见数 ……………………………（12.211）

对于不见分<食余，食余$-m$(朔日法$-$食余$+n\cdot$不见分)$=$正见数 ………………………………………………………………（12.212）

及(朔日法$-$食余$+n\cdot$不见分)$-m\cdot$食余$=$正见数…………（12.213）

下面对(12.210)～(12.213)四个等式加以讨论。首先(12.210)式左端<0，正见数为负数，没有意义，应当舍去。(12.211)式是日见分与食余求等，所得正见数在日见分之内，为虽食不见。(12.212)式是食余既大于不见分、又大于残的情形。残必小于朔日法，食余则可能分两种：大于或小于朔日法。

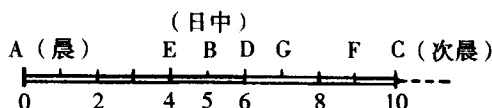



图 12.30 一日分段图

如图12.30，A至C为一日：自晨(A点)到次日晨(C点)，B为一日之中。那么日入点分布在ED之间。由于食余既大于日见分，又大于不见分，食余和残的终点都在D点右侧(以晨A为1日之始)，食余终点更在残的终点之右。当把残与食余“等”时：“以下”，差在食余左边；“以上”，差在食余右方。若食余小于朔日法，在次晨日出前尚有一部分时间能够看到月食。举例如下，设冬至前后某日，不见分为60刻，日见分为40刻，食余设为90刻(小于朔日法)。那么，食余和不见分“等”“以下”，则差为30刻，即：食余$-n\cdot$不见分$=30$(其中$n=1$。若求“等”“以上”，当取$n=2$)。残$=$朔日法$-$食余$+n\cdot$不见分$=70$刻。即“残”的终点为G，食余终点为F。两点“等”“以下”差在F点左边，正见数落在日不见的区间内，为食正见。而《律历志》是求在“等”“以上”，差在F点右方，须取$m=2$，(12.212)式变成了$|90-2\times70|=140-90=50$刻。自食余F点(日不见后50刻)起，月食出现，持续约10刻至次晨C点日出，食虽未尽，因月隐而不见。

倘若食余>朔日法，等"以上"在次日晨之后月食而不见。

(12.213)式是食余大于不见分，小于残的情形。可能值的范围是60～100刻，食在日不见期间，所得是月食正见数。

综上所述，月食正见数计算法实际只有三个算式：食余小于不见分且小于残时，月食不见；大于不见分且大于残时，只有当食余小于朔日法时，月食在次晨前部分可见；大于不见分而小于残，所求为正见数。

已知食余求月食辰的方法与求日食辰相同〔参见(12.198)式〕：

$$\frac{\text{食余}+\text{半朔辰}}{\text{朔辰}}=\text{辰次数}\frac{\text{辰余}}{\text{朔辰}} \cdots\cdots (12.214)$$

《律历志》叙述说"其食余亦朔辰而一，如求加辰所在"，只讲把食余"朔辰而一"，不讲"加半朔辰"，是漏脱。理由有二：其一，从历理看，食余由定余而来，定余自夜半(子初)始，而皇极历的夜半是自子半始，所得有半个时辰的差数，加此差数后算得的结果才合实情。其二，文中后半句说"如加辰所在"，皇极历此前计算"加辰所在"的算法有两处，一是算气加辰，二是算朔弦望加辰，都是日余加半辰再除气辰或朔辰〔参见一节2(2)和一节6(3)〕。这里不应该有异。

由(12.214)式中的辰余计算刻分数的方式与(12.200)、(12.201)两式同，略。

以上月食所在辰是由食余算得，食余是由望时定余加上修正数定差得到，即是说以上月食辰的计算主要由望时的定日余得到，反映的是日的位置，月的位置是在日之"冲"，就是《律历志》说的"月在冲辰食"，更确切的说法应是"食时月在冲辰"。

《律历志》此段末尾说："日月食既有起讫晚早，亦或变常进退皆于正见前后十二刻半候之。"这是对上述计算法误差的估计，可能是由观测经验积累而得，也可从以上算法推出：对于(12.202)式，"朔日法"用的是平均值，每日实际日分数与平均数间的误差可由表12.1"日行迟速表"中查得，若用相邻二气的陟降率为误差，最大为93分，而每月日数不足二气，实际最大误差略小于此数，可以乘上朔望月与太阳月之比加以修正，$93\times\frac{29.53}{30.20}=91$，即朔日法的最大误差是91分(1242分=1日)。望入气日不见刻最大值为冬至夜半漏刻的2倍加5刻，得59.86

刻，因此(12.202)式的最大误差是：$\frac{59.86\times 91}{100}=54.47$ 分。

在(12.203)、(12.204)式中，误差已计入“不见分”，没有增加。

(12.205)式又有朔日法项，误差增加 91 分：$54.47+91=145.47$。即“残”的误差是 145.47 分。

(12.208)、(12.213)各式是将残与食余等，误差不增不减，这样求得“正见数”的误差是 145.47 分。将它化为刻：

$$145.47\times\frac{100\text{ 刻}}{\text{朔日法}}=145.47\times\frac{100}{1242}=11.71\text{ 刻}$$

由于其中又一次用了朔日法，误差增为 145.47 的 $\frac{100}{91}$，最大误差刻数为 $11.71\times\frac{100}{91}=12.87$ 刻。

以上计算过程合为一式：

$$\left(91+\frac{59.86\times 91}{100}\right)\times\frac{100}{1242}\times\frac{100}{91}=12.87\text{ 刻}$$

《律历志》取约数，说是 12.5 刻。

(5)推日月食起讫辰术。

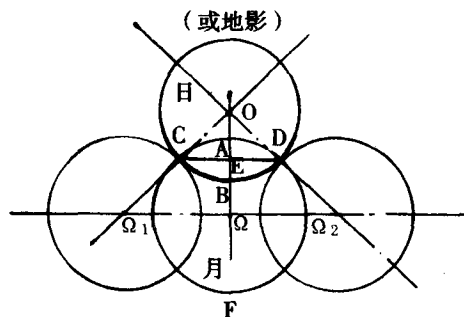



图 12.31 食衰图

《律历志》的基本思路如图 12.31：⊙O 为日或地影锥截面，⊙Ω 为月；月行至 Ω_1 始食，至 Ω_2 食讫，至 Ω 正见，正见时的日分数为食余；若以月径或日径(日、月视直径相等)为 15 分，AB 的分数为食分。显然

$\Omega_1\Omega$（称为"食衰"）的大小与 AB 有关。为了确定两者的比例关系，《律历志》按食分多少划分为六个等次：食分为15、14、13～5、4～3、2、1[①]，各为1等，由一至六命名。各等衰分如下表：

表 12.15　食分等次表

等次	一	二	三									四		五	六
食分	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
衰	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	4	8	6	19

计算公式为：

$$\frac{(300-\text{衰})\times\text{朔日法}}{300}=\text{食衰} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (12.215)$$

$$\text{食余}\pm\text{食衰}=\Big\langle{}^{\text{讫}}_{\text{起}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (12.216)$$

$$\frac{\text{食讫（或起）日分}+\text{半辰}}{\text{朔辰}}=\text{辰次}\frac{\text{辰余}}{\text{朔辰}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (12.217)$$

$$\frac{\text{辰余}}{\text{朔辰}}\times\text{刻数/辰}=\text{辰刻数}\frac{\text{刻余}}{\text{朔辰}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (12.218)$$

例如，由二节5(1)或(2)算出某次日或月食的食分多少，设为15分。那么，由表12.15查出食分为15者，衰分为0，代入(12.215)式，得：食衰＝朔日法；将此食数代入(12.216)式，食余加食衰得食讫日分，减食衰得食起日分。而后由(12.217)、(12.218)两式计算食起或食讫辰刻。

以上算法最主要的是衰分表的编订和(12.215)式的布列，根据是什么？下边试着作如下推导，从前面的食衰图可知：

$$AC^2=AE\cdot EF=\frac{\text{食分}}{2}(15-\text{食分})$$

而 $AC=\frac{1}{2}\Omega_1\Omega=\frac{1}{2}$食衰，代入上式：

$$\frac{\text{食衰}^2}{4}=\frac{\text{食分}}{2}(15-\text{食分})$$

$$\text{食衰}^2=2\,\text{食分}(15-\text{食分})$$

① 按中华书局1987版《隋书·律历志》的标点方法，划分为五等：15、14～5、5～3、2、1。如此"每积增四"一语无法安排，须改变标点法，分为六等。

$$食衰=\sqrt{2食分(15食分)}$$

其中食分、数字 15，单位都是分，日食分之“分”，为了能使食衰与食余相加减，须把它化为日分之“分”。由于日食 15 分与望差日度分与差日度分相等，望差近似于 1440 分，1 食分$=\frac{1440}{15}$日分$=96$ 日分。代入上式：

$$食衰=\sqrt{192食分(1440-96食分)}$$

与(12.215)式比较得：

$$\frac{(300-衰)朔日法}{300}=\sqrt{192食分(1440-96食分)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.219)$$

解得：

$$衰=300-\frac{300}{朔日法}\sqrt{192食分(1440-96)食分} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.220)$$

这是一个二次函数式，为了把食分和衰的关系看得更明显，把(12.219)式变为：

$$\frac{(300-衰)^2\cdot朔日法^2}{300^2}=18432食分(15-食分)$$

$$\frac{1}{512}\left[\frac{(300-衰)\times69}{100}\right]^2=食分(15-食分)$$

$$(食分-7.5)^2=7.5^2-\frac{1}{512}\left[\frac{(300-衰)\times69}{100}\right]^2$$

此函数在食分$=7.5$ 时有极小值，两边对称。即食分大于 7.5 与小于 7.5 的数字若两边对称时，衰的值也是对称的。这与表 12.15 有很大出入。表明表 12.15 中数值是观测值，观测是有误差的，上面的推算把月行轨道 $\Omega_1\Omega_2$ 作直线，假定日、月影直径相等……这些也会产生误差，因此，尽管刘焯的衰分表是不准确的，并不能说明它是绝对错误的。事实上，它通过一个中介值“衰”，建立食分与食衰的函数关系，这种思路是很巧妙的。

下边把这段更改标点的情形抄录于后，更改后的标点写在( )中，原标点照录：

“准其食分十五为率，全以下各为衰。十四分以上，以一为衰，(。)以尽于五分。(，)每因前衰每降一分，积衰增二，以加于前，(。)以至于三

分。(,)每积增四。二分增六,一分增十九,皆累算为各衰。(以下略)其减者为起,加者为讫,(。)数亦如气。(　)[①]求入辰法及求刻:(。)以加减食所刻等,(以下略)"。

(6)推日月食所起术。

前边计算的是日月食起讫辰刻,此部分是讲起讫方位。

先说月在内道(黄道以里)的情形,分作两种:一是月在日道之南,二是月在日道之东。古时以为月行九道,在日道之南和东属于"在内道"的情形。

先看第一种情形,如图 12.32(1),月在日道南,自西向东行。由于日行迟,月行速,月自后追及日,若论月食,食分较小时,月的右上角先入地影(如图中阴影部分),左上角最后离开地影。《律历志》说是"起右上,亏在上"。若食分较大〔如图 13.32(2)〕,则月右边先食,左边最后离开地影。《律历志》说是"若食十二分以上,起右亏左"。

若论日食,图 12.32(1)、(2)中的地影代表日面,月掩日面发生日食,日食方位当与月食相反。

《律历志》对日月食方位的论述并不止于此,进一步讲了日在不同方位(即在一日之中的不同辰刻)发生食时,方位的变化情形。对于月在日道之南,讲了六种情形:①正东,②东南维前,③东南维后,④午之后,⑤西南维后,⑥正西。图 12.32(3)是各种情形下月食方位的说明图。该图既可作平面图(中间所标东南西北为四向),又可作立面图(外围东西上下为其方位)。后者是按传统认识:天左传(自东向西)、日月五星右行(自西向东)绘出的,日月随天左传,是从东方升起,划过南半天,从西方落下;同时日月又有一个自西向东的分运动。中心小圆为地,外面大圆为黄道,小圆心在黄道上者为日或地影,在黄道里者为月(月$_1$为正见前半段时的月位,月$_2$为后半段时的月位)。图中④显然是月在日南的情形,把此图随天运旋转,就得到日在其余五种方位时的图形了。如图中①为月在"正东"的情形[②],月$_1$在上(北,立面图),月$_2$在下(南)。所

① 括号内无标点,表示此处标点(原为句号)应删。

② 须知《律历志》叙述此段有两种文例。一是"其正南"、"其正东",是指月在日道之南、之东;二是"若正东"、"在东南维前"等,是月相对于观测者的方位。此处属于后者。

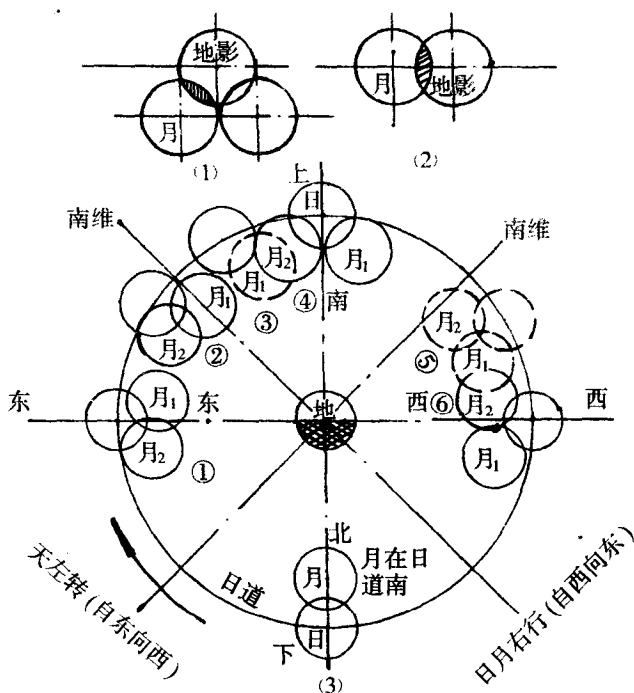



图 12.32　月食方位图

以,《律历志》说,此时"月自日上邪(同'斜')北而下"。图中②是月"在东南维前"的情形,作立面图看,$月_1$在日上("月高日下"),$月_1$在日西北,日在$月_1$东南("月稍西北,日渐东南")。图中③为在东南维后的情形,"东南维后",方位偏南。所以,观测时要"南向望之"。在图中是以上方为南,所以,$月_1$在日之北(平面),《律历志》说"月更北,日差西南"。这是一种动态描述,由于月是自西向东行,而天运自东向西,就天运而言,日由东南维前运行到东南维后,前后相比,日月相对位置的变化是"月更北"了,而日则差向西南移动。图中④是正午时的月位,由于正午转瞬即过,亦可作"午之后"的月位图,$月_1$相对于日位,显然是"月敧西北,日渐东南"。图中⑤是西南维后图,仍是就日与$月_1$的相对位置而言,此时是"月为东北,日则西南"。图中⑥是日在正西图,从$月_1$掩日的情形

看，日食是自北、下“邪亏”（“自日北下邪亏”）。到了食的后半，月$_2$与日位仍非正东西向（“而亦后不正”），月高而日下。

第二种情形是月在日道以东。“月食方位图”中的位置⑥属于这种情形。区别在于，这里说的月在日道以东，是指一年之中的某季节，月总是在日道以东；图中⑥是当月在日道南时、黄昏时的月位。由于月随天运转，每日1周，原虽在东，转到东方时便成了在日道西；转到南方成了在日道以南，否则就不能说是在日道里。既然如此，月在日道东的情形也能用“月食方位图”说明。

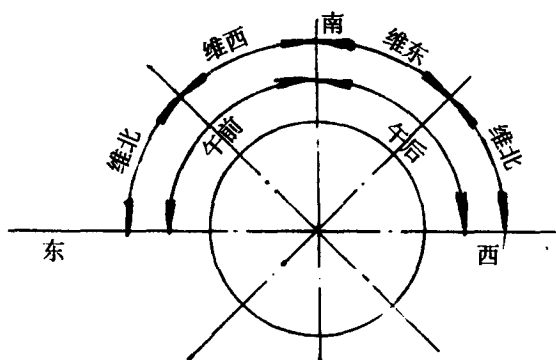



图 12.33 “其正东”分部图

《律历志》对月在正东的情形分两类：午前和午后。又各细分为维西、维北和维东、维北两种情形，如图12.33。第一句：“其正东，起上近亏下而北。”“其正东”固然点明了是指月在“青道”的情形，同时也是指月在东方，如同“月食方位图”中的位置①，月对日的运行是“起上近亏下而北”，即食起于近上部位，向下、向北发展。其余维西、维北等都不难理解，不复赘言。

这一部分《律历志》的标点很混乱，必须重点：

“月在内者，其正南，则起右上，亏左上。（：）若正东，月自日上邪北而下。（；）其在东南维前，东向望之、（，）横（，）月高日下；（，）乃月稍西北，日渐东南。（；）过于维后，南向望之，月更北，日差西南；（。）以至于午之后，亦南望之，月欹西北，日复东南。（；）西南维后，西向而望，月为东

北，日则西南。(；)正西，自日北下邪亏，而亦后不正，横(，)月高日下。若食十二分以上，起右亏左。其正东，起上近亏下而北，(：)午前则渐自上邪下。维西，起西北，亏东南。(；)维北，起西南，亏东北。午后则稍从下傍下。维东，起西南，亏东北。(；)维北，亏东南。在东则以上为东，在西则以下为西。”

下边是月在外道的情形，只讲了月在黄道之南。一日之中分作月在正东、维北、维西南、午、午后、维北、正西七时刻描述。图 12.34 中的(1)是对月在外道时月位的说明。《律历志》说：“月在外道，其正南。”是指冬至时刻，日南至，月更在日之南。此时月位是“起右下，亏左上”，这是冬至所在日午时的情形，日月随天一起转到观察者的正南方，由于月在日道之外，此时已从日南转到日北，月自西向东斜过日道，因此说是“起右下，亏左上”。日月相接，始自月的右下方，秒明前是在月的左上方。

图 12.34(2)是在一日之间，食在不同时刻(日在不同方位)的食位图，如前所说，分作七种情形，分别以①～⑦的序号代替。

图中①是日“在正东”，月自西向东斜贯日道，因此《律历志》说是“月自日南邪下而映”。图中②是日在“维北”的情形(图中虚线为四维线)，此时“月微东南，日返西”，月的方位是对日而言，日的方位则是对月而言，以后同。“日返西”是由于月自日“微东南”前行(超北)，日相对地向月西方移动了。图中③是“维西南”，这时“日稍移东北”，日由午时在月正北的位置，稍微偏向东北了。图中④是正午时的月位，“月南日北”。图中⑤是过午之后，“月稍东南，日更西北”。图中⑥是日在“维北”，这时月在日西南，日在月东北(“月有西南，日复东北”)。图中⑦是日在“正西”，这时“月自日下邪南而上”，这是在三维空间内的观察，从立面观察，月是自日下斜向上，从平面观察，月是自西北向南行。

了解日月相对位置，日月食的起复方位就不难断定了。《律历志》说是“皆准此体以定起亏，随其所处，每用不同”。“随其所处”，是随日月在一日之中所处方位不同的意思。月食要看日(地影)亏起的情形(“月之所食，皆依日亏起”)。相反日食也要看月之亏起，日亏在东，月食在西；日亏东南，月食西北……所谓“随类反之”。至于说月在表，在里，仍由日

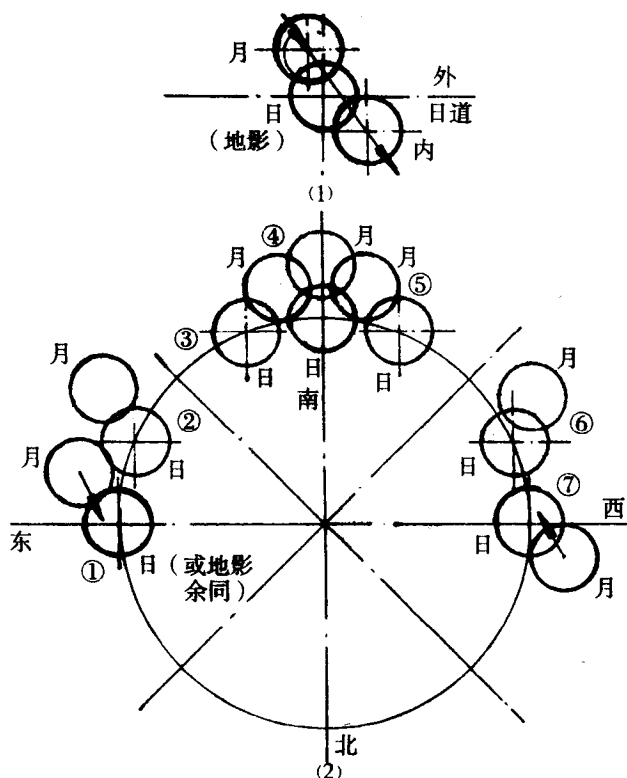



图 12.34　月食外道图

食限决定，叫做“与日食限同表里，而与日返其逆顺”。最后一句是“上下过其分”，“分”指食分，“上”、“下”是指月位，自上而下或自下而上都要过所食分。

三、五星测算

1. 岁星的计算

岁星即木星。

(1)计算参数。

皇极历所取岁星一终数为 $398\frac{41156}{46644}$ 日 $=\frac{18605468}{46644}$ 日，把其中的 18605468 叫做“木数”，木数其实是木星一终数的简称。而把 389 和 41156 分别称为木星的“复日”和复日“余”。

若把木星一终数与一岁日数相减：

$398\frac{41156}{46644}-365\frac{11406.5}{46644}=33\frac{29749.5}{46644}$ 日。其中 33 日和29749.5分分别称为“残日”和残日“余”。

还有一个参数叫做伏半平(836848)，是木星伏日一半的日分数。从后面“木星运行明细”中可见，木星一终之中，见 363 日而伏，伏日数必是木星一复日及余减 363 日，得 $35\frac{41156}{46644}$ 日，中分之得 $17\frac{43900}{46644}$ 日 $=\frac{836848}{46644}$ 日，分子就是“伏半平”。

最后一个参数为“见去日”，等于 14 度。是木星初见时距日度数或日数。五星初见距日度各不相同。

(2)木星入气加减法。

与大业历相似，皇极历也是由木星在二十四气中出现位置的不同，增减一个调整数。此数由所入气产生，或者说是由日行不均产生的。对于木星，有七个调整数，见图 12.35：

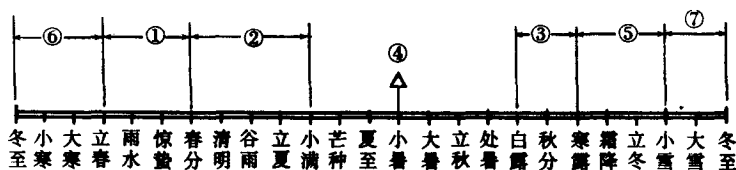



图 12.35 木星入气调整数

第一段，用于立春至春分之间，调整式为：

平见日＋4×平见去立春日数＝调整后数 …………………… (12.221)

第二段，用于春分至小满之间：

平见日＋4×平见去立春日数＋3×平见去春分日数＝调整后数 …………………………………………………………………… (12.222)

第三段，白露至寒露：

平见日＋4×平见去寒露日＝调整后数 ……………………… (12.223)

第四段，按《律历志》的说法是平见在小暑：

平见日＋7＝调整后数 ……………………………………… (12.224)

从图 12.35 可以看出，平见在小满至白露间的调整数，《律历志》没有记载。所以，《律历志》的这段话可能有误："小暑，加七日。"于"小暑"后应增补"前后"二字，如此小满至白露间的空白就不存在了，当然这只是一种推测。

第五段，寒露至小雪：

平见日－8×平去寒露日＝调整后数 ………………………… (12.225)

此式中间用减号，与大业历对照也可知是正确的。如此，标点本《隋书·律历志》中的标点就应该改正：于"小暑，加七日"后的分号改为句号，在这以前为加，此后为减，不可再用分号。

第六段，冬至至立春：

平见日－8×去立春日＝调整后数 …………………………… (12.226)

第七段，小雪至冬至：

平见日－7 日＝调整后数 …………………………………… (12.227)

(3)木星一终运行明细。

初见

顺行	日速 11818 分/日	日迟 70 分	行 110 日	行度 18 度 40738 分
留			28 日	
逆行	日速-6436 分/日	平行	87 日	退行度 12 度 104 分
留			28 日	
顺行	日速 4188/日	日益 70 分	行 110 日	行度 18 度 40738 分
			363 日	行 25 度 34628 分

见 363 日，行 25 度 34628 分以后转入伏行，伏 35 日 41156 分之后再次出见。

2. 火星的计算

火星又名荧惑。

(1)计算参数。

火星一终 $779\frac{41919}{46644}$日$=\frac{36377595}{96644}$日，其中 799 和 41919 分别名为

“复日”及复日“余”,36377595 名为火数。

从火星一终日数及余中减去 2 倍回归年数得 49 $\frac{19106}{46644}$日,49 与 19106 分别名为“残日”及残日“余”。

复日减见日,余为伏日,伏日之半谓之“伏半平”,数为 3379327.5,等于 72 $\frac{20959.5}{46644}$日。

初见去日 16 度。

(2)火星平见入气加减法。

可分为八段,如图 12.36。

第一段,大寒至雨水间:

平见日+19×平见距大寒日数=调整后数 …………………… (12.228)

第二段,雨水至清明间:

平见日+18×平去雨水日数+19×雨水去大寒日=调整后数 …………………………………………………………… (12.229)

第三段,夏至至处暑间[①]:

平见日−16×平见去处暑日=调整后数 ……………………… (12.230)

第四段,小满至夏至间[②]:

平见日−16×平见去处暑日−15=调整后数 ………………… (12.231)

第五段,处暑至寒露间:

平见日−18×平见去白露日=调整后数 ……………………… (12.232)

第六段,寒露至小雪间:

平见日−18×寒露去白露日−17×平见去寒露日=调整后数 …………………………………………………………… (12.233)

第七段,大雪至大寒间:

平见日−29×平见去大寒日=调整后数 ……………………… (12.234)

第八段,小雪至大雪间:

平见日−25 日=调整后日 ………………………………… (12.235)

---

① 平见加减调整数得定见。从《律历志》原标点看不出加、减的分界来,应将“雨水所乘者”后的分号改为句号,以前为加,此以后为减。

② 原文为“小满后,又十五日”.文意不明,应理解为“小满后,又减十五日”。

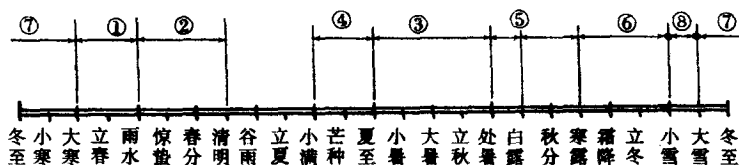



图 12.36 火星入气调整数

从图中可见，清明到小满之间的调整数为空白，因此原文中“小满后”一句，“后”字前可能脱“前”字。

(3)火星一终运行明细。

火星初见速随距冬至远近而不同，如下表：

表 12.16 火星入气调速表之一

距冬至日数	损益率	间距	增损度	日速(度/日)
0			158/236	
30 内	每 1 日半损 1 度	30	20(损)	138/236
31～116	每 2 日损 1 度	86	43(损)	95/236
117～154	每 2 日损 1 度	38	19(损)	76/236
155～169	每 3 日损 1 度	15	5(损)	71/236
170～181	每 3 日损 1 度	12	4(损)	67/236
182～220	每 3 日增 1 度	39	13(增)	80/236
221～244	每 2 日增 1 度	24	13(增)	92/236
245～302	每 1 日增 1 度	58	58(增)	150/236
303～335	每 1 日增 1 度	33	33(增)	183/236
336～365	每 2 日增 1 度	30	15(增)	168/236

《律历志》说，自冬至起，经 365 日后，还终至冬至，236 日行 158 度。由上表可见，日速多 10 度，须将明细中的增损数多减 10 度。如将表中第二行距冬至 30 内损益率改为“每 1 日损 1 度”，30 日内多损 10 度，才能与《律历志》相符。当然，也可通过更改其他时段的损益率达到以上目的。此为第一次调整。还有第二次调整：“其立春尽春分，夏至尽立夏，八日减一日；春分至立夏，减六日；立秋至秋分，减五度，各其初行日及度数。”第二次调整后，才能得到初见时的行速(若干日行若干度)，因此说是“各其初行日及度数”。把第二次调整绘为下表：

表 12.17　火星入气第二次调整数表

节 气 名	距冬至日数	损 益 率	增 损 度
立春～春分	46～91	8 日减 1 日	−5.75 日
春分～立夏	91～136	减 6 日	−6 日
立夏～夏至	136～183	8 日增 1 日	+5.75 日
立秋～秋分	229～274	减 5 度	−5 度

把表中数据融入前表，得二次调整后的火星入气速度：

表 12.18　火星入气调速表之二

<table>
<tr><th colspan="2">与冬至日距</th><th>间距</th><th>损益率</th><th>增损度</th><th>末日速</th></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td></td><td></td><td></td><td>$\upsilon_{\text{冬至}}$＝158 度/236 日</td></tr>
<tr><td colspan="2">0～30</td><td>30</td><td>−1°/1.5 日</td><td>−20 度</td><td>$\upsilon_{\text{第30日}}$＝138°/236 日</td></tr>
<tr><td rowspan="5">31
～
116</td><td>31～46(～立春)</td><td>15</td><td>−1°/2 日</td><td>−7.5 度</td><td>$\upsilon_{\text{立春}}$＝130.5°/236 日</td></tr>
<tr><td rowspan="2">46～91
(立春～春分)</td><td rowspan="2">46</td><td>−1°/2 日</td><td>−23 度</td><td>υ＝107.5°/236 日</td></tr>
<tr><td>−1 日/8 日</td><td>−5.75 日</td><td>$\upsilon_{\text{春分}}$＝107.5°/230.25 日</td></tr>
<tr><td rowspan="2">91～116
(春分～)</td><td rowspan="2">25</td><td>−1°/2 日</td><td>−12.5 度</td><td>υ＝95°/230.25 日</td></tr>
<tr><td></td><td>各减 6 日</td><td>$\upsilon_{\text{第116日}}$＝95°/224.25 日</td></tr>
<tr><td rowspan="4">117
～
154</td><td rowspan="2">117～136
(～立夏)</td><td rowspan="2">20</td><td>−1°/2 日</td><td>−10 度</td><td>υ＝85°/224.25 日</td></tr>
<tr><td></td><td>各减 6 日</td><td>$\upsilon_{\text{立夏}}$＝85°/224.25 日</td></tr>
<tr><td rowspan="2">137～154</td><td rowspan="2">18</td><td>−1°/2 日</td><td>−9 度</td><td>υ＝76°/224.25 日</td></tr>
<tr><td>+1 日/8 日</td><td>+2.25 日</td><td>$\upsilon_{\text{第154日}}$＝76°/226.5 日</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">115～169</td><td rowspan="2">15</td><td>−1°/3 日</td><td>−5 度</td><td>υ＝71°/228 $\frac{3}{8}$ 日</td></tr>
<tr><td>+1 日/8 日</td><td>+1 $\frac{7}{8}$ 日</td><td>$\upsilon_{\text{第169日}}$＝71°/226.5 日</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">170～181</td><td rowspan="2">12</td><td>−1°/3 日</td><td>−4 度</td><td>υ＝67°/228 $\frac{3}{8\text{日}}$ 日</td></tr>
<tr><td>+1 日/8 日</td><td>+1.5 日</td><td>$\upsilon_{\text{第181日}}$＝67°/229 $\frac{7}{8}$ 日</td></tr>
</table>

续表

与冬至日距		间距	损益率	增损度	末日速
182～220	182（夏至）	1	+1°/3 日	$+\frac{1}{3}$度	$\upsilon=67\frac{1}{3}$度$/229\frac{7}{8}$
			+1 日/8 日	+1/8 日	$\upsilon_{\text{夏至}}=67\frac{1}{3}$度/230 日
	183～220	38	+1°/3 日	$+12\frac{2}{3}$度	$\upsilon_{\text{第220日}}=80°/230$ 日
221～244	221～228	8	+1°/2 日	+4 度	$\upsilon_{\text{第228日}}=84°/230$ 日
	229～244（立秋～）	16	+1°/2 日	+8 度	$\upsilon=92°/230$ 日
				各减 5 度	$\upsilon_{\text{第244日}}=87°/230$ 日
245～302	245～258（～白露）	14	+1°/1 日	+14 度	$\upsilon=101°/230$ 日
				各减 5 度	$\upsilon_{\text{白露}}=96°/230$ 日
	259～273（～秋分）	15	+1°/1 日	+15 度	$\upsilon=111°/230$ 日
				各减 5 度	$\upsilon_{\text{秋分}}=106°/230$ 日
	274～288（～寒露）	15	+1°/1 日	+15 度	$\upsilon_{\text{寒露}}=121°/230$ 日
	289～302	14	+1°/1 日	+14 度	$\upsilon_{\text{第302日}}=135°/230$ 日
303～335		33	+1°/1 日	+33 度	$\upsilon_{\text{第335日}}=168°/230$ 日
336～365		30	−1°/2 日	−15 度	$\upsilon_{\text{365日(冬至)}}=153°/230$ 日

此表把表 12.17 中“立秋～秋分”栏数据又析为白露和寒露两个分点，分别推出了它们的日速。《律历志》说“白露至寒露，初日行半度，四十日行二十度”。由表 12.18 中的推算知，白露至寒露，初不是日行半度，可见“初”不是指“白露至寒露”这个时段之初，是说火星初见在白露至寒露之间时，有那么一个点，火星的初见速度是日行半度。“四十日行二十度”也不是指火星在白露到寒露之间运行，40 日行了 20 度，白露到寒露之间只有 30 日余，不可能是“四十日行二十度”。而是指火星在白露到寒露之间某点出现后，初速为日行半度，匀速运行，40 日行了 20 度。由表 12.18 求此日行半度之点：

已知 $\upsilon_{\text{白露}}=96$ 度/230 日，距日行半度差：0.5 度$-\frac{96}{230}=\frac{19}{230}$度。白露到秋分间每日增 1 度。日速每日增$\frac{1}{230}$度，19 日增至$\frac{19}{230}$度。即白露后 19 日（秋分后 4 日）初日见速为日行半度。在此前后，初见速都接近半度，或近似为半度。

也可以作另外一种解释：由表 12.18 知：$\bar{v}=(v_{白露}+v_{寒露})\times\frac{1}{2}=(96/230+121/230)\times\frac{1}{2}=217/230\times\frac{1}{2}\doteq0.47\doteq0.5$（度/日）。因此，《律历志》那段文字意义是：火星在白露至寒露间初见的平均速度是日行半度，见后匀速行 40 日，移 20 度。

初见速度已如上述，下边讲见后运动情形：假若初见于秋分后 4 日，初速是 0.5 度/日。

第一段，40 日行 20 度，匀速运行。即：

$v_{01}=v_1=0.5$ 度/日，

$t_1=40$ 日，

$S_1=20$ 度。

第二段，初速 $v_{02}=0.5$ 度/日 $=23322$ 分/日，末速 $v_2=22649$ 分/日，由此求得：

$$t_2=\frac{v_0-v_t}{a}=\frac{23322-22669}{20}=32.65\ 日$$

$$S_2=\frac{v_{02}+v_2}{2}t=\frac{23322+22669}{2}\times32.65=750803.075\ 分=16°4499'.075$$

第三段，初速 $v_{03}=22669$ 分/日，$a_3=110$ 分/日^2，$t_3=61$ 日，求得：

$$v_3=v_{03}-a(t-1)=22669-110\times60=16049\ 分/日$$

$$S_3=\frac{v_{03}+v_3}{2}t=\frac{22669+16069}{2}\times61=1181509'=25°15409'$$

对于初见在立秋至秋分间，初速曾减 5 度者，此段初速加 $3823\frac{17}{61}$分/日，即 $v'_{03}=22669+3823\frac{17}{61}=2623\frac{17}{61}$分/日。加速度 a_3 和运行时间 t_3 不变，末速及行度为：

$$v'_{03}-a(t-1)=26492\frac{17}{61}-110\times60=19892\frac{17}{61}分/日$$

$$S'_3=\frac{v'_{03}+v_3}{2}t=\frac{26492\frac{17}{61}+19892\frac{17}{61}}{2}\times61=1414729=30°15409'$$

第四段，留 13 日，行度为 0。

第五段，逆行，匀速度退行 63 日，日速为 $\upsilon_5=12526$ 分/日，行度：$-S_5=\upsilon_5\times t=12526\times63=789138==16°42834'$。

第六段，又留 13 日，行度为 0。

第七段，匀加速运行，$\upsilon_{07}=16069$ 分/日，$a_7=110$ 分/日^2，$t_7=61$ 日。$\upsilon_7=\upsilon_{07}+a_7(t_7-1)=16069+110\times60=22669$ 分/日。$S_7=\frac{\upsilon_{07}+\upsilon_7}{2}t_7$ $=\frac{16069+22669}{2}\times61=1181509$ 分$=25°15409'$。

自初见至此段初(共六个时段)，历 223 日，由于初见在秋分后 4 日，距秋分已有 227 日，约含 15 个节气，即已时属立夏(前 2 日)。倘若初见不是在秋分后 4 日，而是自冬至后(6 日)到立春之间，15 个节气后到达立秋到秋分之间，对此种情形，《律历志》说"立秋尽秋分，增行度五，加初日分同前，更疾"。即第七段的参数变成了：$S'_{07}=16069+3823\frac{17}{61}=19892\frac{17}{61}$分/日， $a'_7=a_7=110$ 分/日^2，$t'_7=t_7=61$ 日。由此算得 $\upsilon'_7=\upsilon'_{07}+a'_7(t'_7-1)=19892\frac{17}{61}+110\times60=26492\frac{17}{61}$分/日。$S'_7=\frac{\upsilon'_{07}+\upsilon_7}{2}t$ $=\frac{19892\frac{17}{61}+2649\frac{17}{61}}{2}\times61=23192\frac{17}{61}\times61=1414729$ 分$=30°15409'$。与第七段运算结果相比，多行 5°。而第七段初没有到立秋，故不加，仍按 $\upsilon_{07}\sim\upsilon_7$运行，至第七段末，总行 283.65 日，74°39137′。距初见前 4 日的秋分节约 288 日，折合 19 个节气，即到了小暑节。

此后又有一次调整，随入气浅深速度有所变化，调整的基日(冬至)速度按 213 日行 135 度，如表 12.19。

表 12.19 火星入气调速表之三

序号	距冬至日数	损益率	运行日数	增损数	日速(度/日)
1	0				135/213
2	36	−1 度/1 日	36	−36 度	99/213
3	56	−1 度/2 日	20	−10 度	89/213

续表

序号	距冬至日数	损益率	运行日数	增损数	日速(度/日)
4	80	11	24	－12 度	77/213
5	134	＋1 度/3 日	54	＋18 度	95/213
6	146	＋1 度/2 日	12	＋6 度	101/213
7	188	＋1 度/1 日	42	＋42 度	143/213
8	202	＋15 度/1 日	14	＋21 度	164/213
9	214	＋1 度/3 日[①]	12	＋4 度	168/213
10	259	＋1 度/3 日	45	＋15 度	183/213
11	365	－1 度/2 日	106	－53 度	130/213

表中第 9 行中的损益率栏原文无数字(“又十二日，增一”，见中华书局 1987 年版《隋书·律历志》，第 493 页，第 8～9 行)，只说 12 日增 1 度，连带着下一句当是 45 日增 1 度，显然是错误的。细审原文头一行有“三日日增一”句，其中第二个“日”字应是错简，正确位置在上一行的“增”字之上，“日”上又酌补“三”字，这样原文成了“十二日，三日增一”，就有了表中的损益率。

如此仍不能与《律历志》中说的“终冬至二百一十三日行一百三十五度”的话相合。第 11 行的数字是 213 日行 130 度。与原来的 135 度差 5 度，其中必有错误。可以通过调整损益加以纠正。例如，可以把第 3 行损益率“2 日损 1 度”改为“4 日损 1 度”，再把第 6 行中的“2 日增 1 度”改为“1 日增 1 度”即可。不过从原文看不到作上述改动的根据，按照“疑则缺之”的原则，在表 12.19 中保留了原貌。

前面说，第七段运行完毕时，已到小暑节，入于冬至后 198 日，在表中第 8 行查得，从上一行的日速 143 度/213 日，应增加 15 度，即 158 度/213 日就是调整后的速度。

《律历志》说“前增行度五者，于此亦减 5 度”。在本例中，前第七段未增 5 度，但第三段增加了 5 度，也符合“前增行度五”的条件，减 5 度后变为日速 153 度/213 日＝33505 分/日。此后运行为第八段，仿照第

① 原文无损益率，酌增，见正文中的说明。

三段的算法计算此段的末速和行度：

已知：$\upsilon_{09}=33505$ 分/日，$a_8=110$ 分/日^2，$t_8=61$ 日。求得：

$\upsilon_8=33505-110\times60=26905$ 分/日

$$S_8=\frac{33505+26905}{2}\times61=1842505\text{ 分}=39°23389'$$

第八段之后，火星位置距初见（秋分后 4 日）344.65 日，约在白露节前后。对此后的运行，《律历志》说："其立夏尽夏至日，亦(初)日行半度，六十日行三十度。夏至尽立秋，亦初日行半度，四十日行二十度。"白露在立秋节后，上述两个范围都不适合，略去不计。《律历志》接着说："其残亦计充如前，皆差行，日益疾二十分，各尽其日度而伏。"第八段之后应按照 20 分/日^2 的加速度运行，运行日数是直到火星伏之前。前面已算得，火星一见 635 日，见后伏行 $144\frac{41919}{46644}$日复见所以这段运行（作为第九段）的时间是 635－283.65－61＝290.35 日。于是末速、行度都可算出：

因，$\upsilon_{09}=\upsilon_8=26905$ 分/日，$a=20$ 分/日^2，$t=290.35$ 日

所以，$\upsilon_9=26905+20(290.35-1)=32692$ 分/日

$$S_9=\frac{26905+32692}{2}\times290.35=8651994\text{ 分}=185°22854'$$

本例各段运行情况列如表 12.20：

表 12.20　秋分后 4 日初见之火星运行表

段	日数	行度
1	40	20°
2	32.65	16°4499′
3	61	30°15409′
4	13	0
5	63	－16°42824′
6	13	0
7	61	25°15409′
8	61	39°23389′
9	290.35	185°22854′
合计	635	299°38736′

火星初见时日，星距为16度，日在前(东)，火星在后。经635日后，日行635度，除去365度(天度一周数)，为270度，即635日日行270度，而火星实行299度38736分，约300度。原来日在火星前，变成了火星在日前，日从后面逐渐追及火星，日、星行度差减去起初日在星前度数：$300^\circ-270^\circ-16^\circ=14^\circ$，为日星距。日星距16度而星伏，此处却直到14度才伏，表明计算有2度的误差。可能与表12.16、12.19中存在的错误有关。

3. 土星的计算

土星又名镇星，《史记·天官书》称为填星。

(1)计算参数。

土星一终$378\frac{4162}{46644}$日$=\frac{17635594}{46644}$日，其中378和4162分别名为土星"复日"及"余"，17635594为"土数"。从复日及余中减去一岁日数($365\frac{11406.5}{46644}$日)余$12\frac{39399.5}{46644}$日，其中12和39999.5分别名为"残日"和残日"余"。在土星一终中，星见341日，伏$37\frac{4162}{46644}$日$=\frac{1729990}{46644}$日，其中1729990为星伏日分数，它的一半为864995分，名为"伏半平"。

星初见去日$16^\circ.5$。

(2)土星平见入气加减法。

二十四气分作七段：

第一段，小满至大暑间：

$$平见日+7\times去小满日数=调整后数 \quad\cdots\cdots (12.236)$$

第二段，寒露至小雪间：

$$平见日+7\times去小雪日=调整后数 \quad\cdots\cdots (12.237)$$

第三段，大暑至寒露间：

$$平见日+8=调整后数 \quad\cdots\cdots (12.238)$$

第四段，小雪至小寒间：

$$平见日-9\times去小寒日=调整后数 \quad\cdots\cdots (12.239)$$

第五段，雨水至小满间：

$$平见日-4\times去小满日=调整后数 \quad\cdots\cdots (12.240)$$

第六段，立春至雨水间：

平见日－(3×去雨水日＋4×去小满日)＝调整后数 …… (12.241)

第七段，小寒至立春间：

8日－平见日＝调整后数 ……………………………… (12.242)

分段情形绘为图12.37：

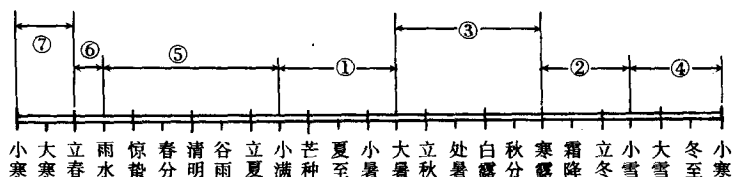



图12.37　土星入气调整图

(3)土星一复运行明细。

初见

顺行　日速4364分/日　运行80日　行度7度22612分

留　　　　　　　　　　39日

逆行　日速2820分/日　运行103日　行度－6度10596分

留　　　　　　　　　　39日

顺行　+）日速　4364分/日　运行80日　行度7度22612分

　　　　　　　　　　　　341日　　　8度34628分

即土星初见后，历341日行8度34628分，转入伏行。如前所说，伏行37日余再见。

4. 金星的计算

(1)计算参数。

金星一复$583\frac{42756}{46644}$日$=\frac{27236208}{46644}$日，其中583和42756分别名为金星"复日"和复日"余"，而把27236208叫做"金数"。金数者，是金星一复日分数的意思。从一复日数中除去一岁日数得：

$$583\frac{42756}{46644}-365\frac{11406.5}{46644}=218\frac{31349.5}{46644}日$$

218为"残日"，3149.5为残日"余"。

金星一复，也包括见和伏两项，不同的是又分作"晨见伏"和"夕见伏"：晨见伏$327\frac{42756}{46644}$日，其中晨见244日，晨伏$83\frac{42756}{46644}$日。晨伏数的

一半化为日分，为1957104分，名为“晨伏半平”。夕见伏256日，其中夕伏则晨见。

(2)金星平见入气日加减。

夕见的调整法分作八段。

第一段，平见在芒种至立秋间：

平见日＋6×去芒种日数＝调整后数 ……………………… (12.243)

第二段，在秋分至小雪间：

平见日＋5×去小雪日数＝调整后数 ……………………… (12.244)

第三段，在小雪至大雪间：

平见日＋(4×平见去大雪日＋5×去小雪日数)＝调整后数 ……………………… (12.245)

第四段，平见在立秋至秋分之间：

平见日＋7＝调整后数 ……………………… (12.246)

第五段，在大雪至立春间：

平见日－5×去大雪日＝调整后数 ……………………… (12.247)

第六段，在立春至雨水间：

平见日－(4×去立春日＋5×去大雪日)＝调整后数 ………… (12.248)

第七段，在清明至芒种间：

平见日－6×去芒种日＝调整后数 ……………………… (12.249)

第八段，在雨水至清明间：

7日－平见日＝调整后数 ……………………… (12.250)

晨平见分作十段调整。

第一段，冬至至小寒间：

平见日＋5[①] ×平见去冬至日＝调整后数 ……………………… (12.251)

第二段，小寒至立春间：

平见日＋(6[②] ×平见去小寒日＋5×去冬至日)＝调整后数 ……………………… (12.252)

第三段，芒种至夏至间：

---

① 原文为6。

② 原文为5，据陈美东《中国古代五星运动不均匀性改正的早期方法》，《自然科学史研究》第9卷第3期，第210～211页。

平见日+5[①] ×平见去夏至日=调整后数 …………………… (12.253)

第四段,立夏至芒种间:

平见日+(6[②] ×平见去芒种日+5×去夏至日)=调整后数…………………………………………………………………………………… (12.254)

第五段,立春至立夏间:

平见日+5 日=调整后数 …………………………………… (12.255)

第六段,夏至至小暑间:

平见日-5[③]×平见去夏至日=调整后数…………………… (12.256)

第七段,小暑至立秋间:

平见日-(6[④]×平见去小暑日+5×去夏至日)=调整后数 … (12.257)

第八段,大雪至冬至间:

平见日-5[⑤]×平见去冬至日=调整后数…………………… (12.258)

第九段,立冬至大雪间:

平见日-(6[⑥]×平见去大雪日+5×去夏至日)=调整后数 … (12.259)

第十段,立秋至立冬间:

5 日-平见日=调整后数 …………………………………… (12.260)

晨见、夕见调整的分段法绘为图 12.38:

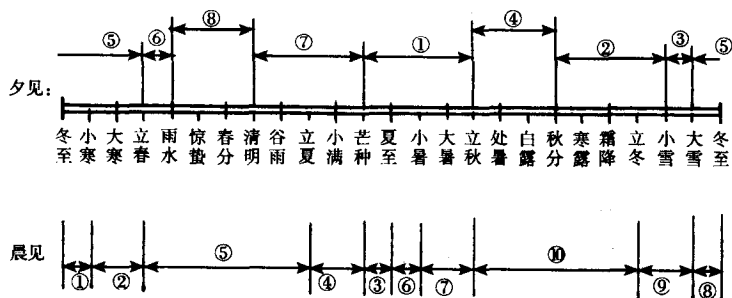



图 12.38 金星入气调整图

(3)金星一复运行明细。

《律历志》中的这一部分文字与第十一章中相关部分对照读,就能

①③⑤ 原文为 6。

②④⑥ 原文为 5。

看出，是正文与小字注文混在一起了，所以很难读。夕见部分的正文为："夕见，百七十一日行二百六度"，"乃十二日行十二度"，"又日度十二而迟"，"日益疾五百二十分，初日行分二万三千七百九十一，篾三十五，行日为母，四十三日行三十二度"，"留九日乃逆，日退太半度，九日退六度，而夕伏晨见"。计算如下：

夕见

顺行(疾)		行日 171 日　行度 206 度	①
顺(平行)		行日 12 日　行度 12 度	②
顺行(疾)	初速 $23791\frac{35}{43}$度/日　加速度 520 分/日^2	行日 43 日　行度 32 度	③
留		9 日	④
逆行	初速$\frac{2}{3}$度/日	行日 9 日　行度－6 度	
+)		244 日　行 244 度	

夕见凡 244 日 行 244 度。其中，①段后的一段文字解释说："其谷雨至小满，白露至寒露，皆十日加一度；小满至白露加三度。"如此，不可能由日速 206 度/171 日变为 12 度/12 日，必有误文。"皆十日加一度"似应为"皆加十日、一度"，"加三度"似是"加二十日、三度。"虽于文意可通，却无根据，姑妄言之也就是了。②段之后的注文是："冬至后，十二日减日度各一；雨水尽夏至，日度七；夏至后六日增一。大暑至立秋，还日度十二；至寒露，日度二十二；后六日减一，自大雪尽冬至。"意思可表示如表 12.21。

表 12.21　金星夕见②段变动表

时段	变率	该段日数	增损日度	日速
初始				12 度/12 日
冬至～雨水	$\frac{-1度}{-1日}$/12 日	60 日	－5 度 －5 日	
雨水～夏至	——			7 度/7 日
夏至～大暑	$\frac{+1度}{+1日}$/6 日	30 日	+5 度 +5 日	
大暑～立秋	——			12 度/12 日

续表

时段	变率	该段日数	增损日度	日速
立秋～寒露	$\frac{+1\text{度}}{+1\text{日}}/6$ 日	60 日	+10 度 +10 日	22 度/22 日
寒露～大雪	$\frac{-1\text{度}}{-1\text{日}}/6$ 日	60 日	−10 度 −10 日	
大雪～冬至				12 度/12 日

文、表对照可知，原文所谓“增一”、“减一”是“日、度各增一”、“减一”的省文；所谓“日度七”、“日度十二”、“日度二十二”是“七日行七度”、“十二日行十二度”、“二十二日行二十二度”的省文。

③、④段之间有八个字：“前加度者，此依减之。”既非正文，亦非小注，与文意无涉，应是衍文。

晨见部分也有类似情形，正文如下：“日退太半度，九日退六度。复留，九日而行，日益迟五百二十分，初日行分四万五行六百三十一，篾三十五，四十三日行三十二度”，“又十二日行十二度”，“乃疾，百七十一日行二百六度”。计算如下：

晨见

逆行（平行） 初速 $-\frac{2}{3}$ 度/日 　行日 9 日 行度 −6 度

留 　行日 9 日

顺行（匀减） 初速 $45631\frac{35}{43}$ 度/日 加速度 −502 分/日^2 行日 43 日 行度 32 度①

顺行（匀） 　行日 12 日 行度 12 度 ②

+）顺行（疾） 　行日 171 日 行度 206 度 ③

　244 日 行 244 度

①段后文字可当做小字注文，是“芒种至小暑，大雪至立冬，十五日减一度；小暑至冬至，减二度”。②段后文字也当做小注，是“冬至后，十五日增日、度各一。惊蛰至春分，日度十七；[①]后十五日减一，尽夏至，还日度十二。后六日减一，至白露，日度皆尽。霜降后，五日增一，尽冬至，又日度十二”。后一段原文可以仿照表 12.21 的形式制成表 12.22。

① 原为逗号（见《隋书·律历志》，中华书局 1987 年版，第 496 页第 3 行），改分号。

表 12.22 ②段后注文诠释表

序号	时段	变率	该段日数	增损日度	末速
1	初始				12 度/12 日
2	冬至～惊蛰	+1 度 +1 日 /15 日	75 日	+5 度 +5 日	17 度/17 日
3	惊蛰～春分				17 度/17 日
4	春分～芒种	−1 度 −1 日 /15 日	75 日	−5 度 −5 日	12 度/12 日
5	芒种～夏至				12 度/12 日
6	夏至～白露	−1 度 −1 日 /6 日	75 日	−12 度 −12 日	0
7	白露～霜降				0
8	霜降～冬至	+1 度 +1 日 /5 日	60 日	+12 度 +12 日	12 度/12 日

其中第 4 行“春分～芒种”，原文说是“后十五日减一，尽夏至，还日度十二”。“后”是承上文，指“春分之后”。“尽夏至”共 6 个节气，约 90 天，每 15 日减 1 日、1 度，合减 6 日、6 度。从上一时段的末速 17 度/17 日，减 6 日、6 度，为 11 度/11 日，不能像原文说的那样“还日度十二”。因此将“夏至”改为“芒种”，并增第 5 行“芒种～夏至”栏。

还有一个问题：根据前面的计算，夕见 244 日行 244 度，晨见 244 日行 244 度，晨见、夕见的日、星行度相等，那么，金星是怎样由夕见转为晨见的呢？夕见初，日、星距 11 度，日西星东（或者说是星前日后），到夕见结束之前，日星之间距离仍是 11 度，始终是星前日后，不可能出现晨见的情形。但是夕见之后，伏行 12 日（夕见伏 256 日－夕见 244 日＝伏行 12 日），若保持夕前速度：日退太半度，12 日退行（西行）8 度。其间日继续前（向东）行，12 日西行 12 度，日对星向西多行了 20 度。减去起初二者之间的 11 度，变成了日东星西（日在前星在后），相距 9 度。这就有了晨见的条件。但晨见时日星之间究竟相距几度，取决于伏行时的速度，古法历来是“伏不书度”，也就无法算出二者间的星度了。晨伏期间，日、星皆东行，而星疾日迟，终于星超过日，又变成了日西星东，夕见成为可能。

5. 水星的计算

水星又名辰星，也有晨见、夕见的不同。

(1)计算参数。

水星一复共 $115\frac{40946}{46644}$日$=\frac{5405006}{46644}$日，其中 115 和 40946 分别为水星“复日”及复日“余”，5405006 名为“水数”。分作“晨见伏”、“夕见伏”二段，“晨见伏”，$64\frac{40946}{46644}$日，“夕见伏”，51 日。晨见伏之中，见 31 日，伏 $33\frac{40946}{46644}$日$=\frac{1580198}{46644}$日，星伏分 1580198 之半为 790099 分，名为“晨伏半平”。

星见去日 17 度，小于此数则星隐不见。

(2)水星平见随入气而变化的情形。

《律历志》说是夕见若在立秋至小雪之间，则应见而不见；在立夏至白露间，应见不必见，就是虽是应见，可能见，也可能不见。以上两个时段有部分(立秋至白露之间)重叠，对于这段时间，上面的论述是矛盾的，既说是应见不见，又说是“时有见者”。

同样，晨见若发生在立春至小满之间为应见不见；若在立冬至惊蛰之间，应见仅“时有所见”，其中立春至惊蛰是重叠区，不可能既适应前者，也符合后者。

(3)水星一复运行明细。

夕见

顺行	$1\frac{2}{3}$度/日	12 日 行 20 度(若在小暑至白露之间，1.5 度/1 日，12 日行 18 度)
又		8 日 行 8 度，(若大暑后，－1 度/2 日，16 日后日、度俱尽)
迟行	0.5 度/日	4 日 行 2 度
益迟	$\frac{1}{3}$度/日	3 日 行 1 度
+) 留		4 日
		31 日 行 31 度　后夕伏

晨见		
留		4 日
顺行迟	$\frac{1}{3}$度/日	3 日行 1 度(在大寒至惊蛰间,无此段运行)
疾	0.5 度/日	4 日 行 2 度
又		8 日 行 8 度,(若在大寒后,一1 度/2 日,16 日后,日、度去尽)
益疾	1 $\frac{2}{3}$度/日	12 日 行 20 度(若无留后之顺迟行,此段为 1 $\frac{1}{2}$度/日,12 日行 18 度)
+)		31 日 行 31 度　后晨伏

水星夕见伏 51 日,见既为 31 日,伏必为 20 日;晨伏如参数给定的数值。

6. 五星其他量的推算

(1)推星平见术。

《律历志》给出的第一个公式是推所求年天正冬至后星平见日及日余的公式:

$$\frac{\text{星数}-[(\text{积实}-\text{伏半})-m\cdot\text{星数}]}{\text{气日法}}=\text{所求年天正冬至后星见日}\frac{\text{余}}{\text{气日法}} \quad (12.261)$$

其中"积实"《律历志》说是"积半实",据"校勘记"改;"伏半"不是五星参数中的"伏半平",而是"伏见半"的误文。就是金、水二星两伏见之一的"晨、伏见"。把此式与大业历中的相应公式比较〔参见第十一章"求星见术"中的(11.28)式〕,"积实"就是"通实",是上元以来的积日分数。此外,两者的区别是,此式多减了一个"伏半",足见是可有可无的。对木、火、土、三星不必减。

对金、水二星,由于一复之中,先夕见,后晨见,所求始见为所求年中星初见的日期,此初见可能是夕初见,也可能是晨初见。在(12.261)式中,积实$-m\cdot$星数$=a$,若$a>$夕见伏,初见在冬至后;若$a<$夕见伏,夕见在冬至前,晨见在冬至后,星数$-a-$晨伏见$=$晨初见。《律历志》说:"金、水满晨见伏日者,去之,晨平见。"此时(12.261)式中的"伏半"就是晨见伏数。

由(12.261)式所得求平见所在月、日,用下式:

$$\text{冬至去定朔日及余}+\text{天正冬至后星见日及余}-m\cdot\text{复日}-\sum_{1}^{n}\text{定大小朔}$$

=星始见所在 ………………………………………………………… (12.262)

式中 m 是 0 或 1,$n=1\cdots12$。左边前两项和大于星复日时 $m=1$,小于星复日则 $m+0$;"定大小朔"是指自天正月定朔到星见所在月之前每个月的定日数(29 日或 30 日)。求得的"星始见所在"算外为星始见所在日数,星见所在月则为第$(n+1)$月。

与大业历的相应公式比较〔参见第十一章"求平见月日"中的(11.30)式〕,皇极历的(12.262)式左边多了一项"$-m\cdot$复日"。是由于考虑到前两项相加后有可能大于星一复日数,若不除去一复日数,计算所得就不是所求年星"始见"的所在月日数,有可能是星再见的月日数,这样,(12.262)式运算结果的含义就不清楚了。大业历见不及此,是它不如皇极历精细的表现之一。

"求后平见",即自所求年始,星再见所在月日。《律历志》的公式是:

星始见所在+岁数+残日=后平见所在 ……………………… (12.263)

"残日"已如前述,是星一复日数除去整回归年日数后的余日及分数。即(12.263)式左端后两项之和(岁数+残日)等于星一复数。其中"岁数"等于 0～2(水星为 0,木、土、金为 1 岁,火星为 2 岁)。相加时注意单位,左端 1、3 两项单位为日,第二项单位为岁,而这个岁与实际的岁大小并不相等(前者为回归年,后者为历法年:12～13 个朔望月),所以,须把它化为日,而后相加。右端所得为总日数,应从中逐次减去星首见后每个朔望月日数,满历法年则除去历法年,直到所余不足一个朔望月,由所去年数得后见所在年,年外月数算外为所在月。

对金、水二星,若分别求后见中的晨见或夕见日,(12.263)式左端不用第二项和第三项,而用晨见伏或夕见伏,分别得后见夕见或晨见所在,即:

晨始所在+晨见伏日及余=后夕见伏所在 …………………… (12.264)

夕始见所在+夕见伏日=晨见伏所在 ……………………… (12.265)

《律历志》说是"加晨得夕,加夕得晨",须注意的是,只有星始见为"晨见"时,才能用(12.264)式求夕伏见所在;同样,只有星始见为夕见时,才能由(12.265)式求晨见。由所得晨夕伏见所在日求年、月如(12.263)式中方法。

(2)求常见日。

前面说过，皇极历所求日，分为平日、常日、定日三种，由平均数如经朔、经望等求得的平均日称为平日；计入日行迟疾数引起的误差者为常日；同时计入日、月行迟疾数所生误差者名为定日〔参见本章二节1(8)“求经朔望入交常日”〕。本节6(1)所求星见日为平见，计入星入气调整数者为常见日，计入日行先后数者为定见日。《律历志》给出的求常见日的公式是：

$$平日及余+\frac{入气加减数}{转法}=常见日及余 \cdots\cdots (12.266)$$

左端第二项分子“入气加减数”，《律历志》原文说是“所得加减者”，指本章三节“五星测算”中每星计算的第(2)部分：“X 星入气加减法”所述的入气调整数。如木星入气在立春至春分间，调整数是“4×平见去立春日数”〔参见本章三节1(2)中的(12.221)式〕；入气在春分至小满之间调整数为“4×平见去立春日数+3×平见去春分日数”〔参见(12.222)式〕等。入气加减数除以转法得日，不足为余，余的分母自然也是转法，与(12.266)式第一项“平见日及余”中的“余”单位不同，后者分母是“气日法”。为了使两者能相加减，须将单位化同，为此将第二项分子、分母都乘以余通，分母(转法)乘余通得气日法，与第一项“余”的分母相同，可以直接相加了，但是第二项被加的分子不再是原来的分子，而是原分子与余通相乘的积。(12.266)式变成：

$$平见日及余+日\frac{不满\times余通}{气日法}=常见日及余 \cdots\cdots (12.267)$$

式中“不满”是指(12.266)式中的“入气加减数”除以转法，所得整数为日，剩余的不足转法的分数。把它乘以余通后，就可直接与第一项中的“余”相加了。(12.267)式为《律历志》所给求常见日及余的公式。

(3)求定见日。

常见日加上日行快慢引起的误差即得。日行快慢的误差按表12.1所载，是平行数加减衰总数，一节3(5)“求定气”法中叫做“先后已通者”，说得详细一些是“随算其日”(指平行日数)，“通准其余”(即通计其气余数，气余数就是由衰总栏算得的先后数。参见《隋书·律历志》，中华书局1987年版，第467页)。因此，星定见日的求法是：

常见日干先后已通者＝定见日及余 …………………………… (12.268)

参见一节3(5)中的(12.41)式中的“所历日及余”，求其中$\sum_{1}^{n}$，即“先后已通者”，意义是在平见日内的缠衰数(或先后数)之和。日行速，日速增多量为先，行相同日度所需时间少；日行迟，日速减少量为后，行相同日度分所需时间多，所以说是“先减后加”。

利用(12.268)式要先由平见算出常见，再从表12.1查出“平见对应的先后数”，“先减后加”常见日，就得到了所求的定见日及余。

(4)求星见所在度。

《律历志》的公式是：

$$\frac{\left(\text{气日法}\begin{matrix}+(\text{分前})\\-(\text{分后})\end{matrix}\text{其日先后余}\right)\times\text{定见余}}{\text{气日法}}+\text{夜半度分}$$

$$\begin{matrix}-(\text{晨见})\\+(\text{夕见})\end{matrix}\text{初见去日度分}=\text{星初见所在宿度} \quad\cdots\cdots (12.269)$$

在大业历“行五行法”中的求星见宿度公式中，左端只包括定见余(称“定见日分”)、夜半度分(称“夜半，日所在宿度算及分”)和初见去日度分三项和〔“初见去日度分”前也是“晨减夕加”，参见第十一章二节4(1)(11.81)式，原文见《隋书·律历志》，中华书局1987年版，第447页第9～10行〕，道理极易理解：夜半时日所在宿度分到星晨见或夕见时，日又行了个“定见余分”，两者相加，再加上此时的星距日度分，当然等于星所在宿度了。而皇极历计算时把“定日余”这一项更加细化了，大业历只把它除以“度法”(相当于皇极历中的“气日法”)了事。而$\frac{\text{定日余}}{\text{气日法}}$表示的是每日分为气日法度时，夜半到星见时的日行分实数。进一步思考就会发现，这样不妥：既为定日余，每日分数各不相同，怎可一概用气日法作分母？所以$\frac{\text{定日余}}{\text{气日法}}$表示的还是个近似数。皇极历更把它乘以所在日的实行分数，使“定日余”的精度提高一级。这个“实行分”就是(12.269)式中的“气日法$\begin{matrix}+(\text{分前})\\-(\text{分后})\end{matrix}$其日先后余”，“其日先后余”由表12.1中的缠衰数算得，从表中可见，缠衰数在二分(春分、秋分)之前增加，二分

后减少，所以(12.269)式中气日法与先后余的关系是分前加，分后减。

日宿度与星见去日度之间的关系为晨见则减，夕见则加，是由于晨见时日在星前，日度大，星度小，所以当减；夕见则星在日前，星度大，日度小，所以当加。

(5)求次日星度。

由(12.269)式求得星初见所在宿度加上1日所行度分，即得次日星宿度，即：

星初见所在宿度分＋星1日行度分＝星次日所在宿度 ……… (12.270)

其中的"星1日行度分"可由前面"五星测算"的各星运行明细中推知。若该日星行不是匀速，按迟疾分数"疾增、迟损之"；若行分之下还有更小的计量数"篾"，篾与篾相加，满篾法进位为分；度与度相加、分与分相加、篾与篾相加。设或有分母不相等者，先通分，使分母相同而后加。遇到该日星留不行或逆行的情形时，留者，次日星度分与头日相等；逆行者，(12.270)式左端的加号改为减号。若初见宿度数无篾，减星1日行数中有篾，须从初见宿度数中取出1分化为篾，而后相减。由于虚宿有零分，星行过虚宿时，须从行度分中去虚分，称为"入虚去分"；若初见宿度中无篾，加星1日行数中有篾，将篾加入也就是了，叫做"逆出先加"。篾相加减者，所得都要除以篾法，除得的商为分(即转为分)，剩余的除不尽的部分仍称为篾。由(12.270)式：初见加1日所行，得次日宿度；再加1日行，得第三日宿度……如此进行下去，可以求得星"每日所在"。若知星距日度数，加减日所入宿度数，也可定出星在宿度[①]。诸行星也可以推算出在黄道以内或以外，方法可以仿照推算月行黄道内外的方法进行。仿照不易者，可求出星去日的黄道度，有先后分者(求定度时)也是二分日前加，二分日后减。对于金、火等行星的每日行度，须变换单位才能确定者(以日除度，除不尽的情形)，若日少度多(如$\frac{b}{a}$，而$a<b$)，则从度数(b)中减去日数(a)，直到不能再减，得到余数名为"残"(如$b=ma+c$，从b中减去a，减m次之后，得余数c，c为"残")。所减次数

① 此句原文是："知去日度，增以日所入先后分，定之。"校勘者疑"知"字为衍文，把"去日度"三字断入上句，误。

(m)为度。把残乘以度法，除以日数，所得的分，不满分者为篾，篾的分母为日数。度和分(包括篾在内)合在一起为所求每日行度(《律历志》说是“日少者，以分并减之一度”为所求)。对于日多度少的情况($a>b$)，直接把度数乘以度法，除以日数，所得为分。同样是分余为篾，篾以日数为分母。这种情况下，是以所得分(包括篾)为所求数(《律历志》说是“日多者直为度分”)。这两种情形(“日少度多”用“日多度少”)算得的都是一日的平均行度分数(《律历志》说是“皆一日平行分”)。

自此以下是一段关于匀变速(差行)运动初速度计算法的话，结合运动学的计算公式，就容易读懂了。

对于匀加速运动(“益疾”)：

$v_t=v_o+at$ 其中 v_t 为末速，v_o 为初速，a 为加速度(益疾数)，t 为运行时间。若以 $\bar{v}$ 表平均速度，则：

$$\bar{v}=\frac{v_t+v_o}{2}=\frac{v_o+at+v_o}{2}=v_o+\frac{a}{2}t \quad \cdots\cdots (12.271)$$

对于匀减速运动(“益迟”)：

$$v_t=v_o-at,$$

$$\bar{v}=\frac{v_t+v_o}{2}=v_o-\frac{a}{2}t \quad \cdots\cdots (12.272)$$

当求次日速时，$t=1$，于是(12.271)、(12.272)式分别可写为：

$$v_o=\bar{v}-\frac{a}{2}\cdot 1 \quad \cdots\cdots (12.273)$$

$$v_o=\bar{v}+\frac{a}{2}\cdot 1 \quad \cdots\cdots (12.274)$$

《律历志》叙述这两个式子说：“其差行者，皆减(意同‘取’)所行日数一，乃半其益疾、益迟分(a)而乘之，益疾以减，益迟以加一日平行分($\bar{v}$)，皆初日所行分。”

当计算星若干日的行度时，若是日前有余数(因“日数不满而未得成度者”)，须将此数(度或日)乘以度法或气日法化为分，再除以日数。把除得的商与星行日所在气内的日疾数相加减，由得数算出星行日及度分数。不足1分者，仍用篾表示。

五星见伏的规律，《律历志》说：“木、火、土晨有见而夕有伏；金、水即夕见还西伏，晨见即晨伏。”道理可由五星见伏参数加以说明：以木星

为例，若自晨见始，见 363 整日以后伏，伏 35 日零 41156 分再见。41156 分约当 10.6 个时辰，差 1.4 个时辰不足 1 整日。或者说再见时比初见提前了 1.4 个时辰，约 4 见后提前 6 个时辰，晨见就变成了夕见。因此，《律历志》说“晨有见而夕有伏”。意思是说见或伏都有可能在晨或在夕：晨见或转而为夕见，夕见转而为晨见。伏亦如此。仿上法知火星每见提前约 1.2 个时辰，每隔 5 见，晨见转为夕见；土星每见大约后延 1.1 个时辰，约 5～6 见晨夕一转。

表 12.23　五星见伏日数表

星名	星一复日数			伏日	见日
木	$398\frac{41156}{46644}$日			$35\frac{41156}{46644}$日	363 日
火	$779\frac{41919}{46644}$日			$144\frac{41919}{46644}$日	635 日
土	$378\frac{4162}{46644}$日			$37\frac{4162}{46644}$日	341 日
金	$583\frac{42756}{46644}$日	晨	$327\frac{42756}{46644}$日	$83\frac{42756}{46644}$日	244 日
		夕	256 日		
水	$115\frac{40946}{46644}$日	晨	$64\frac{40946}{46644}$日	$33\frac{40946}{46644}$日	31 日
		夕	51 日		

金、水二星则不同，以金星为例，仍假设自晨见始，244 整日以后转入晨伏（“晨见则晨伏”）。伏 83 日零 11 个时辰转入夕见伏。本来 244 日加 83 日零 11 比晨初见时早了 1 个时辰，没有到“夕”，若随即星见，算不得夕见。但是夕见伏不具“伏半平”的参数，只知夕伏见总为 256 日。既然称为夕见，必在日夕始见。至于由晨伏末到夕见初之间的时间，是夕见还是夕伏就不必计较了。总之，它属于“夕见伏”。夕见伏 256 整日，所以是“夕见还夕伏”。“夕伏”持续多久，不得而知，前曾言“夕伏而晨

见”的话，必是持续到晨见时方了。

最后一段文字是讲火星运行明细的计算自冬至始者，应当把冬至余日（日分数）计入“到冬至日数”之内。

第十三章 《隋书·律历志》涉及的其他历法

一、北朝历法

"后齐文宣，用宋景业历。西魏入关，行李业兴历，逮于周武帝，乃有甄鸾造《甲寅元历》，遂参用推步焉。大象之初，太史上士马显，又上《丙寅元历》，便即行用。迄于开皇四年，乃改用张宾历。十七年，复行张胄玄历，至于义宁。"

1. 宋景业的天保历

"后齐文宣受禅，命散骑侍郎宋景业协图谶，造天保历。景业奏：'依《握诚图》及《元命包》，言齐受录之期，当魏终之纪，得乘 35[①] 以为蔀，应 676 以为章。'文宣大悦，乃施用之。"

《期历统》曰："上元甲子至天保元年庚午，积 110526，算外。章岁 676，度法 23660，斗分 5787，历余 162261。"

由以上知，天保历的参数：上元至天保元年积 110526 年。此外，章法，676；蔀法，23660（1 蔀＝35 章，又名度法）；斗分，5787。

那么，1 个回归年日数为 $365\dfrac{5787}{23660}\approx 365.24459$ 日，比正光历（365.24373 日）、兴和历（365.24419 日）都大。

由章法 676 可以估计出闰率是 676 年 249 闰，比 19 年 7 闰略小。由此可以算出每个朔望月日数为 $29\dfrac{155272}{292635}=\dfrac{8641687}{292635}$ 日。其中 292635

---

① 本章古籍中所引数字原为汉字数字，为便于阅读，写作阿拉伯数字，下同。

为日法，8641687 为月法。近点月为 $27\frac{162261}{292635}$日。

2. 甲寅元历

北齐后主武平七年(576 年)董俊、郑元伟上《甲寅元历》，"并以 657 为章，22338 为蔀(1 蔀＝34 章)，5461 为斗分，甲寅岁、甲子日为元纪"。

如此，甲寅元历取回归年日数 $365\frac{5461}{22338}$日，朔望月为 $29\frac{146595\frac{2}{657}}{276284}$日，657 年设 242 个闰月。

3. 刘孝孙、张孟宾历

"又有广平人刘孝孙、张孟宾二人，同知历事。孟宾受业于张子信，并弃旧事，更制新法。"

"刘孝孙以 619 为章，8047 为纪，1966 为岁余，甲子为上元，命日度起虚中。"

如此知刘孝孙历 1 纪＝13 章，回归年日数为 $365\frac{1966}{8047}$日＝365.24431 日。每 619 年有 228 个闰月，每个朔望月为 $29\frac{17603}{33176}=\frac{979707}{33176}$日，33176 为日法，979707 为月法。

此外，刘孝孙自言："今孝孙历法，并按明文，以月行迟疾定其合朔，欲令食必在朔，不在晦二之日也。纵使频月一小三大，得天之统。"

这是说刘孝孙历采用定朔法计月。何承天欲用此法，由于会出现三个连大月，无法解决，不得不作罢。刘孝孙说，只要与天相符("得天之统")，纵然出现一小三大，也在所不惜。

刘孝孙还说，他的历法采用了三项方法：第一，与文献记载的日食时日对勘；第二，与文献记载的冬至天度对勘；第三，与文献记载的日影短长对勘。其中第一项说，春秋记载的 35 次日蚀(包括 8 次不注明是否朔日的日蚀)，用他的历法一一算出都在朔日。这是很不容易的。当然，他说的是他的历法朔日，而不一定是春秋经传的朔日，因为，古时计历用平朔，与天象是有误差的。直到汉代，犹时常蚀在晦或 2 日，更何况春秋时期！35 蚀必不能尽在朔日。刘孝孙算出在朔，只表明他的历法与天

象吻合(不是与时历吻合)。

"张孟宾以619为章,48901为纪,948为日法,11945为斗分。"刘、张历法"并从斗十一(度)起"。

张孟宾历1纪=79章,1章=619年,1个回归年为365 $\frac{11945}{48901}$日=365.24427日。619年228闰,一个朔望月为29 $\frac{503}{948}$日。

末句说冬至之日在斗11°,应是13°之误(参见《律历志》第426页第6行)。

4. 赵道严推交食法

"又有赵道严,准晷影之长短,定日行之进退,更造盈缩,以求亏食之期。"

5. 明克让历

"西魏入关,尚行李业兴《正光历》法,至周明帝武成元年,始诏有司造周历。于是,露门学士明克让、麟趾学士庾季才,及诸日者,采祖暅旧议,通简南北之术。自斯以后,颇睹其谬。……克让儒者,不处日官,以其书下于太史。"

6. 甄鸾的天和历

"及武帝时,甄鸾造天和历:上元甲寅至天和元年丙戌,积875792算外。章岁391,蔀法23460,日法290160,朔余153991,斗分5731,会余93516,历余160830,冬至斗15度。"

由这段记载可知,天和历回归年为365 $\frac{5731}{23460}$日,朔望月日数为29 $\frac{153991}{290160}$日。既知章岁为391,可以算得章闰为144,即每391年144闰。此外,近点月日数为27 $\frac{160830}{290160}$日,交会周期为173 $\frac{93516}{290160}$日。

有回归年、朔望月、近点月、交会周期,除了五星运行不可计算外,其他都是可以计算的了。

7. 马显的丙寅元历

"大象元年(579年),太史上士马显等,又上丙寅元历(亦名大象

历）。”上元丙寅至大象元年己亥，积 41554 年算上，日法 53563，亦名蔀会法。章岁 448，斗分 3167，蔀法 12992。章中(5376)为章会法。历余 29693，会日 173，会余 16619，冬至日在斗 12°。小周余、盈缩积。其历术别推入蔀会，分用阳率 499，阴率 9。每 12 月下各有日月蚀转分，推步加减之，乃为定蚀大、小余，而求加蚀之正。

由上可知，丙寅元历的回归年是 $365\frac{3167}{12992}$日$=365.243765$ 日，比正光历稍大，比其他历法都小。朔望月为 $29\frac{28422}{53563}$日；每章 448 年 165 闰，即章闰为 165；近点月为 $27\frac{29693}{53563}$日；交会周期 $173\frac{16619}{53563}$日。

其中说：“其历术别推入蔀会，分用阳率 499，阴率 9。”“别推入蔀会”，就是用另一种方法推出蔀会法即日法来。

《宋史·律历志七》曾说：何承天以$\frac{26}{49}$为强率，$\frac{9}{17}$为弱率，于强弦之际求日法，“自后治历者，莫不因承天法，累强弱之数”。马显于何承天法之外，另立强、弱率，所以说是“别”推入蔀会法。

马显法阳率(即强率)用 499，分母必是 940，是用四分历及古六历的日法、朔余为强率；阴率(即弱率)为 9，与何承天弱率相同。如此可求得强、弱数：

设强数为 a，弱数为 b，$\frac{499a+9b}{940a+17b}=\frac{28422}{53563}$，得方程组：

$$\begin{cases}499a+9b=28422\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\940a+17b=53563\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}a=\dfrac{1107}{23}\\b=\dfrac{11257}{23}\end{cases}$$

a、b 的分母相同，代入①、②式后，方程两端同乘以 23 就都变成了整数。而方程右端同扩大 23 倍是没有关系的，所以，可以认为：

$$\begin{cases}a=1107\\b=11257\end{cases}$$

代入①、②式求得的日法、朔余都比马显历大 23 倍，约简后与马显历完全相同。

清人李锐、顾观光都专门研究调日法，认为马显历与调日法不合。是他们忽略了《隋书·律历志》的这段记载。马显历的日法也是由何承天调日法获得，只是所用强率不同罢了。

8. 张宾的开皇历

对于张宾开皇历，《隋书·律历志》说，隋文帝杨坚受禅之初(581 年)，擢道士张宾为华州刺史，命与刘晖、董琳、刘祐、马显等议造新历，开皇四年(584 年)撰成奏上，颁于天下施行。至开皇十七年(597 年)改行张胄玄历。

《律历志》说张宾历"依何承天法，微加增损"。前面说过，何承天对历法的创议，因同僚责难都未施行，所行元嘉历，实无所长，张宾历也就可想而知了。《律历志》没有详载张宾历的计算方法，只记有 34 个参数，了解这些参数的含义，对张宾历至少也能思得其半了。

(1)第一个参数是上元积年，自上元甲子己巳到开皇四年甲辰，积 4129001 年，算上。即包括开皇四年在内。

(2)取蔀法 102906，每蔀 240 章，故章岁为$\frac{\text{蔀法}}{240}=429$。闰法为每章 429 年 158 闰，每年为 $12\frac{158}{429}$月，每章月数为章月：5306。

(3)回归年为 $365\frac{25063}{120906}$日，其中 25063 为斗分。

(4)朔望月为 $29\frac{96529}{181920}=\frac{5372209}{181920}$日，其中 5372209 为通月，181920 为日法。

(5)月蚀周期为 $5\frac{192}{221}$月$=\frac{1297}{221}$月。其中 1297 为会月，221 为会月。$\frac{1}{2}$会率：110.5 为会数。会率×通月=1187258189 为会分。会率×日法=40204320 为会日法。

把月蚀周期折算为日数：$5\frac{192}{221}$月$\times 29\frac{96529}{181920}$日/月$=\frac{6967755073}{40204320}$

$=173\dfrac{56143\frac{110}{211}}{181920}$日。其中 40204320 为会日法，173 为会日，56143 为（会）余，110 为（会）小分。

（6）交点月取为 $27\dfrac{38607\frac{1841}{2815}}{181920}$日$=27\dfrac{108680546}{512104800}$日，其中 27 为周日，2815 为交分法，512104800 为交法。

朔望月与交点月的差：$2\dfrac{57921\frac{974}{2815}}{181920}$日，其中 2 为朔差，57921 为（朔差）余，974 为（朔差）小分。

$\frac{1}{2}$交点月$=13\dfrac{110263\frac{2328}{2815}}{181920}$日，为阳历（或阴历）1 周日数。13 为阴阳历（日），110263 为（阴阳历）余，2328 为（阴阳历）小分。

$\frac{1}{2}$朔望月$=14\dfrac{139224.5}{181920}$日，为朔望合数。朔望合数$-\frac{1}{2}$交点月$=1\dfrac{28960\frac{1894.5}{2815}}{181920}$日，为前限；$\frac{1}{2}$交点月－前限$=12\dfrac{81303\frac{433.5}{2815}}{181920}$日，为后限。其中 12 为蚀限，81303 为（限）余，433.5 为（限）小分。

把朔望月的一半作朔望合数始于祖冲之《大明历》，以朔望合数减交点月的$\frac{1}{2}$作前限，也类似祖冲之法。《律历志》说开皇历是“依何承天法”并非确论。它似乎是沿正光历、兴和历的路子制定而成，属北朝型历法。南朝经何承天倡导，祖冲之的发展已远远走在前面了。

（7）近点月取 $27\dfrac{100859}{181920}$日，其中 27 为周日，100859 为（周日）余。

（8）五星合率，即星每合日分数，除以蔀法得每合日数。木星合率 41063889，除以蔀法 102960，得 $398\dfrac{85809}{102960}$日$=398.83342$日，比正光历、兴和历都大一些。其余四星合率是：火星合率，80297926；土星合率，38925413；金星合率，60119655；水星含率，11931125。

9. 龙宜弟的延兴历

“至后魏献帝时，有龙宜弟，复修延兴之历，又上表云：‘日食不在朔，而习之不废。’据《春秋》书，食[①] 乃天之验朔也。”

按，延兴是魏孝文帝年号，献帝在文帝之前不大可能“复修延兴之历”，中间必有脱文。意思大约是龙宜弟于献帝时制历法，孝文帝即位，更修延兴历。而且，他是主张“日必在朔”，即是主张用定朔法计月日的。

刘焯、张胄玄历已如前述。

二、南朝历法

宋氏元嘉，何承天造历，迄于齐末，相仍用之。

“梁武初兴，因循齐旧。天监中年，方改行宋祖冲之《甲子元历》。陈武受禅，亦无创改。”“天监三年，下诏定历，员外散骑侍郎祖暅奏曰：‘……宋大明中，臣先人考古法，以为正历。垂之于后，事皆符验，不可改张。八年，暅又上疏论之。”

“至九年正月，用祖冲之所造《甲子元历》颁朔。”

“至大同十年(544 年)，制诏更造新历，以甲子为元，619 为章岁，1536 为日法，183 年冬至差 1 度，月朔以迟疾定其小余，有三大二小。未及施用而遭侯景乱，遂寝”。

“陈氏因梁，亦用祖冲之历，更无所创改。”

---

① 中华书局 1987 年版《隋书 · 律历志》“食”字入上句，今改(见该书第 424 页第 8 行)。

校 后 记

校毕洪涛兄这部遗稿，身体虽然略觉疲乏，但心里轻松了许多——总算没有辜负故人。

洪涛兄正值英年而不幸猝然病逝，认识他的人无不十分痛心。尽管他生前已有几部著作和不少论文发表，且有包括此稿在内、字数颇为可观的文稿遗留下来，但据我对他的了解，仍敢肯定：他的学识、才华并未充分得以发挥和展现。这才是更加令人惋惜而又遗憾的。他走得也太过匆忙，以至没能亲眼见到本书清样的排出，再闻一闻新鲜油墨的淡淡幽香；也没能亲手为自己这部著作写一篇后记，叙说一下自己面对青灯黄卷的苦苦思索和持笔向纸的孜孜矻矻……

窦爱芝教授不以我浅陋，命拟一篇"代后记"。当时有些为难：因为我对本书的撰写过程并不了解，甚至连洪涛兄是如何与古代天文历算这一冷僻学科结下如此深厚的"情缘"，也一无所知。但转念一想：我毕竟从头至尾仔细地校读了书稿，可能除责任编辑之外，算得上是本书的第一读者了。那么，谈谈我校读书稿的缘由，再谈谈对书稿的读后印象还可以吧。于是就有了这篇校后记。

去年10月下旬的一天，南开历史学院本科的一位同学找到我，说他们自办的小报《纵横》拟出一版专刊追思洪涛兄——这位令他们尊重爱戴的好老师，约我写篇悼文。小文刊出后，可能被刘泽华师看到了。他在为本书撰好序文之后，嘱我先读一遍。由是我才得知此稿即将付梓。当时，我便非常迫切地想尽快读到这部书稿。

之所以会这样，在于十多年前我曾对洪涛兄有过一次建议。那时我正在研读宋人司马光的《资治通鉴》，为理清书中所载史事的某种关联，需将干支纪日转换成数序纪日。我以已故著名史家陈垣先生编制的《二十史朔闰表》为工具加以转换，发现《表》与《通鉴》的某些纪日不尽吻

合，就此去向洪涛兄讨教，同时建议他撰写一部关于历史年代学的著作。我知道，以他的知识结构，完成这一课题要比其他人容易得多，而且在我的印象中，似乎也没有这类专著出版过。虽然他当时未置可否，但我还是极力动员，记得最后与他开玩笑说："司马公与陈垣老都是严谨学者，可两者不吻合必有一误，当然也可能在传抄转印过程中出问题。但这些我都难以在短时间里断定，只等你的大著一出，讲清道理，我就相信'刘老'了。"现在即将出版的虽然不是关于历史年代学的著作，却是与之有密切关系的古历算法之作。强烈的好奇心让我不能不萌出先睹为快之念。

另外，促使我校读的还有一层必然的缘由，盖因洪涛兄生前对我帮助极大。1981 年，我研究生毕业后，留在南开历史系中国古代史组，担任冯尔康师的教学助手。具体任务是为一年级同学讲述隋至鸦片战争前的史籍与史料，尔康师则主讲这段历史。后到临近期末时，可能是为了让我尽早适应正课，尔康师告我，他的课只讲到元末，让我接以后的内容。事出仓促，所以感到压力极大。情急之下，只好临时抱佛脚，打算借别人的讲稿搭骨架，再抓紧时间多看些史料和较新的研究成果充血肉，把自己的讲稿写好。于是找到洪涛兄，他不仅慨然将自己的讲稿相借，还对我谈了不少他的教学经验。尤其是那讲稿，给我留下的印象极深，圈点勾画、增删修改，都十分认真。以至写到这里，我的脑海中又清晰地浮现出那一摞 400 字红格稿纸及纸上那密密麻麻的字迹。当时我就想，为了教好学生，他倾注了多少精力和心血啊！在悼文中，我也曾提及此事，当时写道，他的讲稿"不仅让我增长了学识，更让我领略了'为人师表'这四个简单汉字的极其深厚广博的涵义"。这里没有丝毫的虚誉。可以说，我今天站在三尺讲台上还能给同学们讲出点儿有用的东西，是与洪涛兄的帮助分不开的。随着我俩交往日多，在学问之道上，我所受其益也愈多，而我对于他却无所答报。正基于此，我才主动提出担任一次校对，终于能为洪涛兄出了把力。

此次校读，其中二校由我全部承担，但因我一度患病住院，三校的最后三章当时无力完成，故委托洪涛兄生前所招研究生周鑫（现从王晓欣兄）和我的研究生张光华、张笑川三位代劳。没有他们援手，三校的完

成不知要延宕多少时日,这是必须要感谢的。

再谈谈读书后的一些印象。先说点儿遗憾:本书虽题曰"古代历法计算法",但内容并未包括全部的古代历法,只写到南北朝时期。以后内容是否已撰写?是否已完成和还留有手稿?目下尚不得而知。我亟望能从洪涛兄遗物中发现后半部手稿,使本书成为完璧,让遗憾不要成为"永远"。

本书的主旨是用现代天文和数学知识诠释"正史"的《律历志》(《史记》称《历书》)中所载中国古代历法的计算方法问题。校读后,我以为本书有三个特色

具有较强的历史感。这不仅表现在全书以史的脉络缕述南北朝以前的历法状况,还不时在关键之处对历法的变化发展略加说明。如第二章介绍三统历时,说明它"首次用公式法计算历法",不仅使"程序大为减化","还新增了许多内容","使历法计算朝野合流"。第三章则说明为什么后来废止三统历而改行四分历。在第七章,还将整个古代历法的发展划分为三个阶段。虽说谈不谈这些发展并无碍本书的主旨,但在我看来,点明变化自有其意义。因为历法是由人制定的,是人对天文历象这一客观存在的主观认知。这种认知愈益接近客观,正表明历法愈益向合理的方向不断发展。了解其发展,对于更充分理解历法计算中的一些带有共性的问题,无疑会有所帮助。从这一角度着眼,书中说明历法和算法发展时寥寥数笔,是有画龙点睛之妙的。是为特色之一。

纠正中华书局点校本《隋书》以前的某些《律历志》中的种种讹误。一是原书的脱误、错简。如《汉书·律历志》"闰分"二字上脱一"见"字(第 41 页),《隋书·律历志》中将"小寒"误作"小雪"(第 424 页),《晋书·律历志》中所载行度"43 度 2509956 分"当为"33 度 2509956 分"(第 178 页注①),等等。这是脱误之例。另外,本书第 127 页指出:"《律历志》称'月行三道术'。首句是'月行迟疾,周进有恒',而后面的'求月行迟疾'部分首句却是'月经四表,出入三道',可见是标题颠倒了,这一节应是'求月行迟疾',后面才是'月行三道术'。"这是错简之例。二是点校中失误。如对《汉书·律历志》的"以十二除(去)之,至有闰之岁,除十三入章。三岁一闰……"作者便指出:"'十三'后当用句号,'入章'二字

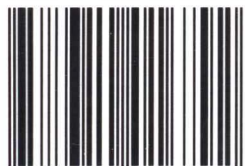
人下句才对。”(第41页)再如《晋书·律历志》中将“合数余”这一专有名词点断是错误的(第151、152页)。其例尚多,不遑遍举。中华书局点校本“正史”是颇具权威性的版本,指出其误处,使不致贻误读者,其意义自不消多说。是为特色之二。

尽力使专深学术通俗化,做到深入浅出,明白晓畅。我以为这点相当重要。目前学界有些人认为学术著作应追求专深,只有被同行认可,尤其为少数“大家”首肯之作,才称得上高水平。这种认识不能算错,只是有所偏颇。一味追求专深而排斥通俗,把后者视为“小儿科”而不屑一顾者,是绝不可取的。从理论方面讲,这牵涉到普及与提高的关系问题,非区区小文所能详论。这里只谈一点,通俗化是普及各种知识的惟一途径。任何一位大专家都是由通俗读物启其蒙、引其趣而逐渐步入专精的学术殿堂的。具体到古代天文历算之学,目前国内研究者为数极少。因此,把这门专深知识通俗化,引发更多青年学子的兴趣,甚至可以说关乎这门学科人才是否断档,专业能否继续发展的问题。因而我将其列为特色之三。本书通俗到何种程度?答曰:关涉数学者只是简单方程,关涉天文历法者有些专有名词需理解记忆而已。愚钝如我,通过此次校读,已入其门径。这不禁使我想起洪涛兄的音容笑貌……

最后,爱芝教授一再嘱我,让代表家属向南开大学出版社的肖占鹏、元青、焦静宜等诸位表示由衷之谢。没有诸位的鼎力之助,这样一部“冷僻”的著作是难以问世的。

叶振华
2002年11月草毕

责任编辑：薄国起　封面设计：陈侃

GUDAI LIFA JISUANFA

ISBN 7-310-01679-3
P·1　定价：28.00 元